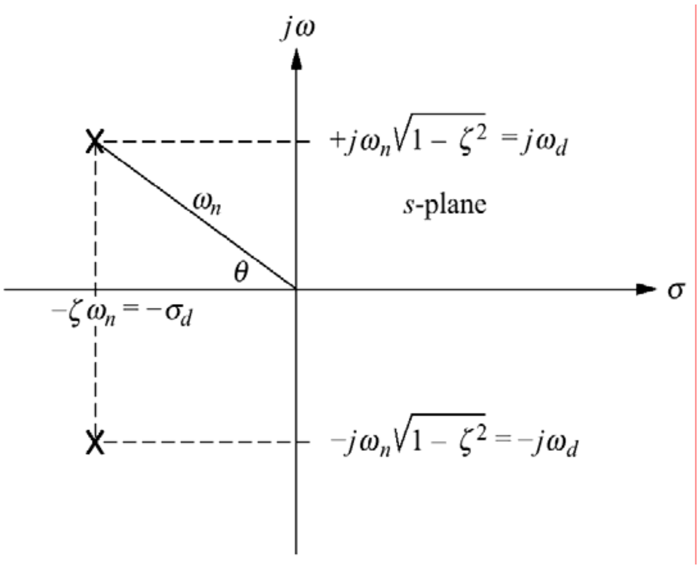
SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN CON POLOS COMPLEJOS CONJUGADOS

Función de transferencia normalizada

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{\left(s+\zeta\omega_n\right)^2 + \left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right)^2}$$

$$H\left(s\right) = \frac{\omega_n^2}{\left(s+\zeta\omega_n\right)^2 + \omega_d^2}$$

Diagrama de polos y ceros



Respuesta a Impulso y respuesta a escalón del sistema de segundo orden subamortiguado

La respuesta a impulso se obtiene considerando lo siguiente:

$$H\left(s\right) = \frac{\omega_n^2}{\left(s+\zeta\omega_n\right)^2 + \omega_d^2} = \frac{\omega_d}{\left(1-\zeta^2\right)} \frac{\omega_d}{\left(s+\zeta\omega_n\right)^2 + \omega_d^2}$$

$$H\left(s\right) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{\omega_d}{\left(s+\zeta\omega_n\right)^2 + \omega_d^2}$$

Empleando tablas de transformadas comunes se obtiene

$$h(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} sen\left(\omega_d t\right) u_{-1}(t)$$

La respuesta al escalón se obtiene con base en la expansión en fracciones parciales que se muestra.

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s\left(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2\right)} = \frac{\omega_n^2}{s\left[\left(s+\zeta\omega_n\right)^2 + \omega_d^2\right]}$$

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

De donde se obtienen los coeficientes de la expansión

$$\omega_n^2 = A\left[s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2\right] + \left(Bs + C\right)s$$

$$A = 1$$

$$(A + B) = 0 \Rightarrow B = -1$$

$$(2\zeta\omega_n A + C) = 0 \Rightarrow C = -2\zeta\omega_n$$

Entonces

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{\left(s+\zeta\omega_n\right)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta\omega_n}{\left(s+\zeta\omega_n\right)^2 + \omega_d^2}$$

Empleando tablas de transformadas comunes se obtiene

$$y(t) = \left[1 - e^{-\zeta\omega_n t}\cos\left(\omega_d t\right) - \frac{\zeta\omega_n}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} sen\left(\omega_d t\right)\right] u_{-1}(t)$$

Tomando la identidad trigonométrica del seno de la suma de dos ángulos y las funciones trigonométricas del ángulo θ mostrado en el diagrama de polos y ceros

$$sen\left(\alpha \pm \theta\right) = sen(\alpha)\cos(\theta) \pm \cos(\alpha) sen(\theta)$$

$$sen(\theta) = \frac{\omega_d}{\omega_n} = \sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\cos(\theta) = \frac{\zeta\omega_n}{\omega_n} = \zeta$$

$$\tan(\theta) = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

Entonces la respuesta a escalón se expresa

$$y(t)=\left[1-e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\left(\omega_d t\right)+\frac{\zeta\omega_n}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}sen\left(\omega_d t\right)\right)\right]u_{-1}(t)$$

$$y(t)=\left[1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\left(\sqrt{1-\zeta^2}\cos\left(\omega_d t\right)+\zeta\, sen\left(\omega_d t\right)\right)\right]u_{-1}(t)$$

$$y(t)=\left[1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}sen\left(\omega_d t+\theta\right)\right]u_{-1}(t)$$

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$$