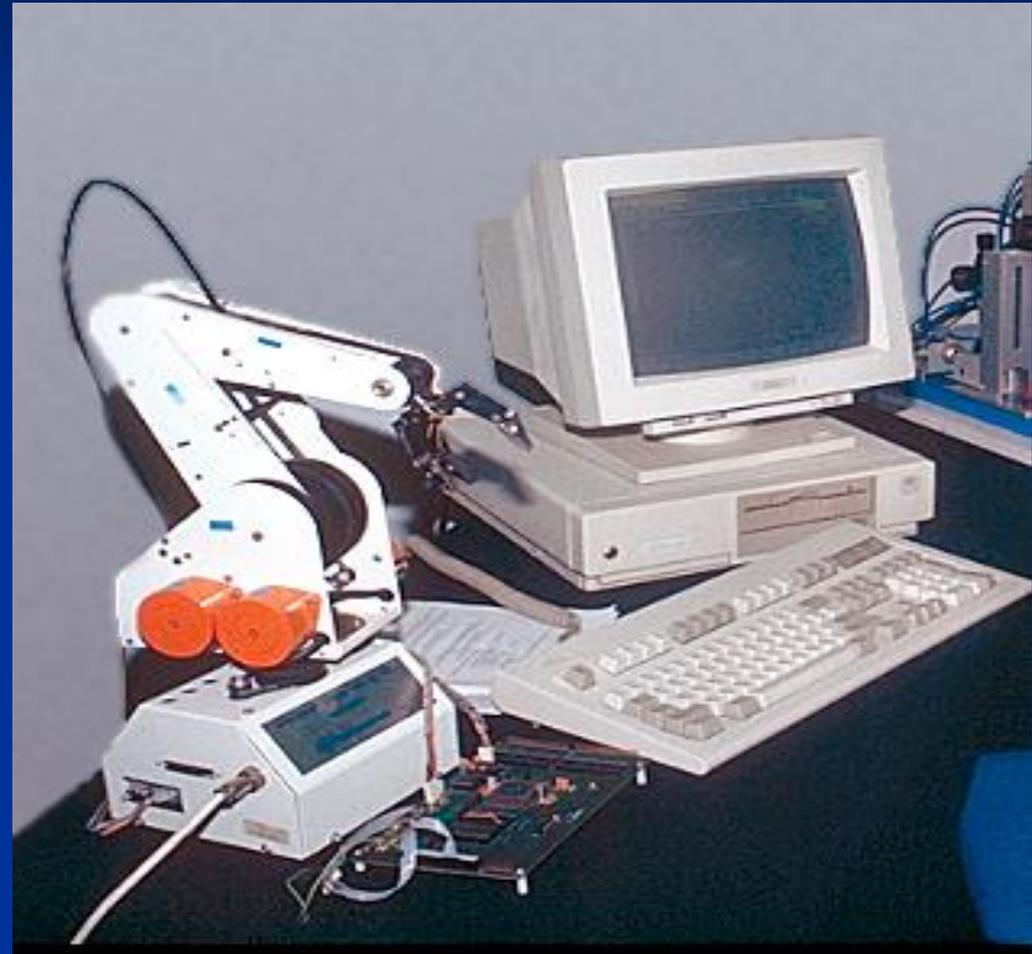




Sistemas de Control



Equivalentes
discretos y mapeo
de características
dinámicas



M. I. Ricardo Garibay
Jiménez

rgaribay@conviden.unam.mx



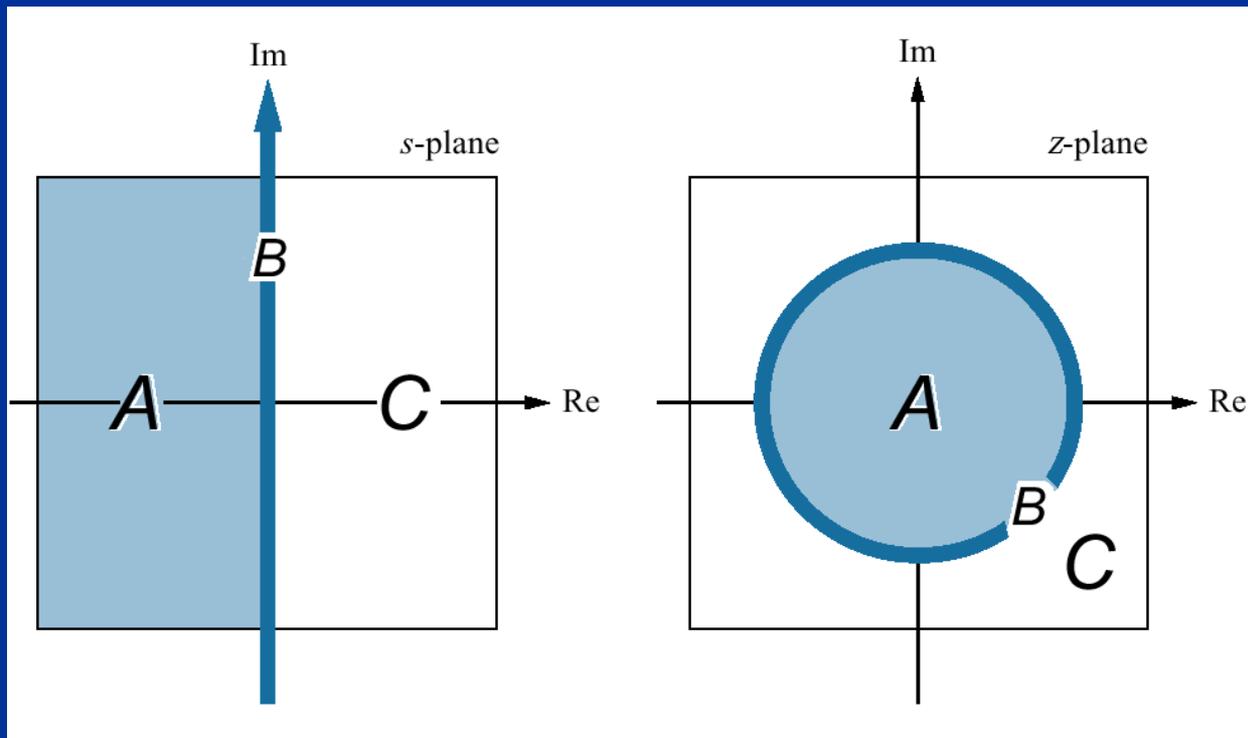
Sistemas de Control



Relación entre las variables 's' y 'z'

$$z = e^{sT} = e^{(\sigma + j\omega)T}$$

$$z = \rho e^{j\theta}$$





Sistemas de Control



Aproximación numérica de la integración

Rectangular en adelante	$s \leftarrow \frac{z-1}{T}$	$z \leftarrow 1 + Ts$
Rectangular en atraso	$s \leftarrow \frac{z-1}{Tz}$	$z \leftarrow \frac{1}{1-Ts}$
Bilineal o de Tustin	$s \leftarrow \frac{2(z-1)}{T(z+1)}$	$z \leftarrow \frac{1+Ts/2}{1-Ts/2}$



Sistemas de Control



Mapeo de la región de estabilidad

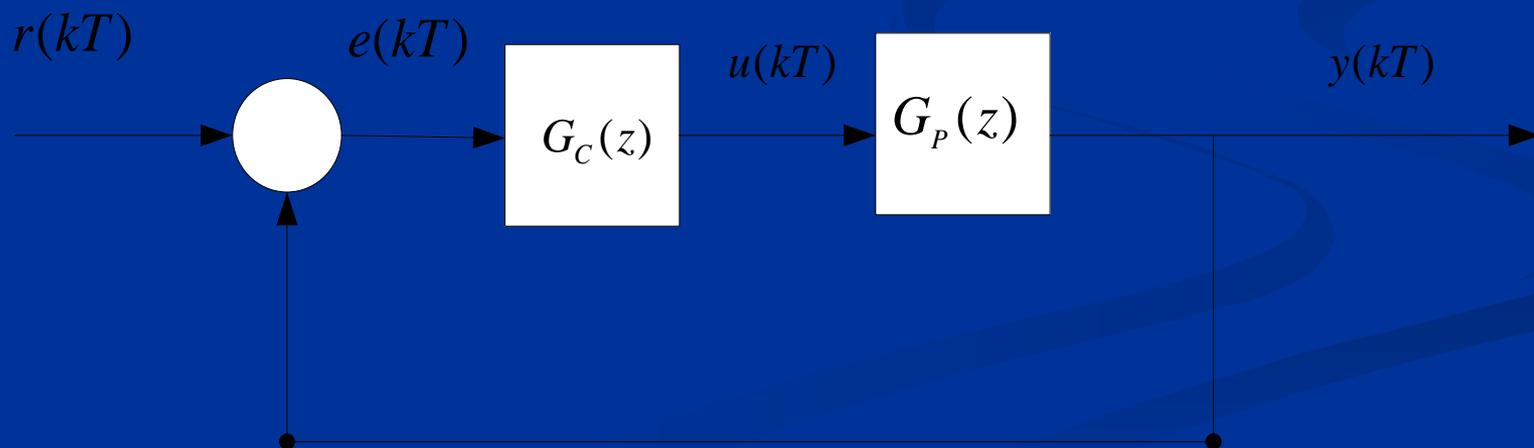
Rectangular en adelante	$z = 1 + Ts$	
Rectangular en atraso	$z = \frac{1}{1 - Ts}$	
Bilineal o de Tustin	$z = \frac{1 + Ts/2}{1 - Ts/2}$	



Sistemas de Control



En el lazo de control digital, un controlador PID que típicamente se aproxima por el método rectangular en atraso, se expresa por la función de transferencia $G_C(z)$ y la planta $G_P(z)$ se puede obtener por medio del equivalente ROC. Se analiza y diseña enteramente en el dominio de 'z', con período de muestreo T.





Sistemas de Control



Equivalente discreto del controlador PID por aproximación rectangular en atraso.

	Forma Continua	Forma Discreta
Accion P	K	K
Accion I	$\frac{K}{T_i s}$	$\frac{\alpha z^{-1}}{(1 - z^{-1})}$
Accion D	$K T_d s$	$\frac{1}{\beta} (1 - z^{-1})$
Filtro	$\frac{1}{1 + T_n / N s}$	$\frac{1}{\gamma - (\gamma - 1) z^{-1}}$
Parametros:		
$\alpha = \frac{K}{T_i}$	$\beta = \frac{T}{K T_d}$	$\gamma = 1 + \frac{T_d}{N T}$



Sistemas de Control



Equivalente discreto del controlador PI por aproximación rectangular en atraso: de la tabla anterior

$$G_c(z) = K \left(1 + \frac{T}{T_i (1 - z^{-1})} \right)$$

$$\text{Cero: } z_1 = \frac{T_i}{T + T_i} = \alpha^{-1}; \text{ polo: } z_2 = 1$$

$$G_c(z) = K \frac{1 - z^{-1} + T/T_i}{1 - z^{-1}}$$

$$G_c(z) = K_c \alpha \left[\frac{z - \alpha^{-1}}{z - 1} \right] = K_c \alpha \left[\frac{1 - \alpha^{-1} z^{-1}}{1 - z^{-1}} \right] = \frac{U(z)}{E(z)}$$

$$G_c(z) = K \frac{T + T_i}{T_i} \left[\frac{1 - \frac{T_i}{T + T_i} z^{-1}}{1 - z^{-1}} \right]$$

Ley de control

$$u(kT) = u[(k-1)T] + K_c \alpha e[kT] - K_c e[(k-1)T]$$

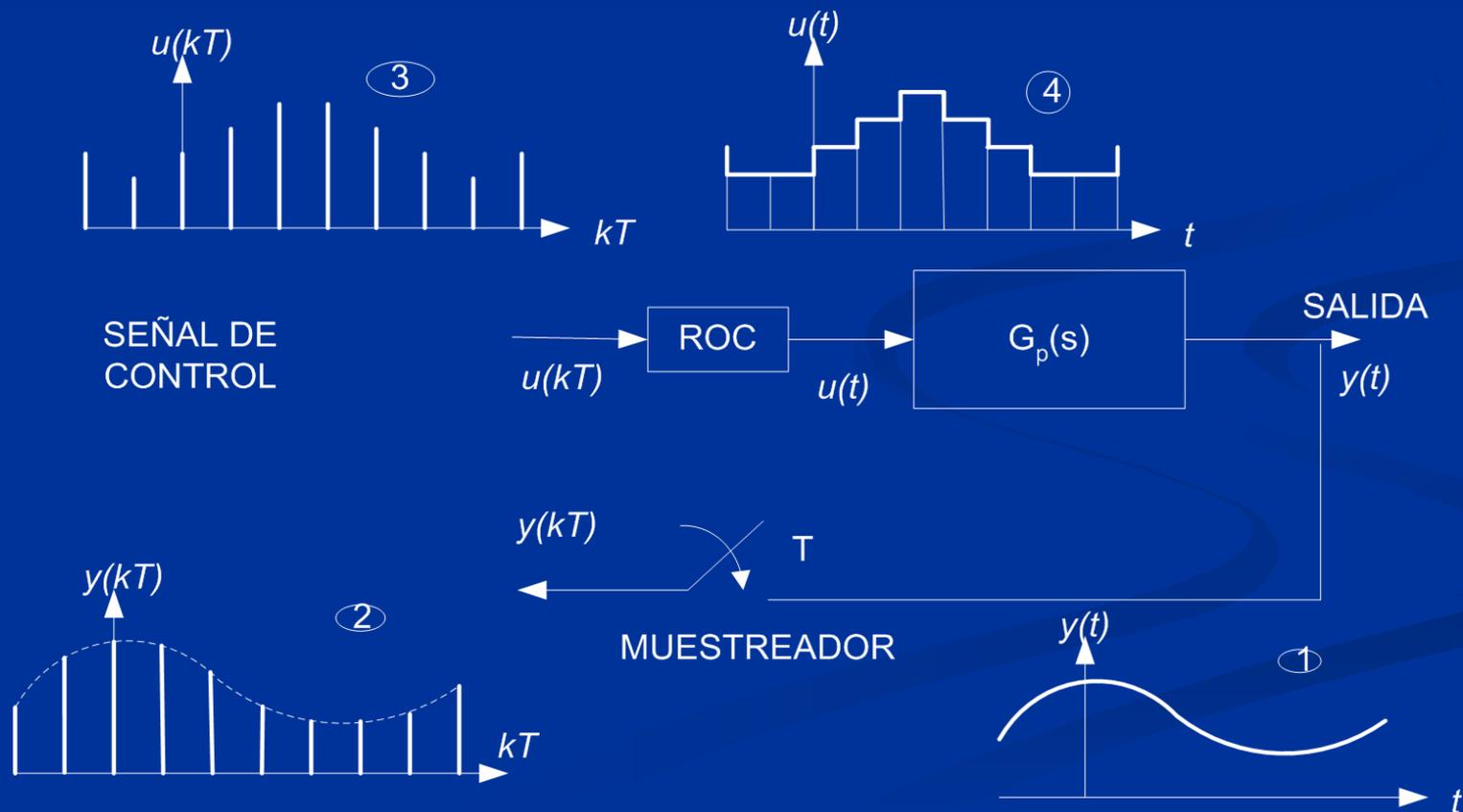


Sistemas de Control



Equivalente discreto del modelo de la planta por medio del retén de orden cero ROC:

$$G_p(s) \xrightarrow{ROC} G_p(z)$$





Sistemas de Control



Se tiene un sistema discreto cuyas señales de entrada y salida son $u(kT)$ y $y(kT)$. La función de transferencia del conjunto formado por el ROC y la planta es

$$\frac{(1 - e^{-sT})}{s} G_p(s)$$

El muestreo sobre la señal $y(t)$ permite establecer la transformada Z de la función anterior. Referencias [1] y [2].

$$G_p(z) = Z \left\{ \frac{(1 - e^{-sT})}{s} G_p(s) \right\}$$

$$G_p(z) = (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{G_p(s)}{s} \right\}$$



Sistemas de Control



Tabla de equivalentes ROC

En las funciones equivalentes ROC mapean los polos del plano 's' al plano 'z', de acuerdo con

$$z = e^{sT}$$

$G(s)$	$G(z) = \mathcal{Z}\{G(s)\}$	$HG(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$
$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{T_0}{z-1}$
$\frac{1}{s^2}$	$\frac{T_0 z}{(z-1)^2}$	$\frac{T_0^2(z+1)}{2(z-1)^2}$
$\frac{1}{s^3}$	$\frac{T_0^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$	$\frac{T_0^3(z^2+4z+1)}{6(z-1)^3}$
$\frac{1}{s^4}$	$\frac{T_0^3 z(z^2+4z+1)}{6(z-1)^4}$	$\frac{T_0^4(z^3+11z^2+11z+1)}{24(z-1)^4}$
$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT_0}}$	$\frac{(1-e^{-aT_0})}{a(z-e^{-aT_0})}$
$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{T_0 z e^{-aT_0}}{(z-e^{-aT_0})^2}$	$\frac{(1-e^{-aT_0}(1+aT_0))z + e^{-aT_0}(e^{-aT_0}-1+aT_0)}{a^2(z-e^{-aT_0})^2}$
$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{(b-a)} \frac{(e^{-aT_0}-e^{-bT_0})z}{(z-e^{-aT_0})(z-e^{-bT_0})}$	$\frac{1}{ab(a-b)} \frac{(Az+B)}{(z-e^{-aT_0})(z-e^{-bT_0})}$ $A = a-b - ae^{-bT_0} + be^{-aT_0}$ $B = (a-b)e^{-(a+b)T_0} - ae^{-aT_0} + be^{-bT_0}$



$$H(q) = \frac{b_1 q + b_2}{q^2 + a_1 q + a_2}$$



Tabla de equivalentes ROC

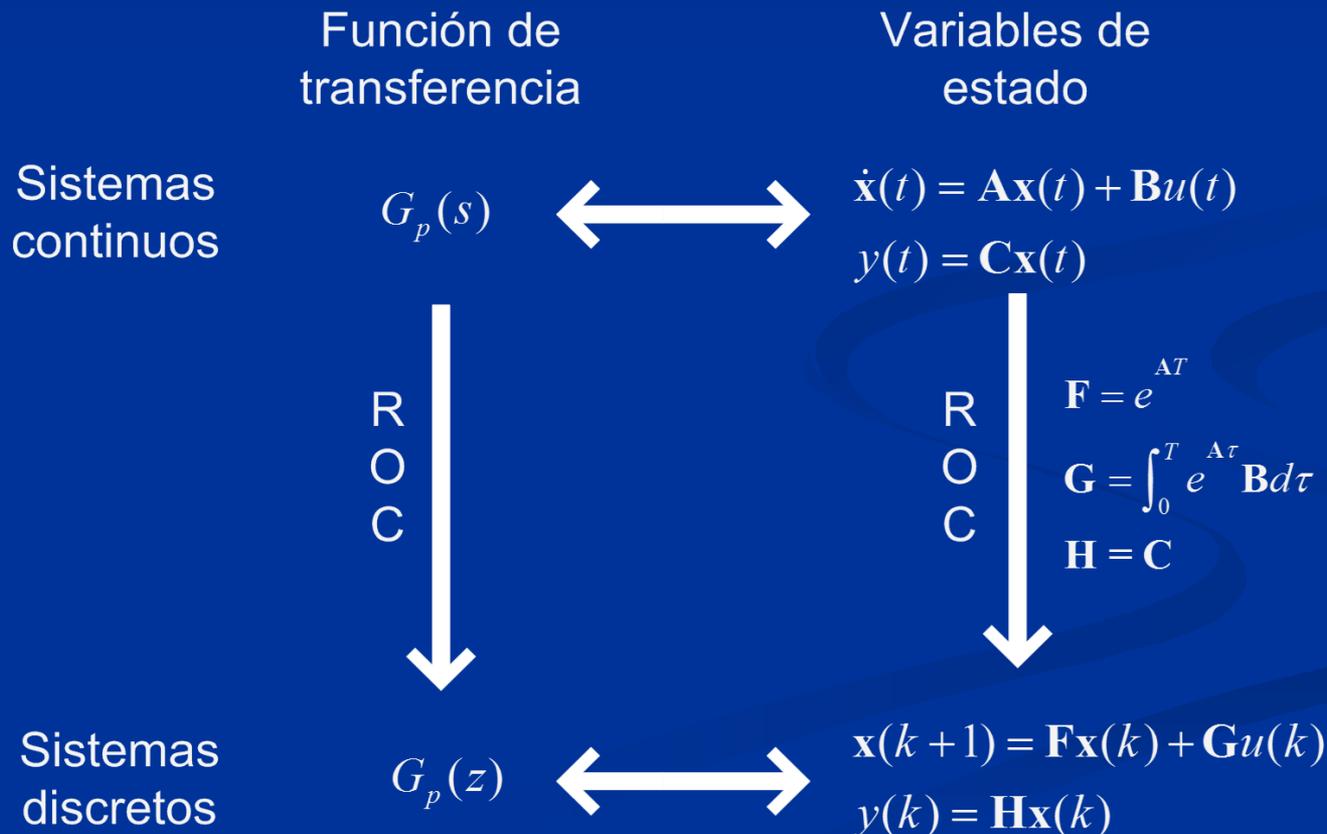
$G(s)$	$H(q)$ or the coefficients in $H(q)$	$h = T$ $q = z$
$\frac{1}{s}$	$\frac{h}{q-1}$	
$\frac{1}{s^2}$	$\frac{h^2(q+1)}{2(q-1)^2}$	
e^{-sh}	q^{-1}	
$\frac{a}{s+a}$	$\frac{1 - \exp(-ah)}{q - \exp(-ah)}$	
$\frac{a}{s(s+a)}$	$b_1 = \frac{1}{a}(ah - 1 + e^{-ah})$ $b_2 = \frac{1}{a}(1 - e^{-ah} - ahe^{-ah})$ $a_1 = -(1 + e^{-ah})$ $a_2 = e^{-ah}$	
$\frac{a^2}{(s+a)^2}$	$b_1 = 1 - e^{-ah}(1 + ah)$ $b_2 = e^{-ah}(e^{-ah} + ah - 1)$ $a_1 = -2e^{-ah}$ $a_2 = e^{-2ah}$	
$\frac{ab}{(s+a)(s+b)}$	$b_1 = \frac{b(1 - e^{-ah}) - a(1 - e^{-bh})}{b - a}$ $b_2 = \frac{a(1 - e^{-bh})e^{-ah} - b(1 - e^{-ah})e^{-bh}}{b - a}$ $a_1 = -(e^{-ah} + e^{-bh})$ $a_2 = e^{-(a+b)h}$	
$\frac{(s+c)}{(s+a)(s+b)}$	$b_1 = \frac{e^{-bh} - e^{-ah} + (1 - e^{-bh})c/b - (1 - e^{-ah})c/a}{b - a}$ $b_2 = \frac{c}{ab}e^{-(a+b)h} + \frac{b-c}{b(a-b)}e^{-ah} + \frac{c-a}{a(a-b)}e^{-bh}$ $a_1 = -e^{-ah} - e^{-bh}$ $a_2 = e^{-(a+b)h}$	
$\frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$	$b_1 = 1 - \alpha\left(\beta + \frac{\zeta\omega_0}{\omega}\gamma\right)$ $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \zeta^2}$ $\zeta < 1$ $b_2 = \alpha^2 + \alpha\left(\frac{\zeta\omega_0}{\omega}\gamma - \beta\right)$ $\alpha = e^{-\zeta\omega_0 h}$ $a_1 = -2\alpha\beta$ $\beta = \cos(\omega h)$ $a_2 = \alpha^2$ $\gamma = \sin(\omega h)$	
$\frac{s}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$	$b_1 = \frac{1}{\omega}e^{-\zeta\omega_0 h} \sin(\omega h)$ $b_2 = -b_1$ $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \zeta^2}$ $a_1 = -2e^{-\zeta\omega_0 h} \cos(\omega h)$ $a_2 = e^{-2\zeta\omega_0 h}$	



Sistemas de Control

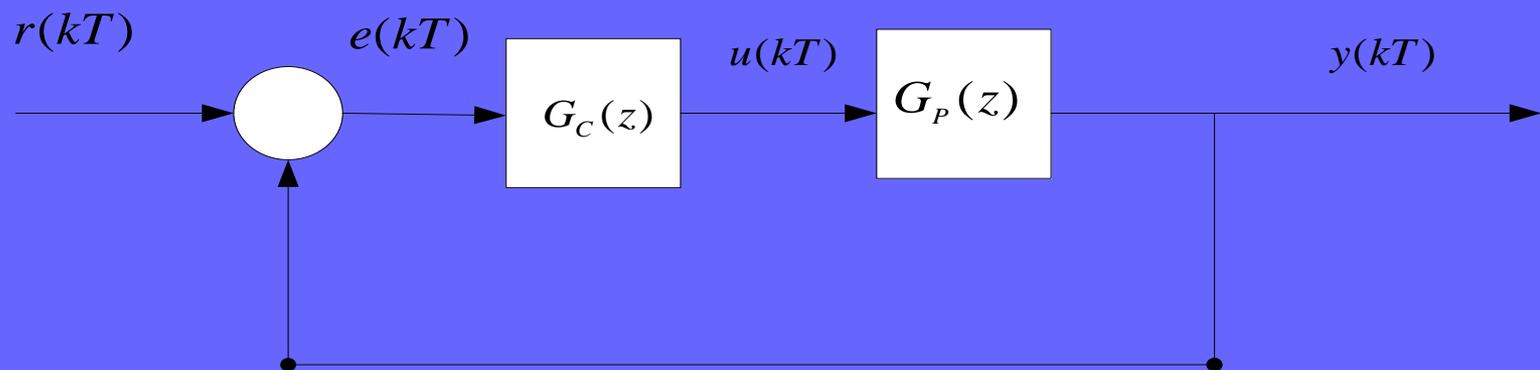


La aproximación ROC de la planta también se expresa en los modelos de variables de estado.



En el lazo de control digital, un controlador PID que típicamente se aproxima por el método rectangular en atraso, se expresa por la función de transferencia $G_C(z)$ y la planta $G_P(z)$ se expresa por medio de la aproximación ROC.

Se analiza y diseña enteramente en el dominio de 'z', con período de muestreo T , empleando parámetros de diseño de sistemas continuo, mapeando las características dinámicas al plano 'z'.





Sistemas de Control



Análisis, diseño y aplicación de un sistema de control digital en el Lab. de Control Digital: reporte de alumnos

