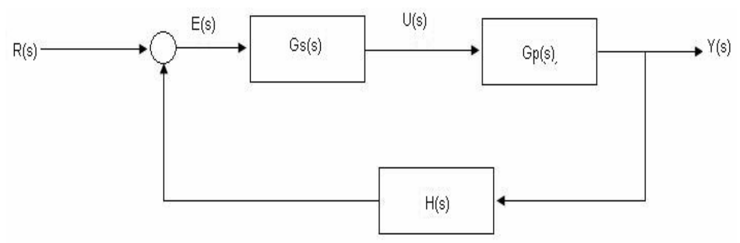
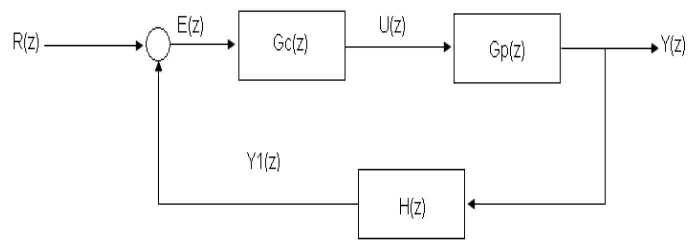
ANÁLISIS DE ERROR DE ESTADO ESTABLE

El error estacionario es una medida de la exactitud de un sistema de control. Se analiza el error estacionario debido a entradas escalón, rampa y parábola.

	CONTROL ANALÓGICO	CONTROL DIGITAL
Esquema		
Error	$E(s)=\frac{1}{1+Gc(s)Gp(s)H(s)}R(s)$ $\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1}{1\ +\ G_C(s)G_P(s)H(s)}=\frac{1}{1\ +G(s)H(s)}$	$E(z)=\frac{1}{1+Gc(z)Gp(z)H(z)}R(z)$ $\frac{E(z)}{R(z)}=\frac{1}{1\ +\ G_C(z)G_P(z)H(z)}=\frac{1}{1+G(z)H(z)}$
Función de transferencia de malla	Función de Transferencia de Malla de la forma: $G(s)H(s)=\frac{K(s+c_1)(s+c_2)....(s+c_n)}{(s+p_1)(s+p_2)....(s+p_n)}=\frac{K\ \prod_{j=1}^{m}\left(s+c_j\right)}{\prod_{i=1}^{n}\left(s+p_i\right)}$	Función de Transferencia de Malla de la forma: $G(z)H(z)=\frac{K\ \prod_{j=1}^{m}\left(z-c_j\right)}{\prod_{i=1}^{n}\left(z-p_i\right)}$
Polos de la función de transferencia de malla en el “origen”	Polos de valor 0 $G(s)H(s)=\frac{K(s+c_1)(s+c_2)....(s+c_n)}{s^N(s+p_1)(s+p_2)....(s+p_{n-N})}=\frac{K\ \prod_{j=1}^{m}\left(s+c_j\right)}{s^N\ \prod_{i=1}^{n-N}\left(s+p_i\right)}$	Polos de valor 1 $G(z)H(z)=\frac{K\ \prod_{j=1}^{m}\left(z-c_j\right)}{\left(z-1\right)^N\ \prod_{i=1}^{n-N}\left(z-p_i\right)}$

Clasificación de sistemas según su número de polos en el 'origen"	<table><tr><th>Tipo de sistema</th><th>N polos en el "origen"</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td></tr></table>	
Análisis del error de posición **El error de posición** se determina cuando **la referencia es un escalón unitario**		
Error cuando la referencia es un escalón	$E(s)=\dfrac{1}{1+G(s)H(s)}\cdot\dfrac{1}{s}$	$E(z)=\dfrac{1}{1+G(z)H(z)}\cdot\dfrac{z}{(z-1)}$
Aplicando el teorema del valor final se obtiene el error de estado estable	$e(t)_{t\to\infty}=\lim_{s\to 0} sE(s)$ $e_{ss}=\lim\limits_{s\to 0} s\dfrac{1}{1+\mathrm{G(s)H(s)}}\dfrac{1}{s}=\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{1}{1+\mathrm{G(s)H(s)}}$ $e_{ss}=\dfrac{1}{1+K_P}$ donde $K_p=\lim\limits_{s\to 0} G(s)H(s)$ *Kp* es la constante de error de posición	$e(k)_{k\to\infty}=\lim_{z\to 1}\dfrac{(z-1)}{z}E(z)$ $e_{ss}=\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{(z-1)}{z}\dfrac{1}{1+G(z)H(z)}\dfrac{z}{(z-1)}=\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{1}{1+G(z)H(z)}$ $e_{ss}=\dfrac{1}{1+K_P}$ donde $K_P=\lim\limits_{z\to 1} G(z)H(z)$ *Kp* es la constante de error de posición
	Dado que $G(s)H(s)=\dfrac{K\prod_{j=1}^{m}(s+\mathrm{c_j})}{s^N\prod_{i=1}^{n-N}(\mathrm{s}+\mathrm{p_i})}$ los valores de *Kp* y el errror de estado estable dependen del número *N* de polos en el origen.	Dado que $G(z)H(z)=\dfrac{K\prod_{j=1}^{\mathrm{m}}(z-\mathrm{c_j})}{(\mathrm{z}-1)^N\prod_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n-N}}(z-\mathrm{p_i})}$ se tiene que los valores de *Kp* y el errror de estado estable dependen del número *N* de polos en (1,0).
N = 0	$K_P=G(0)H(0)=\dfrac{K\prod_{j=1}^{\mathrm{m}}(\mathrm{c_j})}{\prod_{i=1}^{n}(\mathrm{p_i})}$ y $e_{ss}=\dfrac{1}{1+K_P}$	$K_P=G(1)H(1)=\dfrac{K\prod_{j=1}^{\mathrm{m}}(1-\mathrm{c_j})}{\prod_{i=1}^{n}(1-\mathrm{p_i})}$ y $e_{ss}=\dfrac{1}{1+K_P}$

	K_p y e_{ss} **son valores reales distintos de cero y finitos** **¡ EL ERROR NO ES NULO! Si Kp aumenta, el error disminuye**	K_p y e_{ss} **son valores reales distintos de cero y finitos** **¡ EL ERROR NO ES NULO! Si Kp aumenta, el error disminuye**
N = 1	$K_P = \lim_{s\to 0} \dfrac{K \prod_{j=1}^{m} (c_j)}{s \prod_{i=1}^{n-1} (p_i)} \to \infty \quad \text{y} \quad e_{ss} = 0$ e_{ss} **= *0* si la función de transferencia de malla tiene un polo en el origen**	$K_P = \lim_{z\to 1} \dfrac{K \prod_{j=1}^{m} (1 - c_j)}{(z-1) \prod_{i=1}^{n-1} (1 - p_i)} \to \infty \quad \text{y} \quad e_{ss} = 0$ e_{ss} **= *0* si la función de transferencia de malla tiene un polo en *(1,0)***
$N \geq 2$	$K_P = \lim_{s\to 0} \dfrac{K \prod_{j=1}^{m} (c_j)}{s^N \prod_{i=1}^{n-N} (p_i)} \to \infty \quad \text{y} \quad e_{ss} = 0$ e_{ss} **= *0* para entada escalón si la función de transferencia de malla tiene mas de un polo en el origen**	$K_P = \lim_{z\to 1} \dfrac{K \prod_{j=1}^{m} (1 - c_j)}{(z-1)^N \prod_{i=1}^{n-N} (1 - p_i)} \to \infty \quad \text{y} \quad e_{ss} = 0$ e_{ss} **= *0* para entada escalón si la función de transferencia de malla tiene mas de un polo en *(1,0)***
	Análisis del error de velocidad **El error de velocidad** se determina cuando **la referencia es una rampa unitaria**	
Error cuando la referencia es un escalón	$E(s) = \dfrac{1}{1+G(s)H(s)} \cdot \dfrac{1}{s^2}$	$E(z) = \dfrac{1}{1+G(z)H(z)} \cdot \dfrac{Tz}{(z-1)^2}$
Aplicando el teorema del valor final se obtiene el error de estado estable	$e_{ss} = \lim_{s\to 0} s \dfrac{1}{1+G(s)H(s)} \dfrac{1}{s^2} = \lim_{s\to 0} \dfrac{1}{s+sG(s)H(s)}$ $e_{ss} = \lim_{s\to 0} \dfrac{1}{sG(s)H(s)}$ $e_{ss} = \dfrac{1}{K_v} \quad \text{donde} \quad K_v = \lim_{s\to 0} sG(s)H(s)$ *Kv* es la constante de error de velocidad y depende de la función de transferencia de malla y su número *N* de polos en	$e_{ss} = \lim_{z\to 1} \dfrac{(z-1)}{z} \dfrac{1}{1+G(z)H(z)} \dfrac{Tz}{(z-1)^2} = \lim_{z\to 1} \dfrac{T}{(z-1)+(z-1)G(z)H(z)}$ $e_{ss} = \lim_{z\to 1} \dfrac{T}{(z-1)G(z)H(z)}$ $e_{ss} = \dfrac{1}{K_v} \quad \text{donde} \quad K_v = \lim_{z\to 1} \dfrac{(z-1)G(z)H(z)}{T}$ *Kv* es la constante de error de velocidad y depende de la función de transferencia de malla y su número *N* de polos en *(1,0)*.

	el origen.	
	Considerando $$G(s)H(s)=\frac{K\prod_{j=1}^{m}\left(s+\mathrm{c_j}\right)}{s^N\prod_{i=1}^{n-N}\left(\mathrm{s+p_i}\right)}$$	Considerando $$G(z)H(z)=\frac{K\prod_{j=1}^{\mathrm{m}}\left(z-\mathrm{c_j}\right)}{\left(\mathrm{z-1}\right)^N\prod_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n-N}}\left(z-\mathrm{p_i}\right)}$$
N = 0	$$K_v=\lim_{s\to 0}s\frac{K\prod_{j=1}^{m}\left(s+\mathrm{c_j}\right)}{\prod_{i=1}^{n-N}\left(\mathrm{s+p_i}\right)}=0 \quad \text{y} \quad e_{ss}\to\infty$$	$$K_v=\lim_{z\to 1}\left(z-1\right)\frac{K\prod_{j=1}^{\mathrm{m}}\left(1-c_j\right)}{T\prod_{i=1}^{n}\left(1-p_i\right)}=0 \quad \text{y} \quad e_{ss}\to\infty$$
N = 1	$$K_v=\lim_{s\to 0}s\frac{K\prod_{j=1}^{\mathrm{m}}\left(s+c_j\right)}{s\prod_{i=1}^{n-1}\left(s+p_i\right)}=\frac{K\prod_{j=1}^{\mathrm{m}}\left(c_j\right)}{\prod_{i=1}^{n-1}\left(p_i\right)} \quad \text{y} \quad e_{ss}=\frac{1}{K_v}$$ **K_v y e_{ss} son valores reales distintos de cero y finitos**	$$K_v=\lim_{z\to 1}\left(z-1\right)\frac{K\prod_{j=1}^{m}\left(z-c_j\right)}{T\left(z-1\right)\prod_{i=1}^{n-1}\left(z-p_i\right)}=\frac{K\prod_{j=1}^{m}\left(1-c_j\right)}{T\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-p_i\right)} \quad \text{y} \quad e_{ss}=\frac{1}{K_v}$$ **K_v y e_{ss} son valores reales distintos de cero y finitos**
$N\geq 2$	$$K_v=\lim_{s\to 0}s\frac{K\prod_{j=1}^{\mathrm{m}}\left(c_j\right)}{s^N\prod_{i=1}^{n-N}\left(p_i\right)}\to\infty \quad \text{y} \quad e_{ss}=0$$ **e_{ss} = *0* para entada rampa si la función de transferencia de malla tiene mas de un polo en el origen**	$$K_v=\lim_{z\to 1}\left(z-1\right)\frac{K\prod_{j=1}^{\mathrm{m}}\left(z-c_j\right)}{T\left(z-1\right)^N\prod_{i=1}^{n-N}\left(z-p_i\right)}\to\infty \quad \text{y} \quad e_{ss}=0$$ **e_{ss} = *0* para entada rampa si la función de transferencia de malla tiene mas de un polo en *(1,0)***
Análisis del error de aceleración **El error de aceleración** se determina cuando **la referencia es una parábola unitaria**		
Error cuando la referencia es un escalón	$$E(s)=\frac{1}{1+G(s)H(s)}\cdot\frac{1}{s^3}$$	$$E(z)=\frac{1}{1+G(z)H(z)}\cdot\frac{Tz\left(z+1\right)}{2\left(z-1\right)^3}$$

El procedimiento es similar al que se empleo para los casos anteriores de error de posición y error de velocidad, con base en lo cual se tiene la siguiente tabla de resumen

Tabla del análisis de error de estado estable para ambos tipos de sistemas de control, analógico y digital.

	Entrada escalón unitario	**Entrada rampa unitaria**	**Entrada parábola**
N=0	$e_{ss} = \frac{1}{1+K_P}$ donde se tiene que calcular K_p **¡EL ERROR NO ES NULO! Si K_p aumenta, el error disminuye.**	$K_v = 0$ y $e_{ss} \to \infty$	$K_a = 0$ y $e_{ss} \to \infty$
N=1	$K_P \to \infty$ y $e_{ss} = 0$	$e_{ss} = \frac{1}{K_v}$ Calcular K_v **¡EL ERROR NO ES NULO! Si K_v aumenta, el error disminuye.**	$K_a = 0$ y $e_{ss} \to \infty$
N=2	$K_P \to \infty$ y $e_{ss} = 0$	$K_v \to \infty$ y $e_{ss} = 0$	$e_{ss} = \frac{1}{K_a}$ Calcular K_a **¡EL ERROR NO ES NULO! Si K_a aumenta, el error disminuye.**
N=3,4 ,..	$K_P \to \infty$ y $e_{ss} = 0$	$K_v \to \infty$ y $e_{ss} = 0$	$e_{ss} = \frac{1}{K_a} = 0$ $K_a \to \infty$ y $e_{ss} = 0$