

## EJEMPLO DE SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN CON POLOS COMPLEJOS CONJUGADOS

Se tiene un sistema discreto con **Función de transferencia**

$$H(z) = \frac{z^2 - 0.7058z}{z^2 - 1.4116z + 0.6065} = \frac{z^2 - \rho \cos \theta z}{z^2 - 2\rho \cos \theta z + \rho^2} = \frac{z(z - \rho \cos \theta)}{(z - \rho e^{j\theta})(z - \rho e^{-j\theta})} \quad (1)$$

a) Obtener el diagrama de polos y ceros en el plano z

En la función de transferencia se tienen los siguientes factores:

$$H(z) = \frac{z(z - 0.7058)}{(z - 0.7788e^{j0.45})(z - 0.7788e^{-j0.45})} \quad (2)$$

De donde se obtienen las raíces en el plano z.

Ceros:  $z_1 = 0$  ,  $z_2 = \rho \cos \theta = 0.7058$  ,

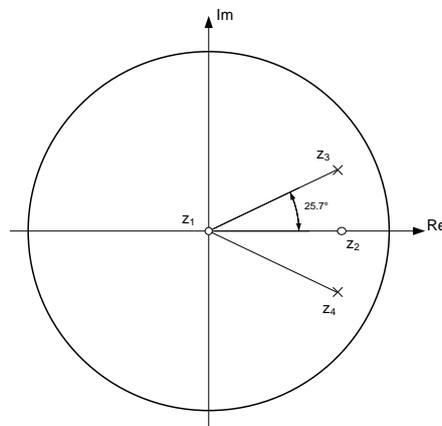
Polos:  $z_{3,4} = \rho e^{\pm j\theta} = 0.7788e^{\pm j0.45}$

$\theta = 0.45 = 25.78^\circ$

$\cos \theta = 0.9063$ ,

(3)

El diagrama de polos y ceros en el plano z se muestra a continuación



### Respuesta a Impulso del sistema de segundo orden

La respuesta a impulso se obtiene considerando el par de transformación (4) y los valores indicados en (3).

$$\frac{z(z - \rho \cos \theta)}{(z - \rho e^{j\theta})(z - \rho e^{-j\theta})} \leftrightarrow \rho^k \cos(\theta k) u_{-1}(k) \quad (4)$$

$$h(k) = \rho^k \cos(\theta k) u_{-1}(k)$$

$$h(k) = (0.778)^k \cos(0.45k) u_{-1}(k)$$

(5)

## Respuesta a escalón unitario del sistema de segundo orden

La respuesta al escalón se obtiene con base en la expansión en fracciones parciales que se muestra a continuación.

$$Y(z) = \frac{z(z-0.7058)}{(z-0.7788e^{j0.45})(z-0.7788e^{-j0.45})} R(z); \quad R(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$Y(z) = \frac{z^2(z-0.7058)}{(z-1)(z-0.7788e^{j0.45})(z-0.7788e^{-j0.45})} = d_0 + \frac{d_1 z}{z-1} + \frac{d_2 z}{z-0.7788e^{j0.45}} + \frac{d_3 z}{z-0.7788e^{-j0.45}}$$

Empleando el comando “residuez” de Matlab se obtienen los coeficientes:

$$d_0 = 0 \quad d_1 = 1.5095 \quad d_2 = 0.882e^{-j1.863} \quad d_2^* = 0.882e^{j1.863} \quad (1.863 \text{ rad} = 106^\circ)$$

Entonces la expansión en fracciones parciales resulta

$$Y(z) = \frac{1.5095z}{z-1} + \frac{0.882e^{-j1.863}z}{z-0.7788e^{j0.45}} + \frac{0.882e^{j1.863}z}{z-0.7788e^{-j0.45}} \quad (6)$$

Antitransformando de tablas, factorizando y agrupando términos semejantes se tiene

$$y(k) = \left[ 1.5095 + 0.882e^{-j1.863} (0.7788e^{j0.45})^k + 0.882e^{j1.863} (0.7788e^{-j0.45})^k \right] u_{-1}(k)$$

$$y(k) = \left[ 1.5095 + 0.882(0.7788)^k \left( e^{j(0.45k-1.863)} + e^{-j(0.45k-1.863)} \right) \right] u_{-1}(k) \quad (7)$$

Por la identidad de Euler, la suma de exponenciales complejas se simplifica en coseno.

$$y(k) = \left[ 1.5095 + 0.882(0.7788)^k \left( 2 \cos(0.45k - 1.863) \right) \right] u_{-1}(k)$$

El resultado muestra una constante sumándose a una función de tipo senoidal multiplicada por una exponencial decreciente

$$y(k) = 1.5095 \left[ 1 + 1.169(0.7788)^k \cos(0.45k - 1.863) \right] u_{-1}(k) \quad (8)$$

Recordando que  $\text{sen}\theta = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$

$$y(k) = 1.5095 \left[ 1 + 1.169(0.7788)^k \text{sen}(0.45k - 0.292) \right] u_{-1}(k) \quad (9)$$

(0.292 rad = 16.7°)

