-

La Transformada Z

Asignaturas: Análisis de Sistemas y Señales Control Digital

M.I. Ricardo Garibay Jiménez

Mayo 1997

TEMA 8. TRANSFORMADA Z

8.1 DEFINICIÓN Y RELACIÓN CON LA TRANSFORMADA DE FOURIER EN TIEMPO DISCRETO.

Como se ha mencionado en los temas anteriores, la transformada de Fourier tiene una importancia fundamental en la representación y análisis de señales y sistemas discretos. Una generalización de ella es la transformada Z.

El motivo principal para tratar con la transformada Z consiste en que la transformada de Fourier no converge para todas las secuencias; lo que hace necesario plantear una transformación que cubra una más amplia gama de señales.

Adicionalmente, la transformada Z presenta la ventaja de que, en problemas analíticos, el manejo de su notación, expresiones y álgebra es con frecuencia más conveniente.

El empleo de la transformada Z en señales discretas tiene su equivalente en la transformada de Laplace para señales continuas y cada una de ellas mantiene su relación correspondiente con la transformada de Fourier.

Anteriormente se definió la transformada de Fourier de una secuencia $x(k)$ como:

$$x(\Omega) = X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-j\omega k} \tag{8.1}$$

La transformada de la misma secuencia se define como:

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k} \tag{8.2}$$

La ec. 8.2 es un operador que transforma una secuencia en una función de la variable compleja continua z.

Genéricamente:

$$Z[x(k)] = X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k} \tag{8.3}$$

La correspondencia entre una secuencia y su transformada se denota como:

$$x(k) \leftrightarrow X(z)$$

Es importante destacar que existe una relación muy cercana entre la transformada de Fourier y la transformada Z; en particular, si se observa la sustitución de la variable compleja $e^{j\omega}$ por la variable compleja z. Cuando existe, la transformada de Fourier es simplemente $X(z)$ con $z = e^{j\omega}$.

La transformada de Fourier es la transformada Z tomando $|Z| = 1$.

Si tomamos $z = re^{j\omega}$, la ec. 8.2 resulta:

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)(re^{j\omega})^{-k} \tag{8.4}$$

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)(r^{-k})e^{-j\omega k} \tag{8.5}$$

La ecuación 8.5 se interpreta como la transformada de Fourier del producto $x(k)$ con la secuencia r^{-k}. Obviamente si $r = 1$, la ecuación 8.5 se reduce a la transformada de Fourier de $x(k)$.

La descripción e interpretación de la transformada en el plano complejo permite una más amplia visualización de la relación entre ambas transformadas.

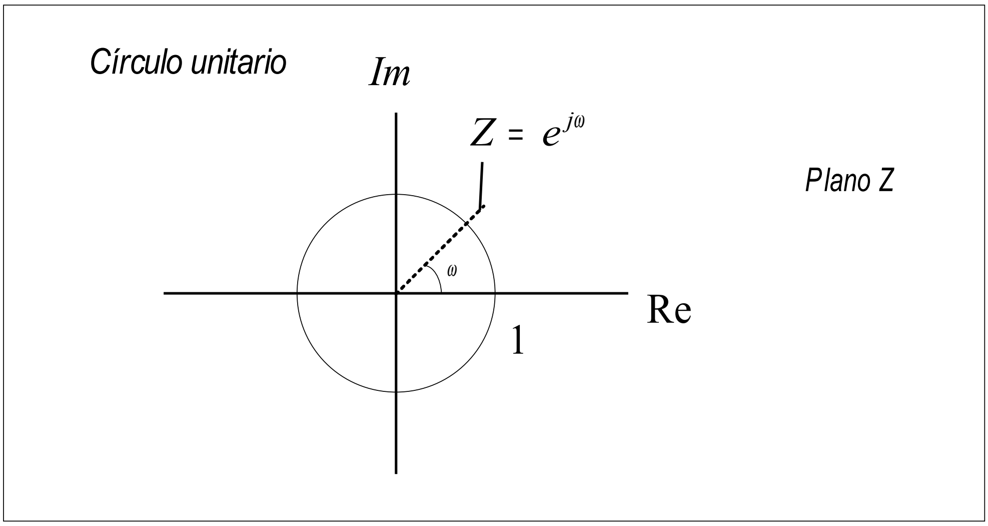


Figura 8.1

La región del plano en donde $|z| = 1$ corresponde a una circunferencia de radio igual a uno, la circunferencia unitaria. La transformada $X(z)$ evaluada en los puntos de dicha circunferencia es la transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$.

Iniciando la transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$, en $\omega = 0$, $z = 1$, siguiendo por $\omega = \frac{\pi}{2}$, $z = j$, hasta $\omega = \pi$, $z = -1$, se obtiene $X(e^{j\omega})$ para $0 \leq \omega \leq \pi$.

8.2 REGIÓN DE CONVERGENCIA.

Anteriormente se mencionó que la transformada de Fourier no siempre converge para todas las secuencias; es decir, la sumatoria infinita puede no siempre resultar finita. Similarmente, la transformada Z no converge para todas las secuencias ni para todos los valores de z. Para una secuencia dada, el conjunto de valores en el cual la transformada converge es llamada **Región de Convergencia.**

La región de convergencia de la transformada de Fourier requiere que la secuencia sea absolutamente sumable; lo cual, si se aplica a la ecuación 8.5 se puede expresar como:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| x(k) r^{-k} \right| \prec \infty \qquad (8.6)$$

De esta última expresión es claro que, debido al término r^{-k}, la transformada Z converge aun si la transformada de Fourier de la secuencia $x(k)$ no lo hace. Así, una secuencia escalón unitario $x(k) = s(k)$ no es absolutamente sumable, por lo que la transformada de Fourier no converge. Sin embargo, $r^{-k} s(k)$ es absolutamente sumable si $|r| \succ 1$. Esto significa que la transformada Z para un escalón unitario existe en una región de convergencia $|z| \succ 1$.

La convergencia de la transformada Z depende solamente de $|z|$. Es decir que si:

$$|X(z)| \prec \infty$$

entonces:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)| |z|^{-k} \prec \infty \qquad (8.7)$$

La región en donde se cumple la desigualdad 8.7 es la región de convergencia. Si algún valor z_1 está ubicado en dicha región, entonces los valores sobre la circunferencia definida como $|z| = |z_1|$ están dentro de la región de convergencia. La figura 8.2 ilustra lo anterior.

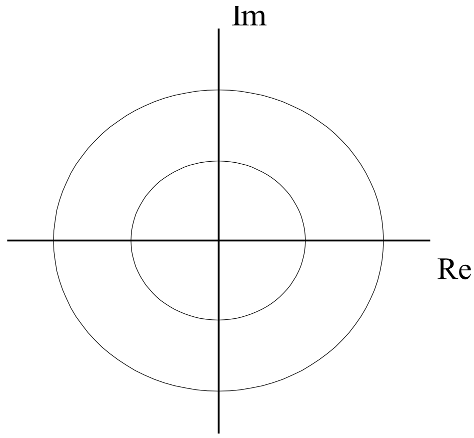


Figura 8.2

Si la región de convergencia incluye la circunferencia unitaria, se tiene convergencia de la transformada Z para $|z| = 1$, lo que equivale a que la transformada de Fourier también converge. Inversamente, si la región de convergencia de la transformada Z no incluye la circunferencia unitaria, entonces la transformada de Fourier de la secuencia no converge.

La transformada Z es una función analítica en todos los puntos de la región de convergencia; de aquí que la transformada Z y todas sus derivadas con respecto a w son funciones continuas en dicha región. Por último, si la región de convergencia incluye la circunferencia unitaria, entonces la transformada de Fourier y todas sus derivadas con respecto a w deben ser funciones continuas de la misma variable.

8.3 PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA Z

Frecuentemente se han empleado métodos de transformación para simplificar el análisis y síntesis de sistemas gobernados por ecuaciones diferenciales o en diferencias. La transformada Z es una regla por la cual una secuencia de números son convertidos a una función de la variable compleja z. Debido a su estructura básica, la transformada Z posee propiedades que facilitan la solución de ecuaciones en diferencias lineales usando simplemente manipulaciones algebraicas.

PROPIEDADES MÁS IMPORTANTES

a) SUPERPOSICIÓN

Se compone de las características de:

1. Homogeneidad:

$$f(k) \leftrightarrow F(z)$$
$$af(k) \leftrightarrow aF(z)$$

2. Aditividad:

$$f_1(k) \leftrightarrow F_1(z)$$
$$f_2(k) \leftrightarrow F_2(z)$$

entonces:

$$f_1(k) + f_2(k) \leftrightarrow F_1(z) + F_2(z)$$

Por lo tanto, la propiedad de superposición establece que si:

$$f(k) = af_1(k) + bf_2(k)$$

la transformada Z correspondiente es:

$$Z[f(k)] = Z[af_1(k) + bf_2(k)] = Z[af_1(k)] + Z[bf_2(k)]$$

$$\therefore\ F(z) = aF_1(z) + bF_2(z) \qquad (8.8)$$

b) CORRIMIENTO A LA DERECHA (RETRASO)

Suponga que la señal $f(k)$, la cual es idéntica a cero para un tiempo negativo, es aplicada a la entrada de un sistema cuya salida es igual a la entrada pero retrasada m unidades de tiempo discreto.

La respuesta del sistema se define entonces por:

$$y(k) = f(k - m) \quad k \geq 0$$

La transformada de la salida y(k) se define a su vez como:

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(k) z^{-k}$$

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k - m) z^{-k}$$

Recordando que la secuencia $f(k)$ fue especificado en cero para k negativo, tenemos:

$$Y(z) = f(0)z^{-m} + f(1)z^{-m-1} + f(2)z^{-m-2}$$

$$= z^{-m}\left[f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + ...\right]$$

La sumatoria dentro de los corchetes se reconoce como la transformada de $f(k)$, por lo que:

$$Y(z) = z^{-m}F(z) \qquad \text{para } |z| > R$$

$$Z\left[f\left(k - m\right)\right] = z^{-m}F(z) \qquad \text{para } |z| > R \qquad (8.9)$$

La representación en diagrama de bloques para la propiedad de corrimiento a la derecha se muestra en la figura 8.3.

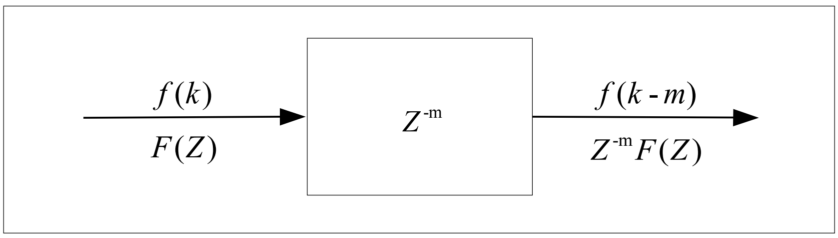


Figura 8.3

c) PROPIEDAD DE CONVOLUCIÓN

1. Para el sistema representado en la figura 8.4 se tiene como entrada la función $f(k)$ para $k \geq 0$, cuya transformada es $F(z)$

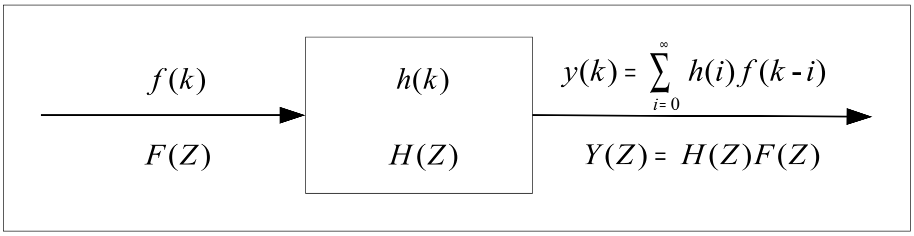


Figura 8.4

Su salida $y(k) \leftrightarrow Y(z)$ se define como una suma de convolución:

$$y(k) = h(0)f(k) + h(1)f(k-1) + ... + h(k-1)f(1) + h(k)f(0)$$

2. Por otra parte, por definición, la transformada de $y(k)$ es:

$$Y(z) = y(0) + y(1)z^{-1} + y(2)z^{-2} + y(3)z^{-3} + ... + y(k)z^{-k} = \sum_{K=0}^{\infty} y(k)z^{-k}$$

sustituyendo $y(k)$ por su equivalente de suma de convolución:

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[h(0)f(k) + h(1)f(k-1) + h(2)f(k-2) + ... + h(k)f(0) \right] z^{-k}$$

factorizando los términos $h(i),\ i = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ ...,\ n.$

$$Y(z) = h(0)\sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} + h(1)\sum_{k=0}^{\infty} f(k-1)z^{-k} + h(2)\sum_{k=0}^{\infty} f(k-2)z^{-k} + ... + h(k)\sum_{k=0}^{\infty} f(0)z^{-k}$$

3. Recordando la propiedad de retraso:

$$Z\left[f(k-m) \right] = \sum_{k=0}^{\infty} f(k-m)z^{-k} = z^{-m}F(z)$$

la transformada en cuestión resulta:

$$Y(z) = h(0)F(z) + h(1)z^{-1}F(z) + h(2)z^{-2}F(z) + ... + h(k)z^{-k}F(z)$$

Factorizando $F(z)$:

$$Y(z) = \left[h(0) + h(1)z^{-1} + h(2)z^{-2} + \ldots. + h(k)z^{-k} \right] F(z)$$
$$\therefore \; Y(z) = H(z)F(z)$$

4. En conclusión se tiene que:

$$y(k) = \sum_{i=0}^{\infty} h(i)f(k-i)$$

$$Y(z) = H(z)F(z) \tag{8.10}$$

La transformada de la salida es igual al producto de la transformada de la señal de entrada por la transformada de la respuesta a impulso del sistema. Esta propiedad será de gran utilidad como base del procedimiento de analizar y sintetizar sistemas lineales discretos.

OTRAS PROPIEDADES IMPORTANTES DE LA TRANSFORMADA Z.

D) PROPIEDAD DE "SUMACIÓN"

Sean las secuencias $f(k) \leftrightarrow F(z)$ y $g(k) \leftrightarrow G(z)$.

si entre ellas es posible establecer la relación:

$$g(k) = \sum_{i=0}^{k} f(i) \qquad \text{para } k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n.$$

La transformada $G(z)$ puede definirse en términos de $F(z)$, de la siguiente forma:

$$G(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} F(z) = \frac{z}{z-1} F(z) \qquad \text{para } |z| \succ \max\ (1, R) \tag{8.11}$$

Como demostración considérese que la secuencia $g(k)$ es la suma de los $k+1$ primeros términos de la secuencia $f(k)$; tal que $f(k) = g(k) - g(k-1)$, para $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$; y que $g(-1) = 0$. Entonces, la transformada $F(z)$ puede expresarse como:

$$F(z) = \sum_{i=\infty}^{\infty} f(k) z^{-k}\ |z| > R$$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k) z^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} g(k-1) z^{-k}$$

$$= G(z) - z^{-1} G(z) = (1 - z^{-1}) G(z)$$

$$\Rightarrow\ G(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} F(z) = \frac{z}{z-1} F(z) \qquad |z| > \max\ (1,\text{R}) \tag{8.12}$$

E) PROPIEDAD DE MULTIPLICACIÓN POR a^k

Sean las secuencias $f(k)$ y g(k) definidas para $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n.$

Si entre ellas se establece la siguiente relación:

$$g(k) = a^k f(k) \qquad \text{para } k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n.$$

entonces la transformada $G(z)$ se determina como sigue:

$$f(k) \leftrightarrow F(z) \qquad \text{para } |z| > R$$

$$Z[g(k)] = Z\left[a^k f(k)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} a^k f(k) z^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f(k)\left[a^{-1}z\right]^{-k}$$

$$Z\left[a^k f(k)\right] = F(a^{-1}z) \quad \text{para} \quad |z| > |a|; \quad a \in R \tag{8.13}$$

$F(a^{-1}z)$ denota la operación de reemplazo de $a^{-1}z$ en donde aparezca $F(z)$.

F) PROPIEDAD DE DERIVACIÓN

Las derivadas de cualquier orden de F(z) convergen en la región de convergencia. Esto nos da una herramienta para determinar nuevos pares de transformación. Derivando la ecuación (8.2) con respecto a z, se obtiene:

$$\frac{dX(z)}{dz} = -\sum_{k=0}^{\infty} kx(k) z^{-k-1} \qquad \text{para } |z| \succ R$$

Multiplicando por $-z$, la expresión anterior, resulta la propiedad:

$$\sum_{k=0}^{\infty} kf(k) z^{-k} = -z\frac{dF(z)}{dz}$$

$$\Rightarrow \ Z[kf(k)] = -Z\frac{dF(z)}{dz} \qquad |z| \succ R \tag{8.14}$$

G) TEOREMA DEL VALOR INICIAL

Es posible determinar el término inicial, $f(0)$, de una secuencia $f(k)$, a partir de la transformada correspondiente. Si se tiene $F(z)$ de la forma:

$$F(z) = f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + \ldots.$$

se observa que conforme la variable z^{-1} tiende a cero, todos los términos del lado derecho de la igualdad tienden a cero excepto $f(0)$. Esto es equivalente a:

$$f(0) = \lim_{|z| \to \infty} F(z) \tag{8.15}$$

H) TEOREMA DEL VALOR FINAL

Para determinar el comportamiento de una secuencia $f(k)$ en estado estático, esto es $f(k)$ con k tendiendo a infinito, es posible recurrir directamente a la transformada de la función. La condición para realizar esto es que $F(z)$ no tenga polos fuera del círculo unitario, lo cual determina que $f(k)$ sea una función acotada, y por lo tanto finita, cuando k tiende a infinito. Por lo anterior, el teorema del valor final podrá ser aplicado sólo en los casos en los que $(z-1)F(z)$ sea analítica para $|z| \geq 1$.

En tales casos el teorema se enuncia de la siguiente forma:

$$f(\infty) = \lim_{z \to 1}(z-1)F(z) \tag{8.16}$$

8.4 TRANSFORMADAS COMUNES:

1) Impulso unitario (delta de Kronecker).

Definiendo la secuencia impulso unitario $\delta(k) = 1$ para $k = 0$, su transformada se determina de la siguiente forma:

$$\Delta(z) = Z[\delta(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(k) z^{-k} = \delta(0) + \delta(1) z^{-1} + \delta(2) z^{-2} + ...$$
(8.17)

$$\therefore \; \Delta(z) = 1$$

2) Definiendo un impulso retrasado m unidades de tiempo discreto y retomando la propiedad de corrimiento hacia la derecha, se obtiene el siguiente par de transformación:

$$f(k) = \delta(k - m)$$

$$F(z) = Z[\delta(k - m)] = z^{-m} \qquad (8.18)$$

3) Escalón unitario

Definido por la siguiente expresión:

$$u(k) = -1^{k} \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n. \qquad (8.19)$$

La transformada se obtiene de acuerdo con el siguiente desarrollo:

$$U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u(k) z^{-k} = u(0) + u(1) z^{-1} + u(2) z^{-2} + \ldots + u(k) z^{-k} + \ldots$$

$$U(z) = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=0}^{N-1} z^{-k} = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=0}^{N-1} (z^{-1})^{k} = \lim_{N \to \infty} \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}}$$

$$\therefore \; U(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \qquad \text{en la región } |z| \succ 1$$

$|z| \succ 1$ es la región de convergencia de la transformada $U(z)$, la cual se enuncia normalmente como:

$$U(z) = \frac{z}{z - 1} \qquad (8.20)$$

4) Serie geométrica $f(k) = a^k \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ n.$

De acuerdo con la definición anterior, la transformada $F(z)$ se determina según el siguiente procedimiento, considerando la propiedad de multiplicación por a^k.

$$-1^k \leftrightarrow \frac{z}{z-1}$$

empleando la propiedad mencionada:

$$Z\left[a^k f(k)\right] = F(a^{-1}z)$$

entonces:

$$f(k) = a^k \leftrightarrow \frac{a^{-1}z}{a^{-1}z-1}$$

Multiplicando y dividiendo por a se obtiene la transformada de una secuencia geométrica.

$$F(z) = \frac{z}{z-a}|z| \succ |a| \qquad (8.21)$$

Si se trabaja en la región $|z| > |a|$ dentro del plano complejo z, la transformada $F(z)$ de la secuencia geométrica converge.

Cuando la serie infinita $F(z)$ converge en una región del plano z, es posible usar el método de la transformada para resolver problemas de sistemas en el tiempo discreto.

De acuerdo con el valor de $|a|$ en la serie geométrica, se observa que se presentan los siguientes casos:

Si $|a| > 1$ se tiene una serie divergente y $|z| > |a|$
Si $|a| = 1$ se tiene una magnitud unitaria y $|z| > |1|$
Si $|a| < 1$ se tiene una serie convergente a cero y $|z| > |a|$

5) Rampa discreta unitaria $f(k) = k$ $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ n.$

A continuación se desarrolla brevemente la obtención de la transformada de una rampa discreta.

Multiplicando la ecuación anterior por $-z$ y considerando $a = 1$, se obtiene finalmente la expresión de la transformada de una rampa:

$$\sum_{k=0}^{\infty} kz^{-k} = \frac{z}{(z-1)^2} \qquad |z| \succ 1$$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} kz^{-k}$$

Para una secuencia geométrica se tiene:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \frac{z}{z-a}$$

Derivando con respecto a z:

$$\frac{d}{dz}\sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \frac{d}{dz}\frac{z}{z-a} = \frac{(z-a)-z}{(z-a)^2} = \frac{-a}{(z-a)^2}$$

Así pues:

$$-\sum_{k=0}^{\infty} ka^k z^{-k-1} = -\frac{a}{(z-a)^2} \tag{8.22}$$

8.4 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LOS SISTEMAS DISCRETOS LINEALES.

Una representación en diagramas de bloques de los sistemas lineales discreto permite la interpretación visual de las características dinámicas del sistema. Dicha representación emplea tres elementos básicos:

1) Unidad de retraso.
2) Unidad multiplicadora.
3) Unidad de suma.

Interconectando dichas unidades es posible representar cualquier sistema lineal discreto.

1) UNIDAD DE RETRASO

Es un dispositivo cuya señal de salida es idéntica a la señal de entrada excepto que es retrasada una unidad para tiempo discreto.

La relación característica para esta unidad es $y(k) = u(k-1)$

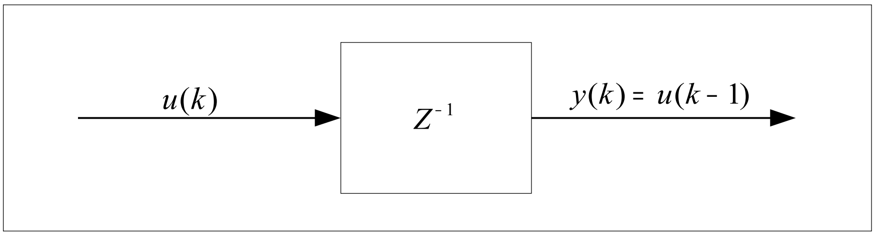


Figura 8.5

Al conectar dos unidades de retraso en cascada (la señal de salida para la primera unidad de retraso sirve de señal de entrada para la segunda unidad de retraso). Así, es posible la obtención de un retraso de dos unidades de tiempo discreto, según se muestra en la figura 8.6

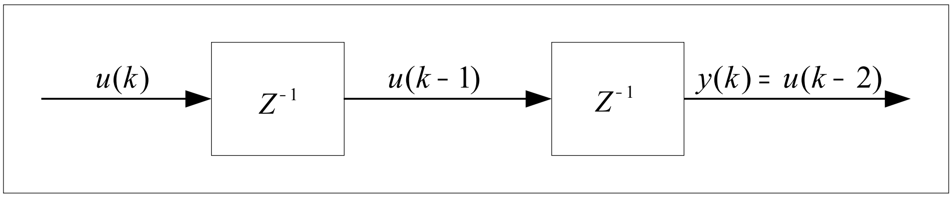


Figura 8.6

Similarmente, se podrá obtener un sistema que retrasa la entrada $u(k)$ $'p'$ unidades de tiempo discreto, si se conectan $'p'$ unidades de retraso en cascada. Esta función se designa por un sólo bloque con la notación z^{-p}.

2) UNIDAD MULTIPLICADORA

La unidad multiplicadora genera una secuencia (señal de salida) idéntica a la secuencia de entrada multiplicada por algún escalar fijo $'a'$. Entonces, si $u(k)$ es una entrada, la salida del multiplicador es $y(k) = a \cdot u(k)$

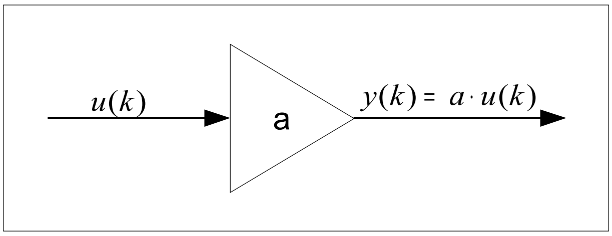


Figura 8.7

3) UNIDAD DE SUMA

La unidad de suma es un dispositivo al cual llegan dos o más señales discretas que se suma algebraicamente para generar la señal de salida discreta. Por ejemplo, si las señales $u_1(k)$ y $u_2(k)$ son aplicadas a un sumador, la salida estará dada por: $y(k) = u_1(k) + u_2(k)$

Las figuras 8.8 y 8.9 muestran la representación de las operaciones de suma y resta de dos señales discretas

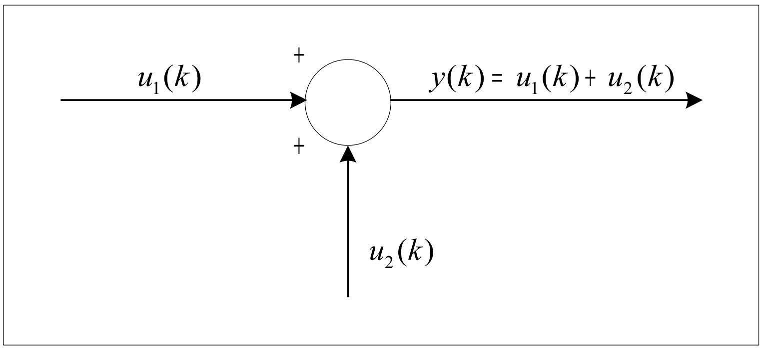


Figura 8.8

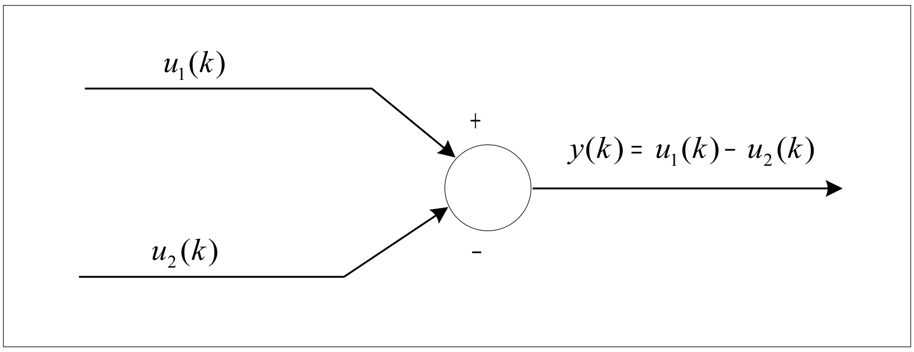


Figura 8.9

8.5 OBTENCIÓN DE LA RESPUESTA DE UN SISTEMA DISCRETO MEDIANTE TRANSFORMADA Z: LA ANTITRANSFORMADA Z.

8.5.1 MÉTODO DE EXPANSIÓN EN FRACCIONES PARCIALES.

A continuación se presenta el método de antitransformación por expansión en fracciones parciales. Este no es el único método de antitransformación que existe; sin embargo, es el más conocido y algebraicamente muy accesible. Consiste en descomponer una función $F(z)$, que se expresa como una relación de polinomios, en un grupo de términos más sencillos cuyas antitransformadas pueden ser obtenidas en tablas; es decir que, mediante dicha expansión, se deben obtener expresiones que correspondan a pares de transformación comunes.

Considérese una función $F(z)$ expresada como una relación de polinomios de orden m en el numerador y orden n en el denominador. Se asume que n es mayor o igual que m.

$$F(z) = \frac{q(z)}{p(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + ...+ b_{m-1} z + b_m}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ...+ a_{n-1} z + a_n} \tag{8.23}$$

Para obtener las fracciones parciales de $F(z)$, previamente debe factorizarse el polinomio denominador para encontrar sus raíces o polos $p_1, p_2, p_3 .... p_n$. En este procedimiento no se requiere hacer referencia al tipo de raíces que resultan; éstas pueden ser reales, imaginarias o complejas, y en todo caso el procedimiento es el mismo. La única particularización que se hace está condicionada a la presencia de raíces múltiples (polos repetidos). La ecuación (8.24) muestra la estructura de la función $F(z)$ factorizada.

$$F(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + ...+ b_{m-1} z + b_m}{(z - p_1)(z - p_2)..........(z - p_n)} = \frac{q(z)}{\prod_{i=1}^{n} (z - p_i)} \tag{8.24}$$

Cuando todos los polos de $F(z)$ en la ecuación (8.24) son diferentes la expansión en fracciones parciales tiene la siguiente forma:

$$F(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + ...+ b_{m-1} z + b_m}{(z - p_1)(z - p_2)...........(z - p_n)} \tag{8.25}$$

$$= d_0 + d_1 \frac{z}{z - p_1} + d_n \frac{z}{z - p_2} + ...+ d_n \frac{z}{z - p_n}$$

El cálculo de los coeficientes d_i es como sigue:

$$d_0 = F(z)\big|_{z=0} = \frac{b_m}{(-p_1)(-p_2)\dots\dots\dots(-p_n)} \tag{8.26}$$

$$d_i = \frac{z-p_i}{z}F(z)\Big|_{z=p_i} \qquad \text{para } i = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ n.$$

$$d_n = \frac{b_0z^m + b_1z^{m-1} + \dots + b_{m-1}z + b_m}{z(p_i - p_1)\ (p_i - p_2)\ \dots\ (p_i - p_n)} \tag{8.27}$$

Al realizar la expansión, la función $F(z)$ podrá expresarse como indica la ecuación (8.25), lo cual se toma como base para obtener la secuencia $f(k)$. Debido a la linealidad de la transformada y a los pares de transformación comunes, la secuencia $f(k)$ resulta:

$$f(k) = Z^{-1}\left[F(z)\right] = d_0\delta\ (k) + d_1p_1{}^k + d_2p_2{}^k + \dots\dots + d_np_n{}^k \tag{8.28}$$

para

$$k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ n.$$

En caso de que resulten polos múltiples en la factorización, la ecuación (8.25) puede tomar la forma siguiente:

$$F(z) = \frac{b_0z^m + b_1z^{m-1} + \dots\dots\dots + b_{m-1}z + b_m}{(z-p_i)^{n_1}(z-p_2)^{n_2}\dots\dots\dots(z-p_n)^{n_1}} \tag{8.29}$$

donde:

$$n_1 + n_2 + \dots\dots\dots + n_1 = n$$

En este planteamiento resulta al menos uno de los exponentes n_i mayor o igual a la unidad.

La expansión de $F(z)$, en este caso, tiene la forma:

$$
\begin{aligned}
F(z) = d_0 &+ d_1 \frac{z}{z-p_1} + d_2 \frac{z^2}{(z-p_1)^2} + \ldots\ldots + d_{n_1} \frac{z^{n_1}}{(z-p_1)^{n_1}} \\
&+ e_1 \frac{z}{z-p_2} + e_2 \frac{z^2}{(z-p_2)^2} + \ldots\ldots + e_{n_2} \frac{z^{n_2}}{(z-p_2)^{n_2}} \\
&+ \ldots\ldots \\
&+ r_1 \frac{z}{z-p_1} + r_2 \frac{z^2}{(z-p_1)^2} + \ldots\ldots + r_{n_1} \frac{z^{n_1}}{(z-p_1)^{n_1}}
\end{aligned}
\tag{8.30}
$$

Es indispensable incluir los n_i términos correspondientes a cada polo múltiple p_i.

Una vez que se ha realizado la expansión, se observa un tipo de términos que no tienen un par de transformación común; por lo cual deben considerarse las transformadas complementarias indicadas en la tabla 8.II. La aplicación de los pares de transformación comunes y los enunciados para los casos de polos múltiples normalmente resuelven las tareas de antitranformación de la mayoría de las funciones más frecuentes.

TABLA 8.II

PARES DE TRANSFORMADAS Z PARA RAÍCES MÚLTIPLES

$F(z)$	$f(k)$ para $k \geq 0$
$\frac{z}{z-a}$	a^k
$\frac{z^2}{(z-a)^2}$	$(k+1)a^k$
$\frac{z^3}{(z-a)^3}$	$\frac{(k+1)(k+2)}{2!}a^k$
$\frac{z^4}{(z-a)^4}$	$\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3!}a^k$
.	.
.	.
.	.

8.6 FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DE SISTEMAS DISCRETOS

De acuerdo con el planteamiento básico de la transformada Z y sus propiedades, principalmente la de Convolución, es posible establecer diversos procedimientos de análisis de sistemas discretos empleando el concepto de función de transferencia $H(z)$; la cual se define como la relación de la transformada Z de la salida, $Y(z)$, de un sistema entre la transformada Z de su entrada, $U(z)$.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} \tag{8.31}$$

Esta definición se muestra en la figura 8.4, lo mismo que la relación matemática entre las variables involucradas: mientras que en el dominio de k, la salida se determina por medio de una suma de convolución, de la entrada y la respuesta a impulso; en el dominio de z, la salida es el producto de las transformadas de las mismas variables. Por esta razón, la función de transferencia $H(z)$ debe ser tomada como la transformada Z de la respuesta a impulso $h(k)$ del sistema en cuestión.

La función de transferencia tiene una trascendencia muy grande en el análisis de sistemas basado en el modelo de entrada-salida. A partir de ella se han desarrollado diversos métodos de interpretación, análisis y diseño de sistemas discretos. Incluso los importantes conceptos de estabilidad y respuesta en frecuencia han sido abordados tradicionalmente desde esta base.

La expresión general aplicable a la función de transferencia es:

$$H(z) = \frac{q(z)}{p(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_{m-1} z + b_m}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n}$$

$$= \frac{(z - c_1)(z - c_2)\ldots(z - c_m)}{(z - p_1)(z - p_2)\ldots(z - p_n)} = \frac{\prod_{j=1}^{m}(z - c_j)}{\prod_{i=1}^{n}(z - p_i)} \tag{8.32}$$

De la ecuación (8.32) se destaca que la factorización de los polinomios de la función de transferencia da lugar a las raíces genéricamente denominadas polos (p_i) y ceros (c_j). Estas raíces, principalmente los polos, son determinantes en el análisis del comportamiento de los sistemas; lo mismo que de su respuesta en frecuencia y estabilidad.

Previamente a abordar estos temas, conviene revisar el planteamiento de algunos conceptos asociados.

1. Sistema en cascada

La función de transferencia de un sistema compuesto por dos bloques conectados en cascada; los cuales tienen funciones de transferencia $H_1(z)$ y $H_2(z)$, respectivamente, es el producto de los dos términos componentes. La figura 8.10 ilustra este concepto.

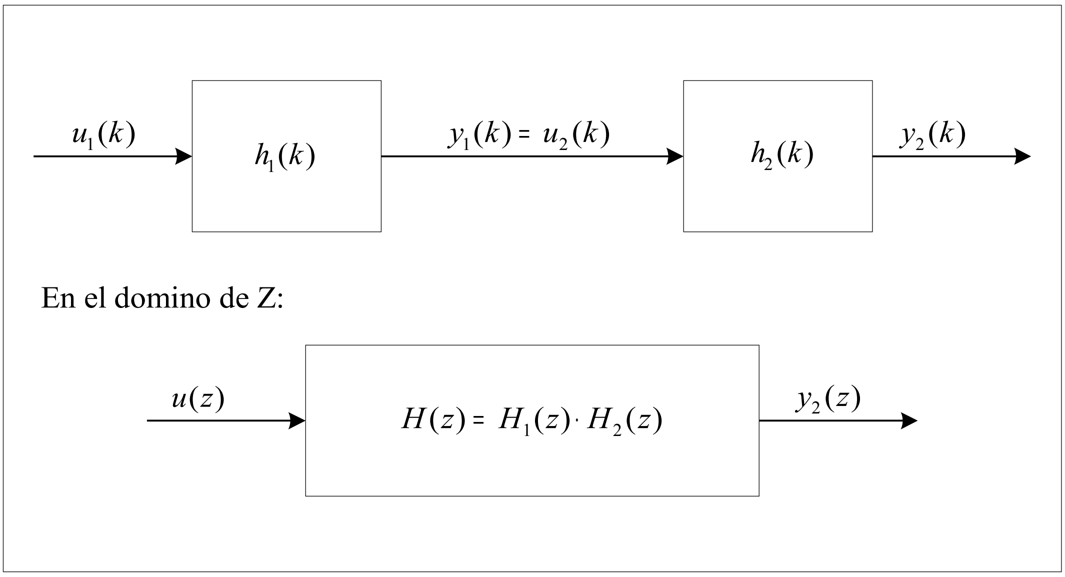


Figura 8.10

2. Sistema inverso

A un sistema con función de transferencia $H_1(z)$, puede corresponder un sistema inverso $H_2(z)$.

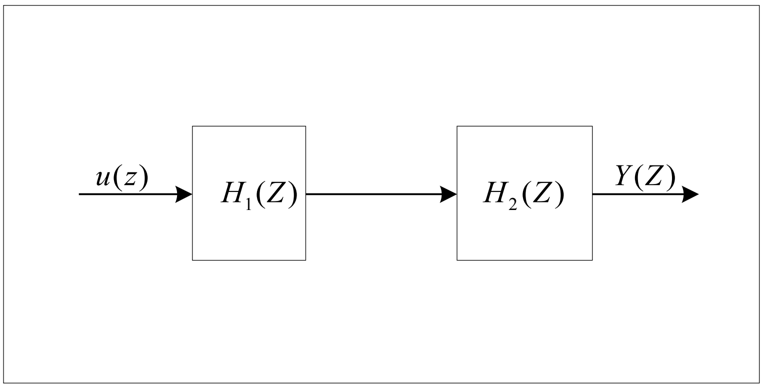


Figura 8.11

Si las funciones H_1 y H_2 son inversas, entonces:

$$Y(z) = U(z)$$

$$H_1(z) = \frac{1}{H_2(z)}$$

$$H(z) = H_1(z)H_2(z) = 1$$

Por lo tanto, en k, la representación del sistema es como se muestra en la figura 8.12

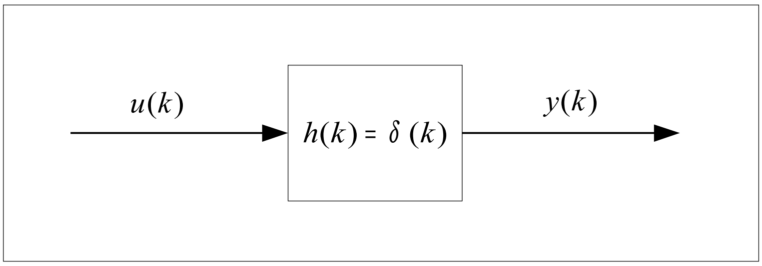


Figura 8.12

Además, la convolución en este caso resulta:

$$y(k) = \sum_{i=0}^{\infty} h(i)\mu\,(k-i) = \sum_{i=0}^{\infty} \delta\,(i)\mu\,(k-i) = \mu\,(k)$$

"La convolución de una función $f(k)$ con una delta de Kronecker da como resultado siempre la misma función $f(k)$".

3. Sistema realimentado

Un campo de aplicación típico de la realimentación es en la teoría de control; donde un sistema $H_1(z)$ cuya variable de salida $y(k)$ debe ser controlada. El sistema podrá ser controlado, aun bajo condiciones dinámicas indeseables o incluso siendo inestable, si se considera la configuración mostrada en la figura 8.13. En ella, para hacer que la respuesta se comporte de la forma deseada, se presenta la estructura de retroalimentación típica, y se considera la selección apropiada del sistema $H_2(z)$; para generar un comportamiento dinámico controlado entre las señales $u(k)$ e $y(k)$.

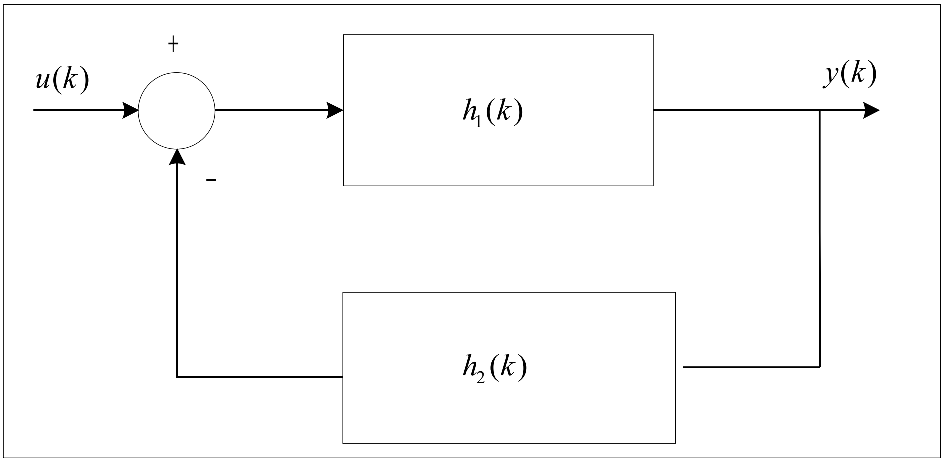


Figura 8.13

$$Y(z) = \frac{H_1(z)}{1 + H_1(z)H_2(z)} \tag{8.33}$$

8.7 ESTABILIDAD DE SISTEMAS DISCRETOS

Condición necesaria y suficiente para la estabilidad de un sistema discreto:

Un sistema discreto es estable cuando produce una salida acotada al aplicársele una entrada acotada. Los sistemas discretos estables se caracterizan porque todos sus polos se ubican en el plano complejo z, dentro de un círculo centrado en el origen de radio unitario; es decir que, todos sus polos tienen magnitudes menores a la unidad.

En el desarrollo de sistemas discretos se tendrá como objetivo, normalmente, el diseño de sistemas estables que satisfagan algunos objetivos previamente especificados. Un sistema estable implica un sistema que tiende a mantener una condición de equilibrio.

8.7.1 POLOS DE H(z) Y RESPUESTA TRANSITORIA

La localización de los polos de $H(z)$ en el plano z permite caracterizar efectivamente las propiedades de la respuesta para un sistema discreto lineal.

Se pueden considerar diversos casos respecto a la función de transferencia y las ubicaciones de polos más representativas.

A.- Polo real en $z = a$.

Función de transferencia con un polo simple.

La respuesta característica es de la forma dada por la ecuación (8.34).

$$Ar^k \cos\,(k\theta + \phi) \qquad \text{para } k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n. \qquad (8.34)$$

Donde A y ϕ son constantes obtenidas de la expansión en fracciones parciales y:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$$

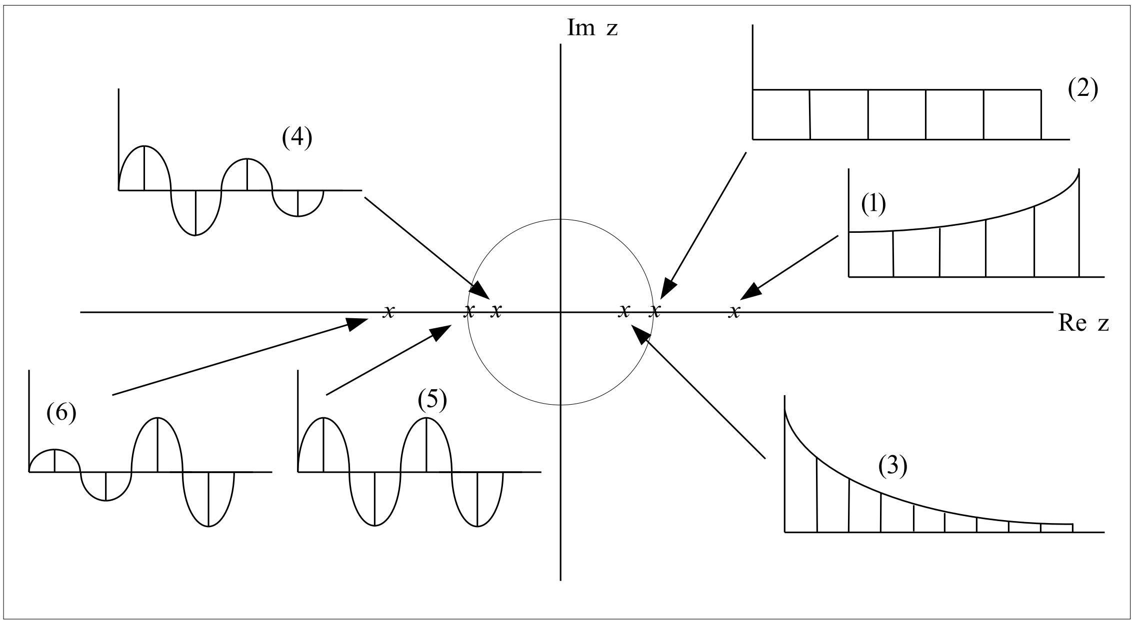


Figura 8.14

Casos:

1. - $\sqrt{a^2+b^2} > 1$. Los polos se ubican fuera del circulo unitario (sistema inestable). La respuesta a impulso es una oscilación creciente en magnitud.

2. - $\sqrt{a^2+b^2} = 1$. Los polos están localizados sobre el círculo unitario (sistema inestable). La respuesta es una oscilación parecida a un senoide con magnitud constante.

3. $\sqrt{a^2+b^2} < 1$. Los polos están localizados dentro del círculo unitario (sistema estable). El resultado es una oscilación parecida a una senoide decreciente en magnitud.

La figura 8.15 ilustra los patrones de respuesta a impulso de los casos de segundo orden enunciados.

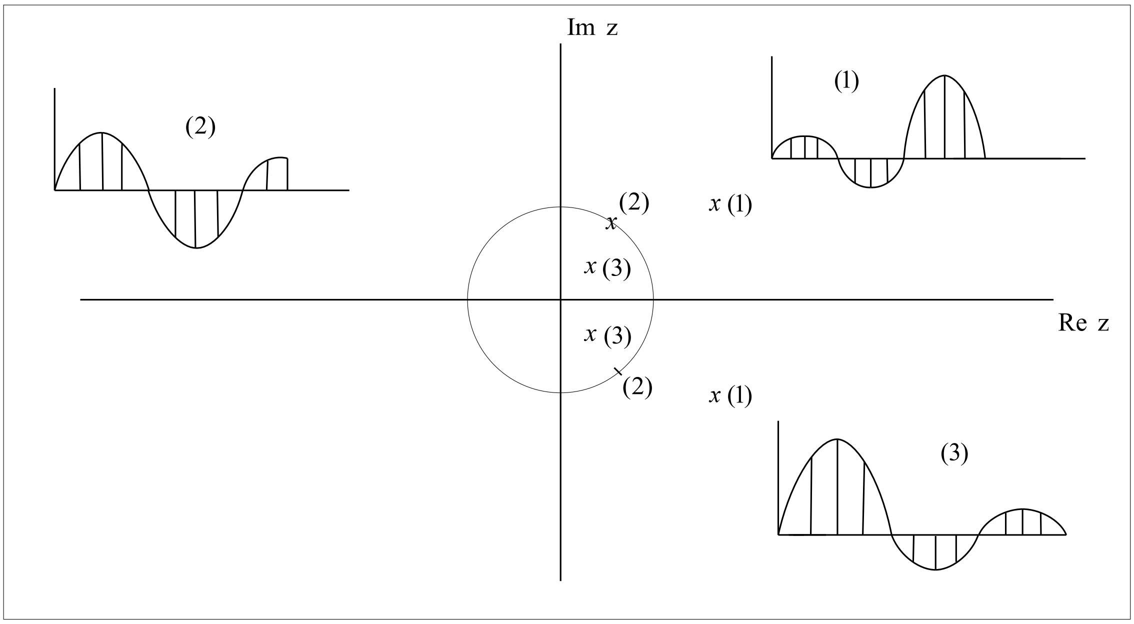


Figura 8.15

8.7.2. POLOS DONIMANTES.

Como se ha mencionado, en el diseño de sistemas discretos, el enfoque más frecuente es respecto a los sistemas estables. Debido a que los términos de la respuesta transitoria, generados por los polos de la función de transferencia que están cerca del círculo unitario, son de un grado de lentitud o retraso mucho mayor que aquellos generados por los polos que están más cerca del origen; tienen una influencia de mayor importancia sobre la respuesta transitoria. En muchos casos reales se asume que la función de transferencia se caracteriza por tener algunos de sus polos muy cerca del círculo unitario, mismos que se consideran los polos dominantes del sistema.

En la figura 8.16 se representa esta concepción, en donde los polos dominantes p_1 y p_2 son complejos conjugados.

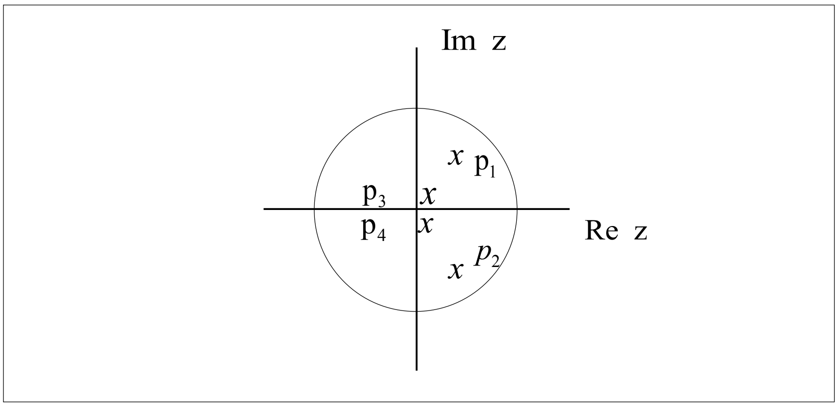


Figura 8.16

Para un valor suficientemente de k, el patrón del transitorio se asemeja más al que corresponde a los polos dominantes exclusivamente. En este caso una senoide discreta del tipo dado por la ecuación (8.34), con $r = |p_1|$ y $\theta = \angle p_1$.

8.8 RESPUESTA SENOIDAL PERMANENTE DE SISTEMAS LINEALES (FILTROS DIGITALES)

Este concepto tiene su equivalente en el planteamiento que se hizo en el tema 6 y corresponde a la transformada de Fourier de una función discreta:

$$X(\Omega) = X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-j\omega k}$$

La figura 8.17 representa la forma en que puede concebirse la respuesta en frecuencia de sistemas discretos. En dicha figura se asume que la entrada a un sistema $H(z)$ es una señal senoidal pura.

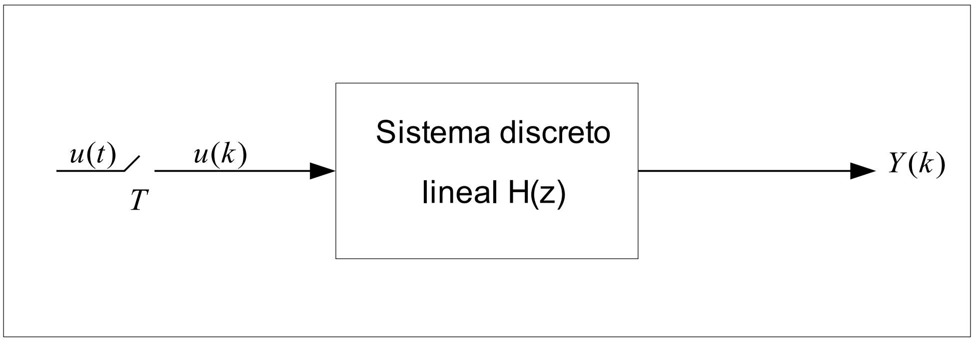


Figura 8.17

$$u(t) = sen(\omega_1 T)$$

$$u(t) = sen(k\omega_1 T) \qquad\qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n.$$

$$u(z) = \frac{2sen(\omega_1 T)}{(z - e^{j\omega_1 T})\,(z - e^{-j\omega_1 T})}$$

$$H(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m}{(z - p_1)\,(z - p_2)\ldots(z - p_n)} \qquad\qquad |p_1| < 1$$

Si consideramos que todos los polos $H(z)$ son distintos entre sí, la solución del sistema esta determinada por el desarrollo siguiente:

$$Y(z) = H(z)H(z)$$

$$Y(z) = \alpha_0 + a_1\frac{z}{z - p_1} + \alpha_2\frac{z}{z - p_2} + \ldots + \alpha_n\frac{z}{z - n} + a\frac{ze^{j\theta}}{z - e^{j\omega_1 T}} + b\frac{ze^{-j\theta}}{z - e^{-j\omega_1 T}}$$

Los últimos dos términos de la expresión anterior corresponden a la respuesta forzada, dependiente de la entrada senoidal. Los coeficientes a y b están dados por:

$$a = \frac{1}{2j} H(e^{j\omega_1 T})$$

$$b = -\frac{1}{2j} H(e^{-j\omega_1 T})$$

Por definición de transformada z y tomando $z = e^{j\omega}$, se tiene:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^{-k}$$

1) $$H(e^{j\omega_1 T}) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) e^{-j\omega_1 Tk}$$

$$\Rightarrow H(e^{j\omega_1 T}) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)\left[\cos\left(k\omega_1 T\right) - j \cdot sen\left(k\omega_1 T\right)\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} h(k)\cos\left(k\omega_1 T\right) - j\sum_{k=0}^{\infty} h(k) sen\left(k\omega_1 T\right)$$

2) $$H(e^{-j\omega_1 T}) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) e^{j\omega_1 Tk}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} h(k)\cos\left(k\omega_1 T\right) + j\sum_{k=0}^{\infty} h(k) sen\left(k\omega_1 T\right)$$

de donde se observa que los coeficientes son complejos conjugados. A la función $H(e^{j\omega_1 T})$ se le conoce como función de respuesta en frecuencia evaluada en ω_1. Por ser compleja, pueden hacerse las definiciones siguientes:

$$H(e^{j\omega_1 T}) = \left|H(e^{j\omega_1 T})\right| \angle H(e^{j\omega_1 T}) \qquad H(e^{-j\omega_1 T}) = \left|H(e^{j\omega_1 T})\right| \angle H(e^{j\omega_1 T})$$

de donde puede definirse:

$$M = H(\omega_1) = \left|H(e^{j\omega_1 T})\right| = \left|H(e^{-j\omega_1 T})\right|$$

y:

$$\theta(\omega_1) = \angle H(e^{j\omega_1 T}) \qquad -\theta(\omega_1) = \angle H(e^{-j\omega_1 T})$$

Por tanto, la respuesta del sistema se determina de acuerdo con el desarrollo mostrado abajo. La respuesta incluye a los elementos transitorios generados por la propia dinámica del sistema, y la respuesta senoidal permanente dependiente de la entrada.

$$Y(z) = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{z}{z - p_1} + \alpha_2 \frac{z}{z - p_2} + \ldots + \alpha_n \frac{z}{z - n} + \frac{M(\omega_1)}{2j}\left[\frac{ze^{j\theta}}{z - e^{j\omega_1 T}} - \frac{ze^{-j\theta}}{z - e^{-j\omega_1 T}}\right]$$

Antitransformando:

$$y(k) = \alpha_0 \delta(k) + \alpha_1 (p_1)^k + \alpha_2 (p_2)^k + \ldots + \alpha_n (p_n)^k + \frac{M(\omega_1)}{2j}\left[e^{(j\omega_1 T + \theta)} - e^{-(j\omega_1 T + \theta)}\right]$$

$$y(k) = \alpha_0 \delta(k) + \alpha_1 (p_1)^k + \alpha_2 (p_2)^k + \ldots. + \alpha_n (p_n)^k + M(\omega_1)\left[sen\left[\omega_1 T + \theta(\omega_1)\right]\right]$$

Por lo anterior, se puede concluir que la respuesta en estado estable de un sistema discreto $H(z)$, para una entrada senoidal de velocidad angular ω_1, se define como:

$$y(k) = M(\omega_1) sen\left[k\omega_1 T + \theta(\omega_1)\right] \quad , \quad \text{para una } k \text{ grande}$$

en donde:

$$M(\omega_1) = \left|H(e^{j\omega_1 T})\right|$$
$$\theta(\omega_1) = \angle H(e^{j\omega_1 T}) \qquad (8.35)$$

Una comparación de la señal de respuesta en estado estable con la señal de entrada revelan que ambas son de forma senoidal y frecuencia en radianes ω_1. La transmisión de la entrada senoidal a través del sistema crea un cambio en la magnitud y en la fase.

Si en alguna ocasión fuera requerido un filtro que suprimiera la frecuencia ω_1, entonces se tendría que diseñar un sistema discreto que cumpliera con:

$$\left|H(e^{j\omega_1 T})\right| \approx 0$$

Por otra parte, haciendo que un sistema cumpliera con la siguiente característica, se podría amplificar una senoide de la misma frecuencia:

$$\left|H(e^{jw_1 T})\right| > 1.$$

El término $\left|H(e^{jw_1 T})\right|$ es conocido como factor de ganancia del sistema a la frecuencia ω_1 y define la efectividad con que se transmite la entrada senoidal. Similarmente, el factor de ángulo fase $\angle H(e^{jw_1 T})$ mide el defasamiento que es causado por la operación del sistema con una entrada senoidal.

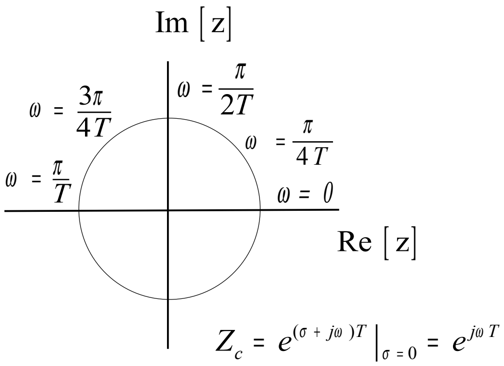
Evidentemente, el valor de dichos factores es dependiente del valor de la frecuencia ω de la señal senoidal de entrada. Genéricamente, son funciones continuas de la frecuencia $M(\omega)$ y $\theta(\omega)$.

8.8.1 PERIODICIDAD DE $H(e^{jwT})$

Una característica particular en los sistemas discretos, es que los factores de ganancia y ángulo son periódicos en relación con la frecuencia. Es decir, hay un período $\frac{2\pi}{T}$ con respecto al cual el valor de los factores se repiten. Esto es porque :

$$e^{j(\omega + \frac{2\pi}{T})} = e^{j\omega T}$$

Sin embargo, el enfoque principal que se tiene en sistemas discretos con respecto a la función periódica $H(j\omega T)$ es solamente en el intervalo $0 \le \omega \le \frac{\pi}{T}$. Esto es porque para valores mayores de frecuencia no se cumple con el teorema de muestreo $\omega_s = \frac{\pi}{T}$. La figura 8.18 ilustra lo anterior.



ω	$e^{j\pi T}$	Forma Polar
0	e^{j0}	$1\angle 0^\circ$
$\frac{\pi}{4T}$	$e^{j\pi/4}$	$1\angle 45^\circ$
$\frac{\pi}{2T}$	$e^{j\pi/2}$	$1\angle 90^\circ$
$\frac{3\pi}{4T}$	$e^{j3\pi/4}$	$1\angle 135^\circ$
$\frac{\pi}{T}$	$e^{j\pi}$	$1\angle 180^\circ$
$\frac{5\pi}{4T}$	$e^{j5\pi/4}$	$1\angle 225^\circ$
$\frac{3\pi}{2T}$	$e^{j3\pi/2}$	$1\angle 270^\circ$
$\frac{2\pi}{T}$	$e^{j2\pi}$	$1\angle 360^\circ$

Figura 8.18

Según el teorema del muestreo, si se muestrea con período T, la velocidad angula de muestreo es:

$$\omega_s = \frac{2\omega}{T}$$

Bajo tal condición, la velocidad angular de la señal senoidal de entrada (señal muestreada) tiene la siguiente restricción por el teorema de muestreo: $2\omega_1 \le \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega_1 \le \frac{\pi}{T}$. Este es el valor máximo de velocidad angular (frecuencia) que puede tener una señal senoidal que se muestra con período T.

8.8.2 INTRODUCCIÓN A FILTROS DISCRETOS.

Un filtro pasa bajas es un dispositivo que permite el paso de señales de tipo senoidal, cuya frecuencia en radianes se encuentra en un rango $0 \leq \omega \leq \omega_1$ y rechaza señales cuya frecuencia cae fuera de ese rango. La característica de ganancia de un filtro paso bajas ideal se muestra en la figura 8.19.

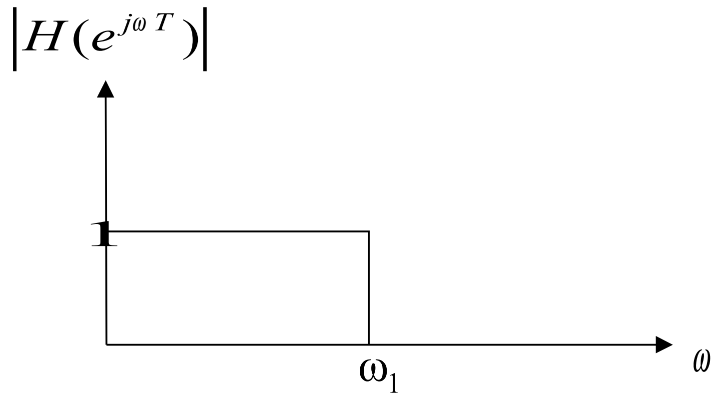


Figura 8.19

2.- Filtro pasa altas:

Un filtro pasa altas es un dispositivo que permite el paso de señales de tipo senoidal cuya frecuencia en radianes se encuentra en el rango: $\omega_2 < \omega < \frac{\pi}{T}$. La característica de ganancia de un filtro paso altas ideal se muestra en la figura 8.20.

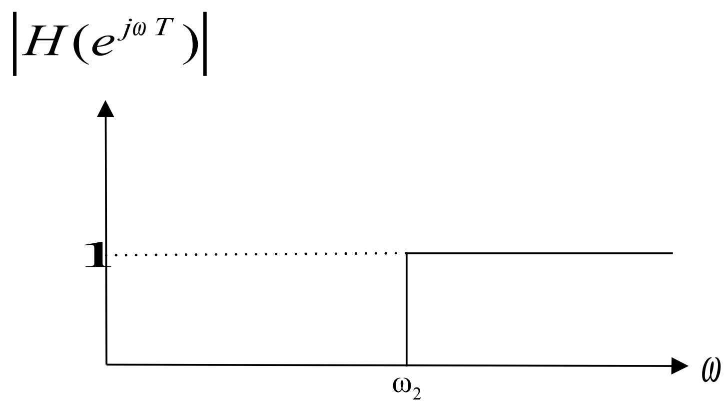


Figura 8.20

3.- Filtro pasa banda:

Un filtro pasa banda es un dispositivo que permite el paso de señales de tipo senoidal cuya frecuencia en radianes se encuentra en el rango: $\omega_1 < \omega < \omega_2$, donde $\omega_2 < \frac{\pi}{T}$. La característica de ganancia de un filtro paso banda ideal se muestra en la figura 8.21.

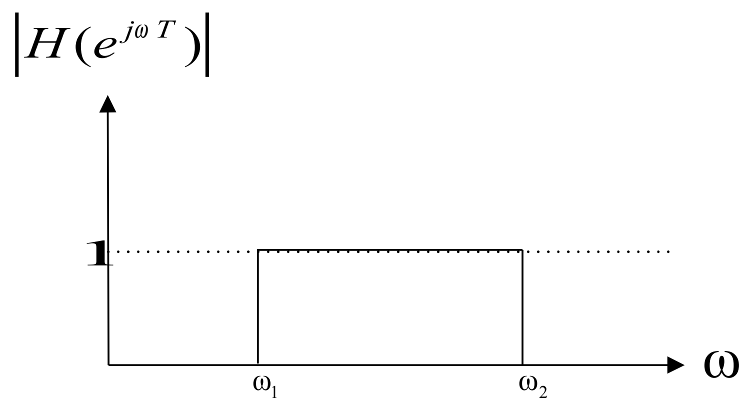


Figura 8.21

Conceptos básicos de la teoría de filtros paso bajas.

El objetivo es establecer la ecuación en diferencias que determine el tipo de comportamiento de un filtro paso bajas. Inicialmente se puede proponer un prototipo muy simple de filtro pasa bajas. Por ejemplo, el sistema caracterizado por la ecuación en diferencias y función de transferencia que se indican a continuación.

$$y(k) = \beta\, u(k) + \alpha\, y(k-1)$$

para que la magnitud sea unitaria: $\beta = 1 - \alpha$

Así pues, la función de transferencia resulta: $H(z) = \dfrac{(1-\alpha)z}{z-\alpha}$

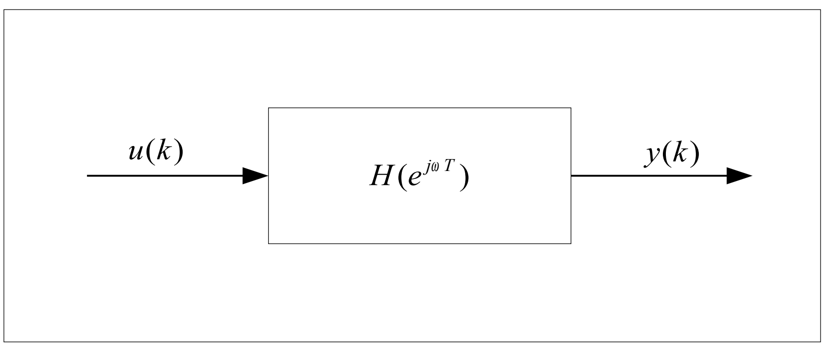


Figura 8.22

Sustituyendo z por e^{jwT}, se desarrolla lo siguiente:

$$u(k) = sen(k\omega T)$$
$$y(k) = \left|H(e^{jwT})\right| sen(k\omega T + \theta)$$
$$\theta = \angle H(e^{jwT})$$

Para el sistema propuesto, la función de respuesta en frecuencia tiene la siguiente expresión:

$$H(e^{j\omega T}) = \frac{(1-\alpha)e^{j\omega T}}{e^{j\omega T} - \alpha} = \frac{(1-\alpha)(\cos\omega T + jsen\omega T)}{(\cos\omega T - \alpha) + jsen\omega T} \qquad (8.36)$$

De donde resultan las expresiones para los factores de ganancia y fase según se indica.

$$\left|H(e^{j\omega T})\right| = \frac{(1-\alpha)}{\sqrt{\cos^2\omega T - 2\alpha\cos\omega T + \alpha^2 + sen^2\omega T}}$$

$$= \frac{(1-\alpha)}{\sqrt{\alpha^2 + 1 - 2\alpha\cos\omega T}} \qquad (8.37)$$

$$\theta = \omega T - \tan^{-1}\frac{sen\omega T}{(\cos\omega T - \alpha)}$$

Las ecuaciones 8.37 definen matemáticamente la respuesta en frecuencia del filtro; la figura 8.23 muestra el diagrama del factor de ganancia contra la frecuencia para distintos valores del parámetro α.

El ancho de banda w_c de un filtro pasa bajas se define como el rango de valores de frecuencia dentro del cual se cumple que:

$$\left|H(e^{j\omega T})\right| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (8.38)$$

O bien, si el filtro no esta normalizado:

$$\left|H(e^{jwT})\right| \geq \frac{Max}{\sqrt{2}} \qquad (8.39)$$

Donde Max es el máximo valor que asume la función de magnitud. Para este tipo de filtros se establece la relación de α con ω_c de la siguiente forma:

$$\left|H(e^{j\omega})\right|_{\omega=\omega_c} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{(1-\alpha)}{\sqrt{1+\alpha^2-2\alpha\cos\omega_c T}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

De donde se despeja la relación buscada, cuidando además que $\alpha < 1$ (sistema estable).

$$\alpha = 2-\cos\omega_c T-\sqrt{(3-\cos\omega_c T)(1-\cos\omega_c T)} \qquad (8.40)$$

La ecuación (8.40) muestra que para una aplicación específica, con T definido, debe establecerse el valor de ancho de banda w_c y a partir de este valor se debe seleccionar el valor de α requerido.