

Criterios de Estabilidad de Routh y Jury

M.I. Ricardo Garibay Jimenez
2006

Criterio de Routh

Un polinomio $A(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n$

tiene raíces estables (con parte real negativa) si se cumplen 2 condiciones.

Necesidad $\exists$ todos los coeficientes y son positivos

Suficiencia El signo de los coeficientes de la primera columna del arreglo de Routh sea positivo.

Para el arreglo de Routh se tiene

s^n	a_0	a_2	$\dots$	$\dots$	a_n
s^{n-1}	a_1	a_3	$\dots$	$\dots$	
s^{n-2}	b_0	b_1	$\dots$	b_{P-1}	
$\vdots$	c_0	c_1	$\dots$	c_{P-1}	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
s_0	b				

donde $b_0 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$ $b_1 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$

$$c_0 = \frac{b_0 a_3 - b_1 a_1}{b_0}$$

En la tabla completa se observa el número de raíces inestables como el cambio de signos que presenta la primera columna del arreglo.

Ejemplo 1

Determinar si el polinomio $A(s) = s^3 + 3s^2 + 3s + 1$ tiene raíces inestables

s^3	1	3
s^2	3	1
s	$\frac{8}{3}$	0
s_0	1	

Al no tener cambios de signo en la primera columna se concluye que no tiene raíces inestables y por lo tanto el sistema es estable.

Ejemplo 2

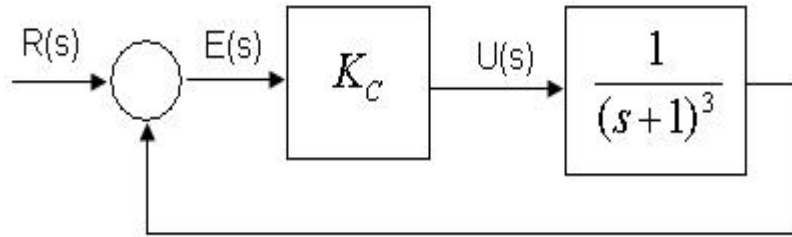
Determinar si el polinomio $A(s) = s^3 - s^2 + s + 1$ tiene raíces inestables

s^3	1	1
s^2	-1	1
s	2	0
s^0	1	

Tiene raíces inestables, aunque esto puede ser apreciado fácilmente ya que uno de los coeficientes del polinomio es negativo.

El arreglo de Routh nos permite ver dos cambios de signo en la primera columna lo que significa dos raíces inestables.

Aplicación de Control



Función de transferencia de malla

$$\frac{K_c}{(s+1)^3}$$

Función de transferencia de malla cerrada

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K_c}{(s+1)^3}}{1 + \frac{K_c}{(s+1)^3}} = \frac{K_c}{s^3 + 3s^2 + 3s + (1 + K_c)}$$

El intervalo de valores $K_c > 0$ en el que los polos de malla cerrada son estables.

Criterio de Routh de Malla cerrada

$$A(s) = s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + K_c$$

s^3	1	3	
s^2	3	$1 + K_c$	
s	$\frac{8 - K_c}{3}$	0	$\Rightarrow \frac{8 - K_c}{3} > 0, K_c < 8$
s_0	$1 + K_c$		$\Rightarrow 1 + K_c > 0, K_c > -1$

Finalmente $-1 < K_c < 8$

$$0 < K_c < 8$$

Por Matlab se comprueba:

Con $K_C = 8$ queda $A(s) = s^3 + 3s^2 + 3s + 9$

Observar el arreglo de Routh

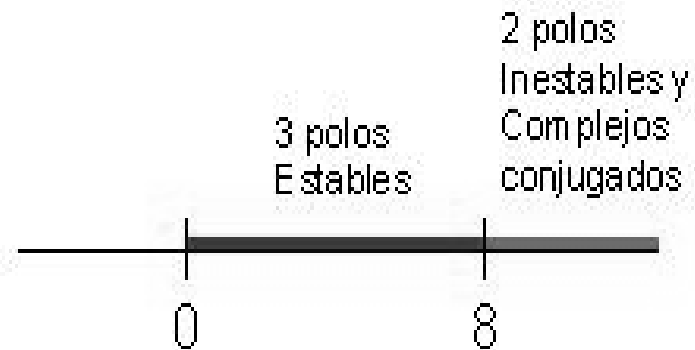
s^3	1	3
s^2	3	9
s	$0 \square \varepsilon$	0
s_0	9	

Cuando un término de la primera columna resulta nulo y se requiere terminar el arreglo de Routh lo que procede es asumir un número positivo muy pequeño para terminar de calcular el arreglo y con esto determinar todos los coeficientes

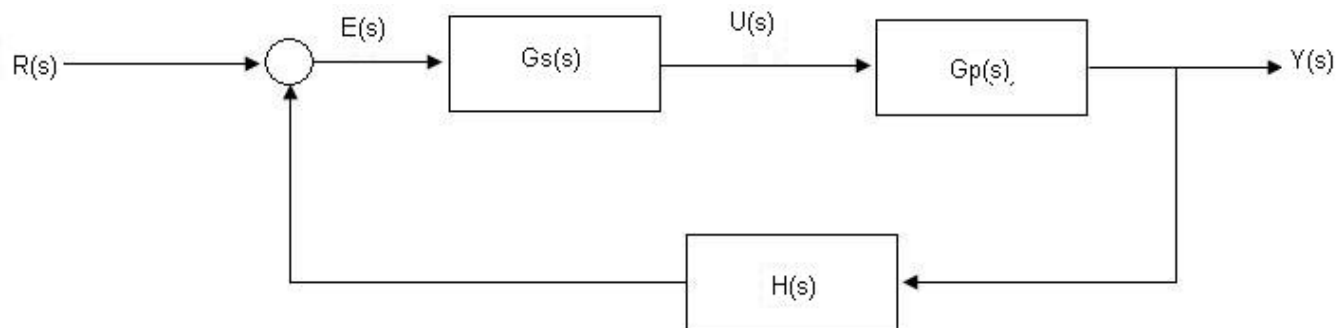
Conclusion

Si $K_C > 8$

se tienen 2 raíces inestables



Estabilidad en Sistemas de Control



La función de transferencia de malla $G_c(s)G_p(s)H(s)$

Y para la función de transferencia de malla cerrada $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)H(s)}$

Si $G_c(s)G_p(s)H(s) = \frac{Kc}{(s+1)^3} = \frac{K}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}$

La función de transferencia de malla cerrada $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{Kc}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + k_c}$

El intervalo de K_c donde el sistema de control de malla cerrada es estable

s^3	1	3
s^2	3	$(1 + k_c)$
s	$\left(\frac{8 - k_c}{3}\right)$	0
s_0	$(1 + k_c)$	

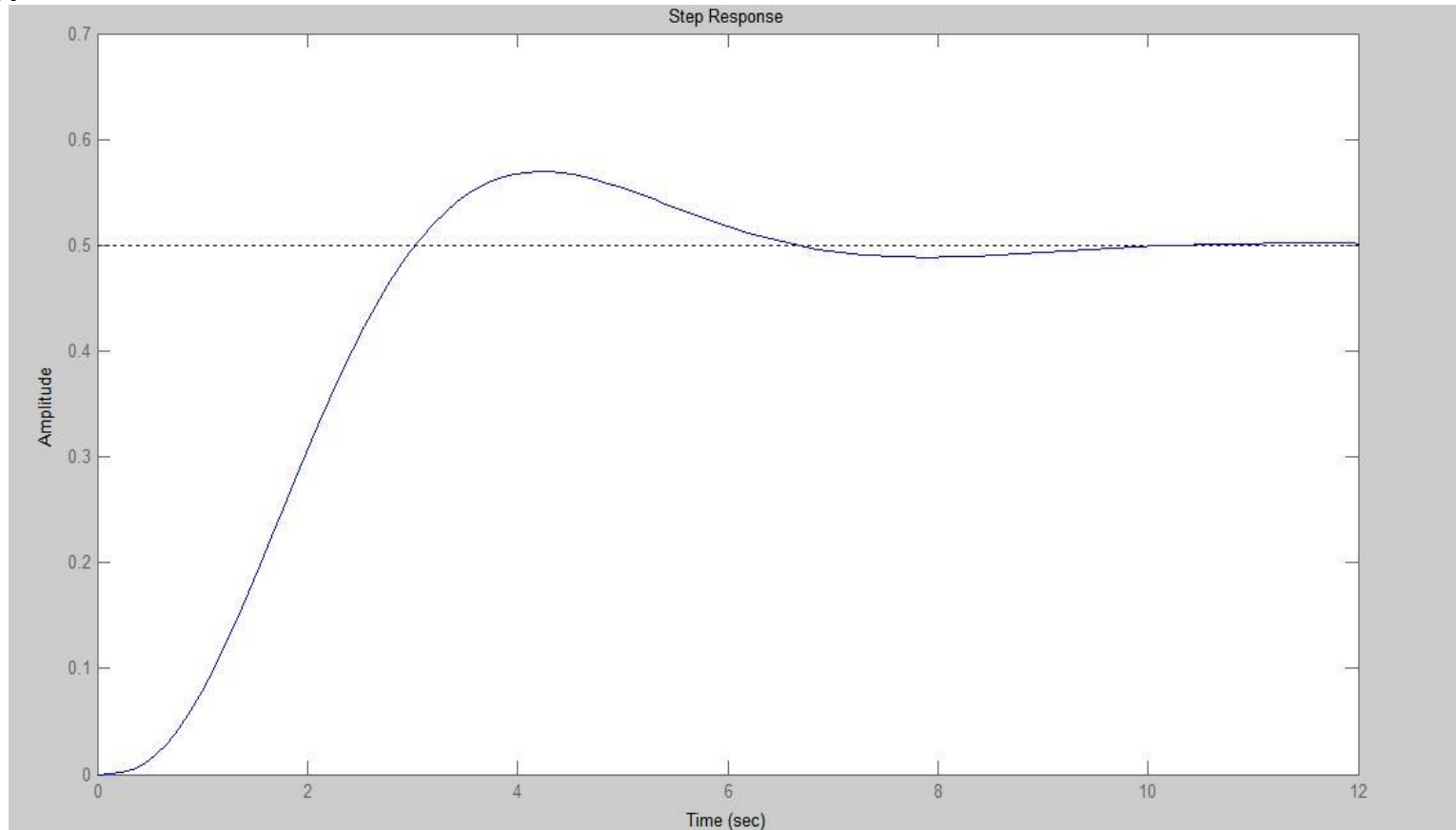
El intervalo de K_c donde los polos de malla cerrada son estables, es decir se encuentran en el lado izquierdo del plano de Laplace

$$-1 < K_c < 8$$

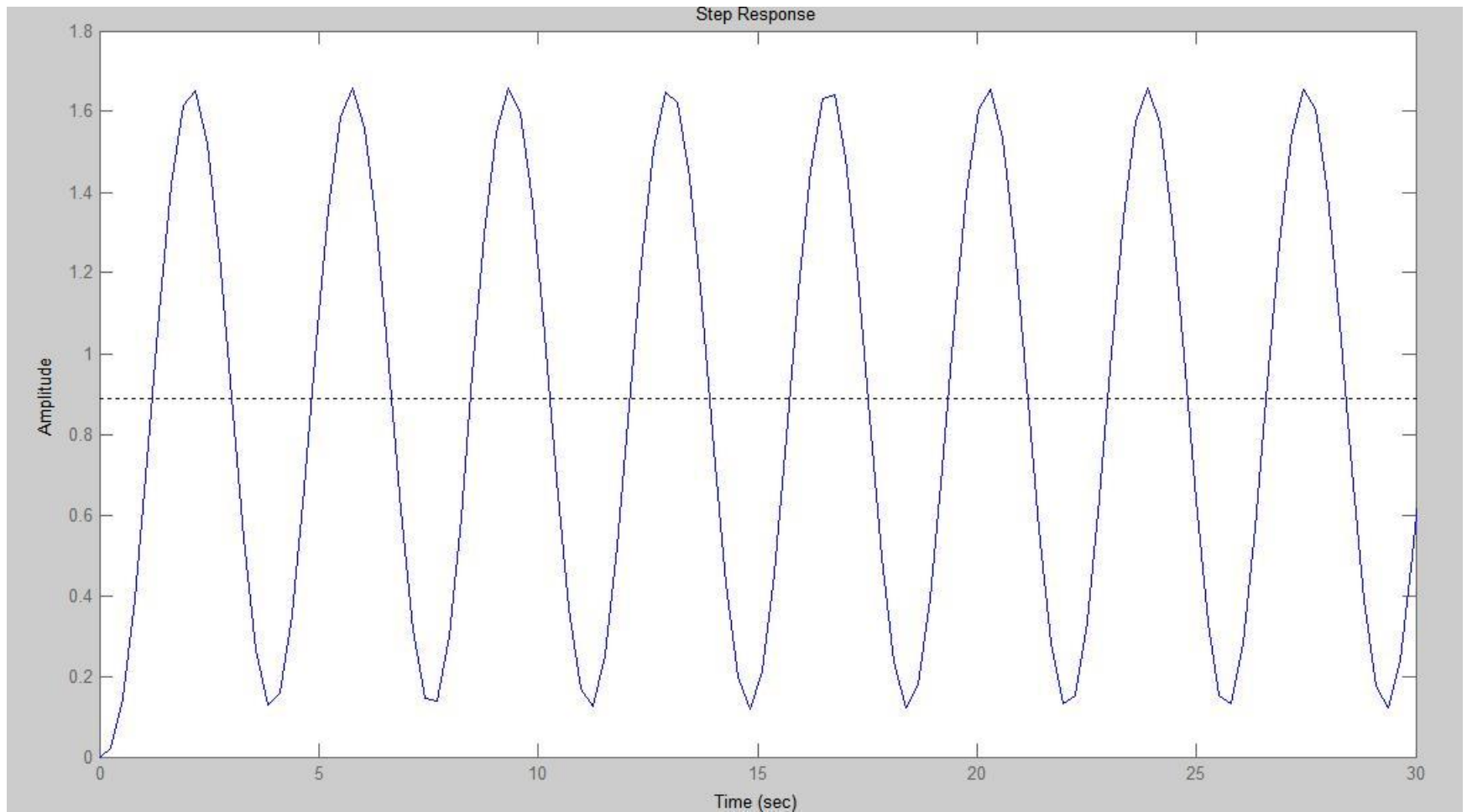
Comprobando con Matlab

Entrada escalon
unitario

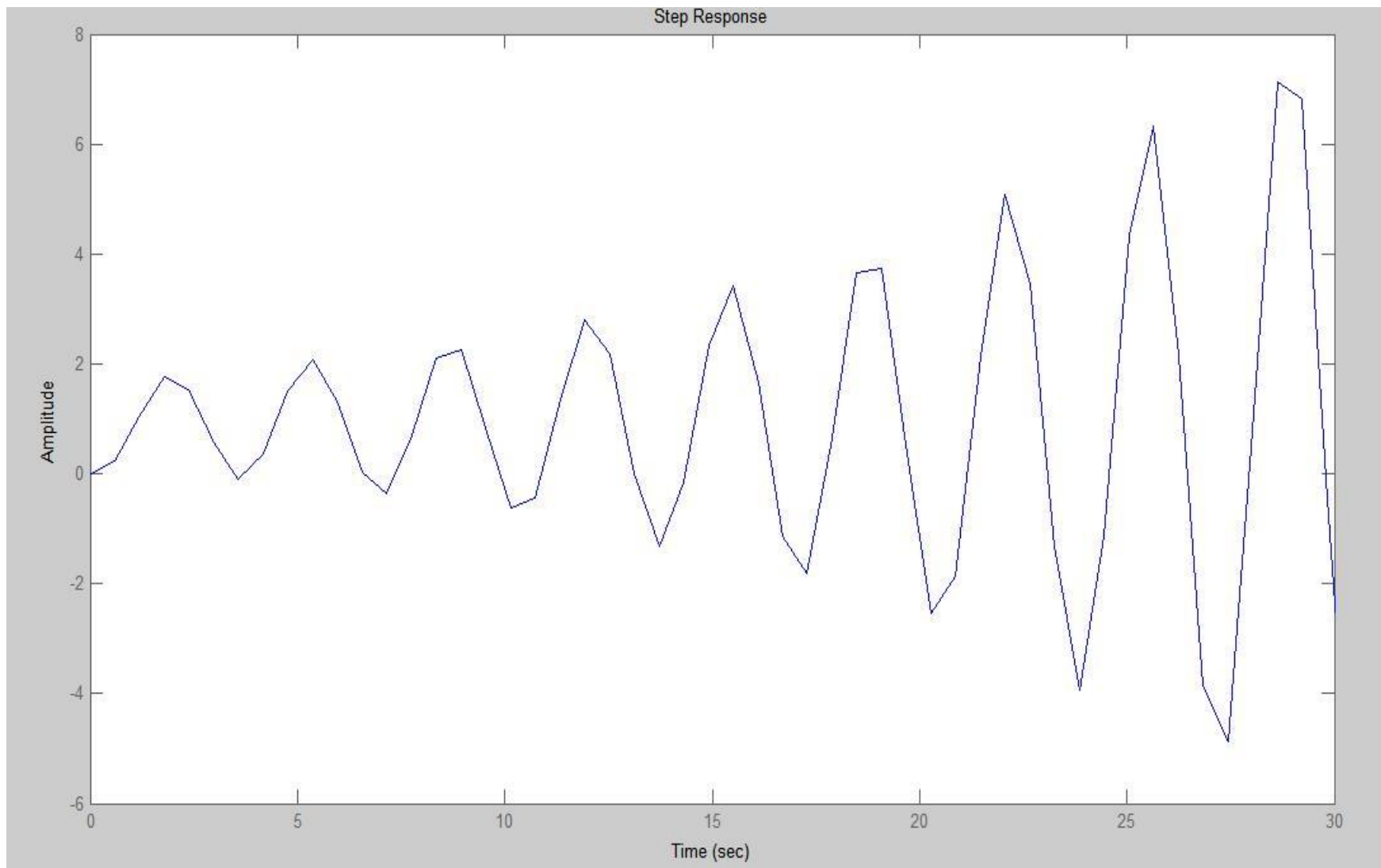
$$K_c = 1$$



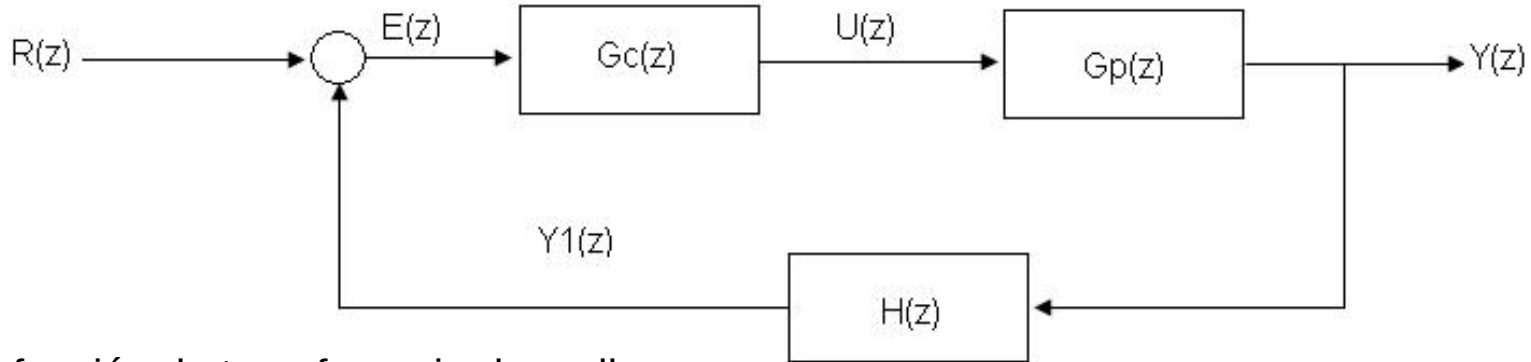
Con $K_c = 8$



$$K_c = 10$$



Criterio de Jury



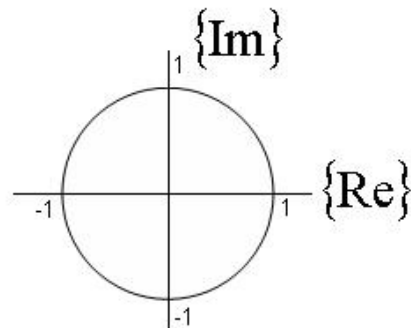
La función de transferencia de malla

$$G_c(z)G_p(z)H(z)$$

La función de transferencia de malla cerrada

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G_c(z)G_p(z)}{1 + G_c(z)G_p(z)H(z)}$$

En el plano Z los polos estables se encuentran en el interior de la circunferencia unitaria centrada en el origen.



Criterio de Estabilidad de Jury para un polinomio

$$A(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

El criterio define el numero de raíces de $A(z)$ que se ubica dentro del circulo unitario del plano Z . Se requiere que el coeficiente a_0 positivo

Condiciones

$$a_0 > 0$$

$$A(z)|_{z=1} > 0$$

El arreglo de coeficientes es el siguiente:

R_1	a_0	a_1	a_2	a_3	$\dots$	$\dots$	a_n
R_2	b_0	b_1	b_2	$\dots$	$\dots$	b_{n-1}	0
R_3	c_0	c_1	c_2	$\dots$	c_{n-2}	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				

Donde

$$b_i = a_i - a_{n-i} \alpha_1$$

$$b_0 = a_0 - a_n \alpha_1$$

$$b_1 = a_1 - a_{n-1} \alpha_1$$

$$b_n = a_n - a_0 \alpha_1$$

$$c_j = b_j - b_{(n-1)-j} \alpha_2$$

$$c_{n-1} = 0$$

$$\alpha_1 = \frac{a_n}{a_0}$$

$$\alpha_2 = \frac{b_{n-1}}{b_0}$$

Conforme el grado del polinomio es mayor y ante la presencia de un parámetro desconocido como la ganancia del controlador, el cálculo de los renglones se complica y se requiere de un programa de cálculo para poder resolverlo. Algebraicamente es sencillo aplicar el criterio de Jury para polinomios de hasta grado 2, ya que a partir de polinomios de grado 3 los cálculos se complican.

Ejemplo 1

Determine si $A(z)$ que se enuncia tiene raíces fuera del círculo unitario, considerando que el número de raíces fuera del círculo unitario es igual al número de coeficientes calculados en la primera columna que tienen signo negativo.

$$A(z) = z^3 + 0.5z^2 + 0.25z + 0.2$$

R_1	1	0.5	0.25	0.2	$\alpha = 0.2$
R_2	0.96	0.45	0.15		$\alpha = 0.15$
R_3	0.9375	0.3065			$\alpha = 0.38$
R_4	0.7911				

Se concluye que no hay raíces inestables en el polinomio $A(z)$.

El polinomio $A(z)$ no tiene raíces fuera de la circunferencia unitaria.

Ejemplo 2

Para un sistema de control digital de segundo orden realimentado es común que la función de transferencia de malla cerrada tenga un polinomio en el denominador $A(z)$ de acuerdo al enunciado.

Que condiciones debe satisfacer los coeficientes a_1 y a_2 para que el sistema de control sea estable.

$$A(z) = z^2 + a_1 z + a_2$$

$$\begin{array}{l|llll} R_1 & & 1 & a_1 & a_2 & \alpha_1 = a_2 \\ R_2 & & (1 - a_2^2) & a_1(1 - a_2) & & \alpha_2 = \frac{a_1}{1 + a_2} \\ R_3 & \frac{1 - a_2}{1 + a_2} & \left[(1 + a_2)^2 - a_1^2 \right] & & & \end{array}$$

1era condición

$$(1 - a_2^2) > 0$$

$$|a_2| < 1$$

2nda condición

$$\frac{1 - a_2}{1 + a_2} \left[(1 + a_2)^2 - a_1^2 \right] > 0$$

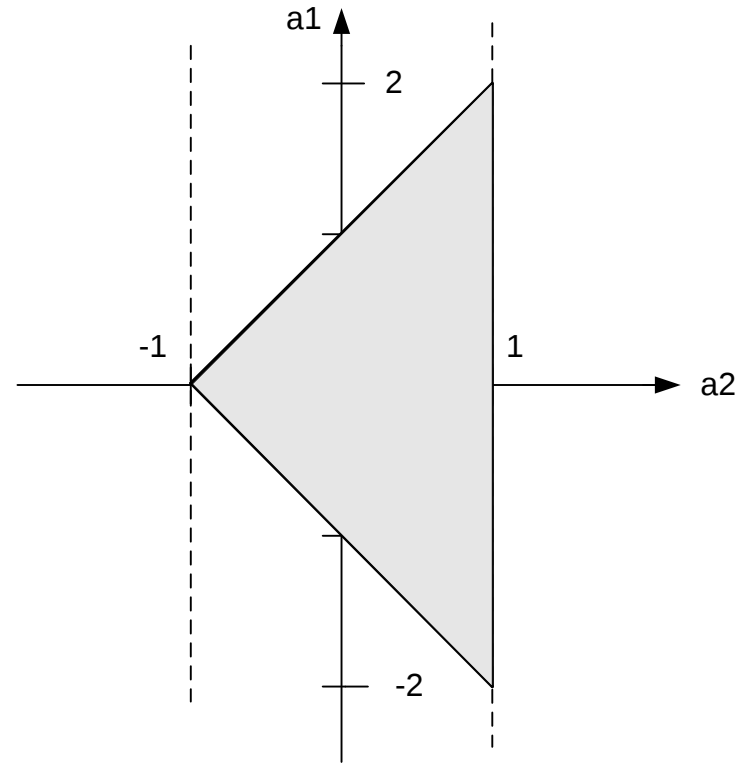
Si se cumple la primera

$$(1 + a_2)^2 > a_1^2$$

$$1 + a_2 > |a_1|$$

$$1 + a_2 > a_1 \quad a_1 > 0$$

$$1 + a_2 > -a_1 \quad a_1 < 0$$



Ejemplo sobre Criterio de Jury en sistemas de control digital.

Un sistema de control digital tiene como función de transferencia de malla

$$G(z)H(z) = \frac{0.06(z - 0.8)}{z^2 - 1.9512z + 0.9512}$$

por lo que la ecuación característica de malla cerrada está dada por

$$1 + KG(z)H(z) = 1 + \frac{0.06K(z - 0.8)}{z^2 - 1.9512z + 0.9512} = 0$$

De la ecuación anterior resulta el polinomio $A(z)$ para la aplicación del criterio de Jury

$$A(z) = z^2 + (0.06K - 1.9512)z + (0.9512 - .048K) = 0$$

En clase se demostró, por el criterio de Jury, que para el polinomio $A(z)=z^2+a_1z+a_2$ las condiciones de estabilidad están restringidas por los parámetros a_1 y a_2 , de la siguiente forma:

$$-1 < a_2 < 1$$

$$1 + a_2 > a_1$$

$$1 + a_2 > -a_1$$

Las condiciones (4) aplicadas a la ecuación (3) determinan el intervalo de estabilidad para el sistema de control de malla cerrada:

$$K \in (-1.016, 40.65) \cap (0, 36.15)$$

$$K \in (0, 36.15)$$