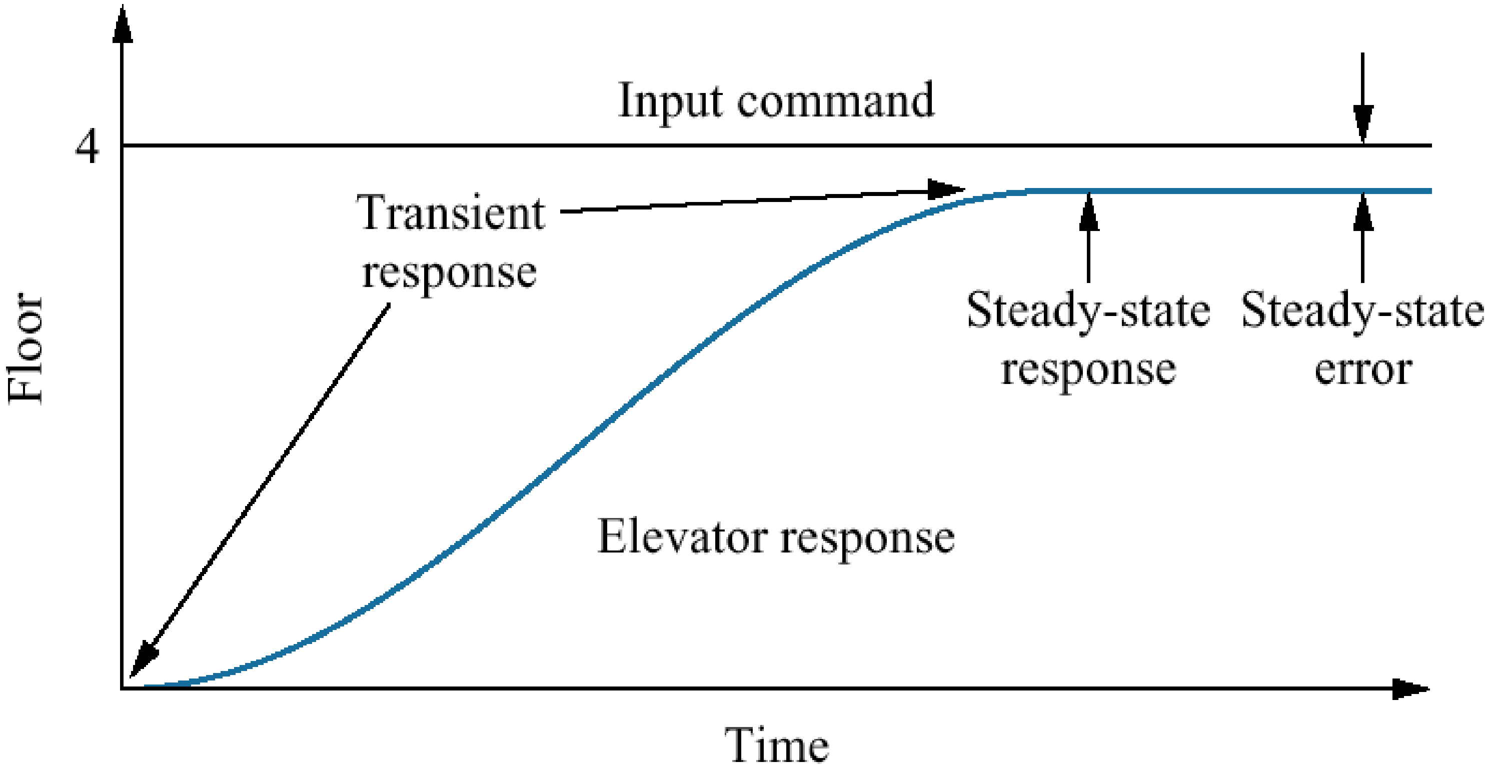
RESPUESTA DINÁMICA Y ESTABILIDAD DE SISTEMAS

	Tiempo continuo	Tiempo discreto
Función de transferencia	$H(s) \leftrightarrow h(t)\ ;\quad H(s) = \dfrac{Y(s)}{X(s)}$	$H(z) \leftrightarrow h(k)\ ;\quad H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)}$
Función de transferencia	$H(s) = \dfrac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + b_2 s^{m-2} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} = \dfrac{B(s)}{A(s)}$	$H(z) = \dfrac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} + \cdots + b_{n-1} z + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n} = \dfrac{B(z)}{A(z)}$
Polos y ceros (reales o complejos)	$H(s) = \dfrac{K \prod_{j=1}^{m} (s + c_j)}{\prod_{i=1}^{n} (s + p_i)}$ n polos de valores: $-p_i$ m ceros de valores: $-c_j$	$H(z) = \dfrac{K \prod_{j=1}^{n} (z - c_j)}{\prod_{i=1}^{n} (z - p_i)}$ n polos de valores: p_i n ceros de valores: c_j
Salida para una entrada escalón, expansión en fracciones y antitransformada. Polos reales	$Y(s) = H(s)X(s)\ ;\quad y(t) = L^{-1}\{Y(s)\}$	$Y(z) = H(z)X(z)\ ;\quad y(k) = \Box^{-1}\{Y(z)\}$
	$Y(s) = \dfrac{d_e}{s} + \dfrac{d_1}{(s+p_1)} + \dfrac{d_2}{(s+p_2)} + \cdots + \dfrac{d_n}{(s+p_n)}$	$Y(z) = d_0 + \dfrac{d_e z}{(z-1)} + \dfrac{d_1 z}{(z-p_1)} + \dfrac{d_2 z}{(z-p_2)} + \cdots + \dfrac{d_n z}{(z-p_n)}$
	$y(t) = \left[d_e + d_1 e^{-p_1 t} + d_2 e^{-p_2 t} + \cdots + d_n e^{-p_n t} \right] u_{-1}(t)$	$y(k) = \left[d_0 \delta(k) + d_e + d_1 p_1^k + d_2 p_2^k + \cdots + d_n p_n^k \right] u_{-1}(k)$
Salida para una entrada escalón, expansión en fracciones y antitransformada. Polos complejos	$Y(s) = \dfrac{d_e}{s} + \dfrac{d_1}{s+p_1} + \dfrac{d_2}{s+p_2} + \ldots + \dfrac{d_l}{s + (\xi_l \omega_{nl} - j\omega_{dl})} +$ $+ \dfrac{d_{l*}}{s + (\xi_l \omega_{nl} + j\omega_{dl})} + \cdots + \dfrac{d_n}{s+p_n}$	$Y(z) = d_0 + \dfrac{d_e z}{z-1} + \dfrac{d_1 z}{z-p_1} + \dfrac{d_2 z}{z-p_2} + \ldots + \dfrac{d_l z}{z - \rho_l e^{j\theta_l}} +$ $+ \dfrac{d_{l*} z}{z - \rho_l e^{-j\theta_l}} + \ldots + \dfrac{d_n z}{z-p_n}$
	$y(t) = d_e + d_1 e^{-p_1 t} + d_2 e^{-p_2 t} + \ldots + D_l e^{-\xi_l \omega_{nl} t} \cos(\omega_{dl} t - \phi_l) +$ $\ldots + d_n e^{-p_n t}$ $t \geq 0$	$y(k) = d_0 \delta(k) + d_e + d_1 p_1^k + d_2 p_2^k + \cdots + D_l \rho_l^k \cos(\theta_l k - \phi_l) +$ $\cdots + d_n p_n^k$ $k \geq 0$

Desde el punto de vista de la variación de la respuesta, se distinguen dos etapas: transitoria y permanente



DEMO “Exploring the s-plane”: Orden 1 y variaciones. Orden 2 y variaciones. Orden superior y polos dominantes

4.3 Sistemas de primer orden

Ecuación de sistema de primer orden con entrada escalón unitario

$$R(s) = \frac{1}{s} \qquad C(s) = R(s)G(s) = \frac{a}{s(s+a)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}$$

$$c(t) = \left(1 - e^{-at}\right)u_{-1}(t)$$

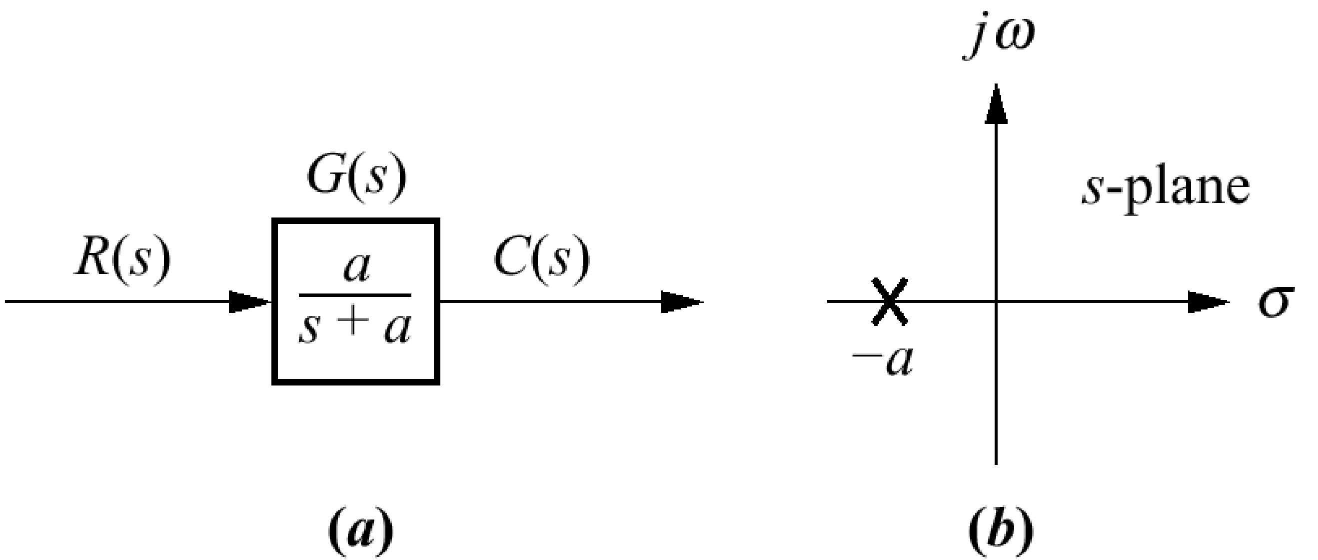


Figura 4.4 a) Sistema de primer orden b) Patrón de polos y ceros

Características dinámicas de la respuesta de un sistema de primer orden a un escalón unitario

Constante de tiempo esta definida como el tiempo que le toma a la respuesta a escalón alcanzar el 63% de su valor final.

$$\tau = \frac{1}{a}$$

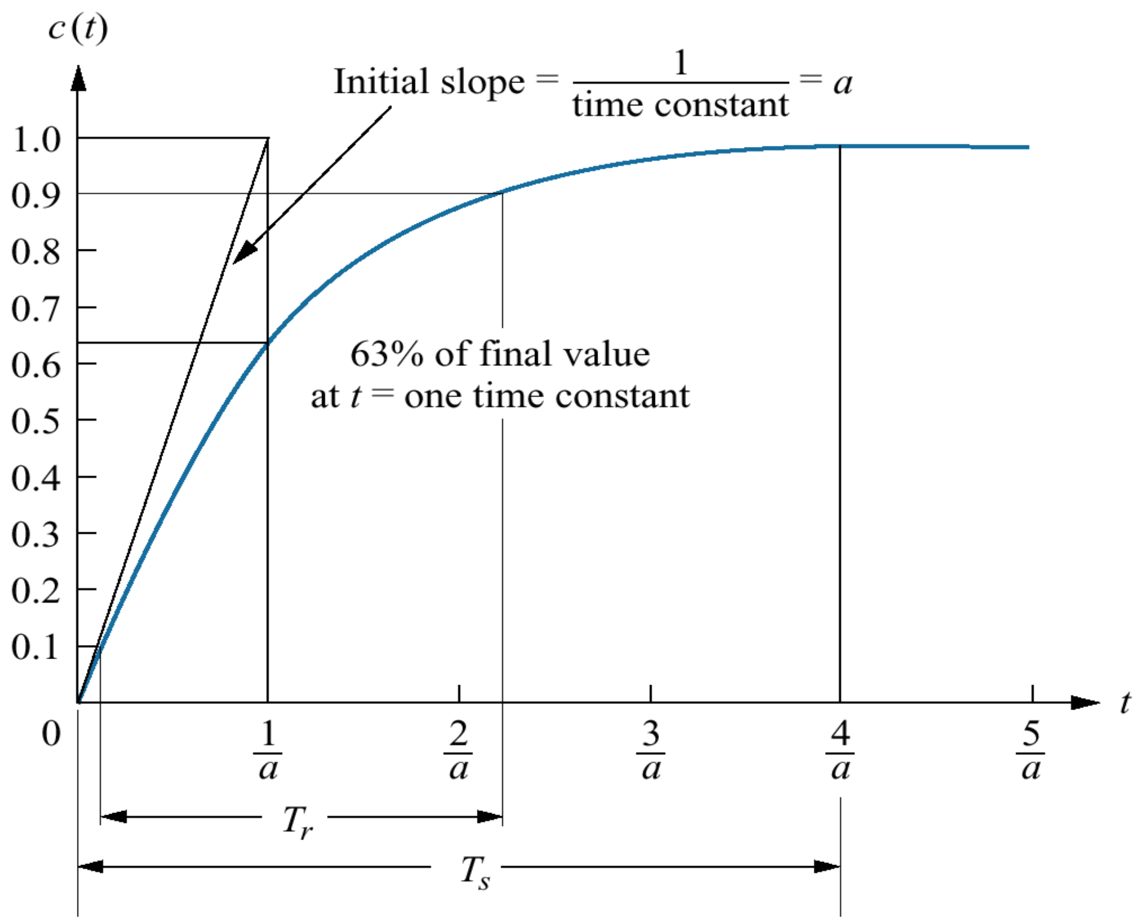


Figura 4.5

4.4 Sistemas de segundo orden: introducción

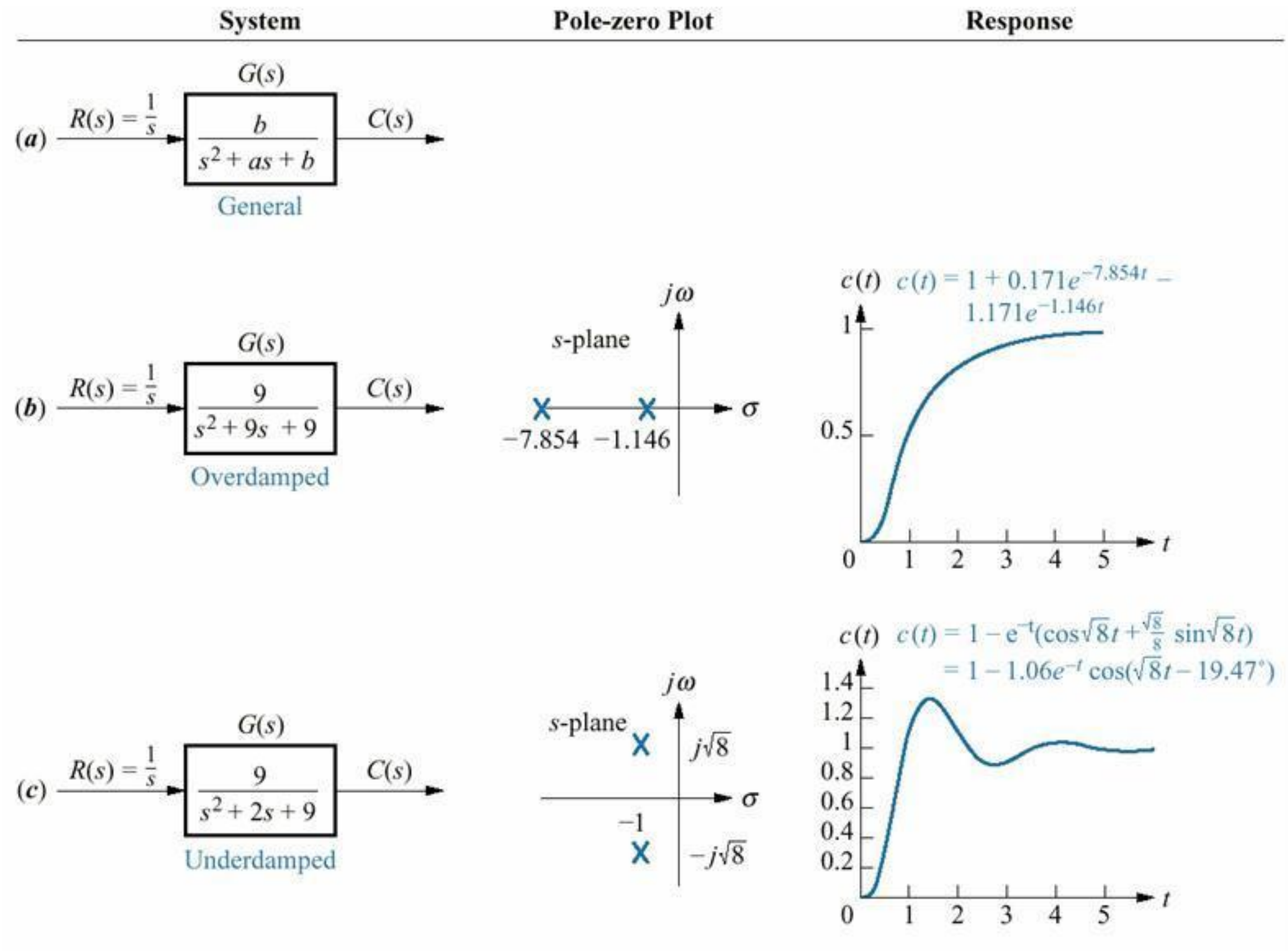


Figura 4.7

4.4 Sistemas de segundo orden: introducción

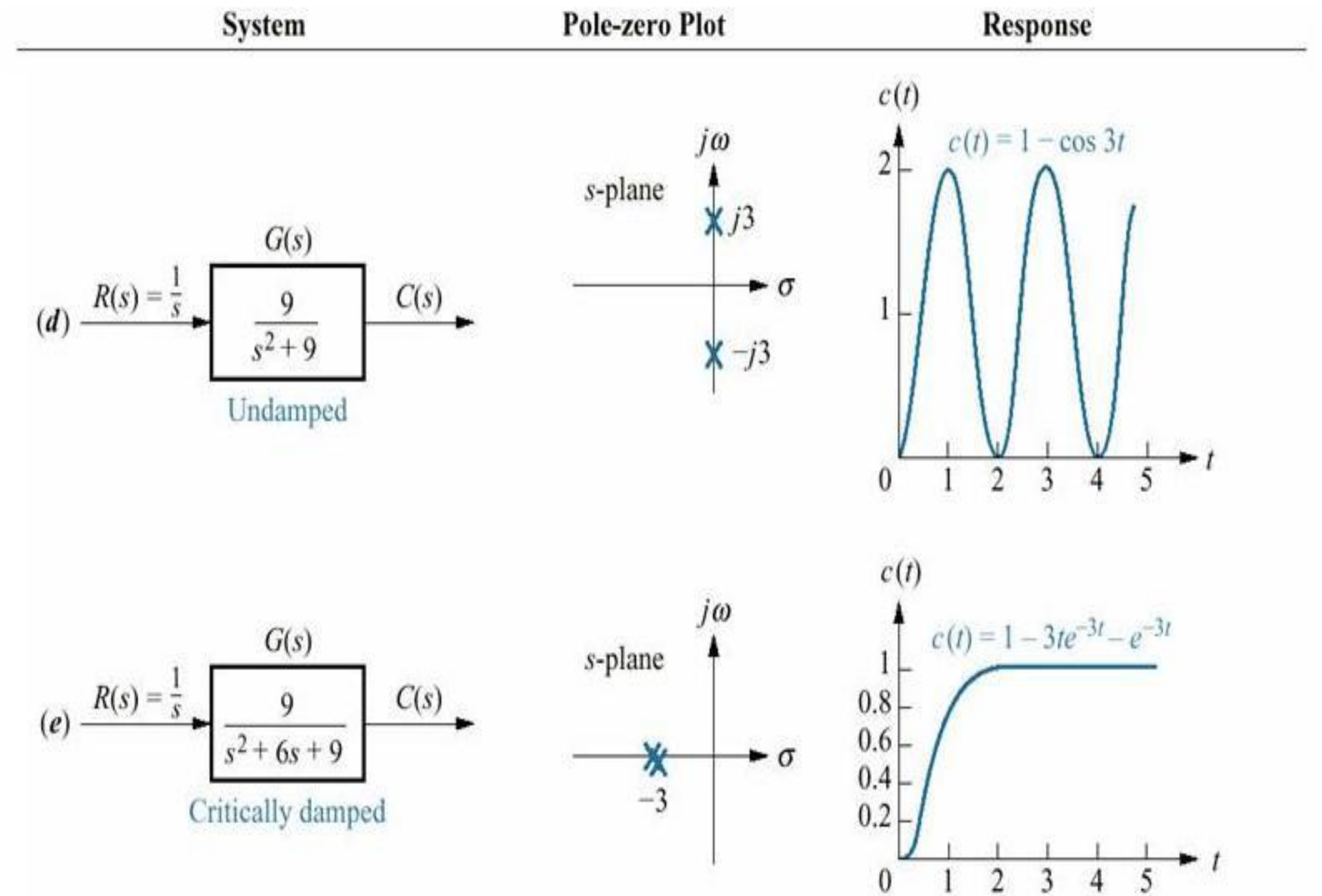


Figura 4.7

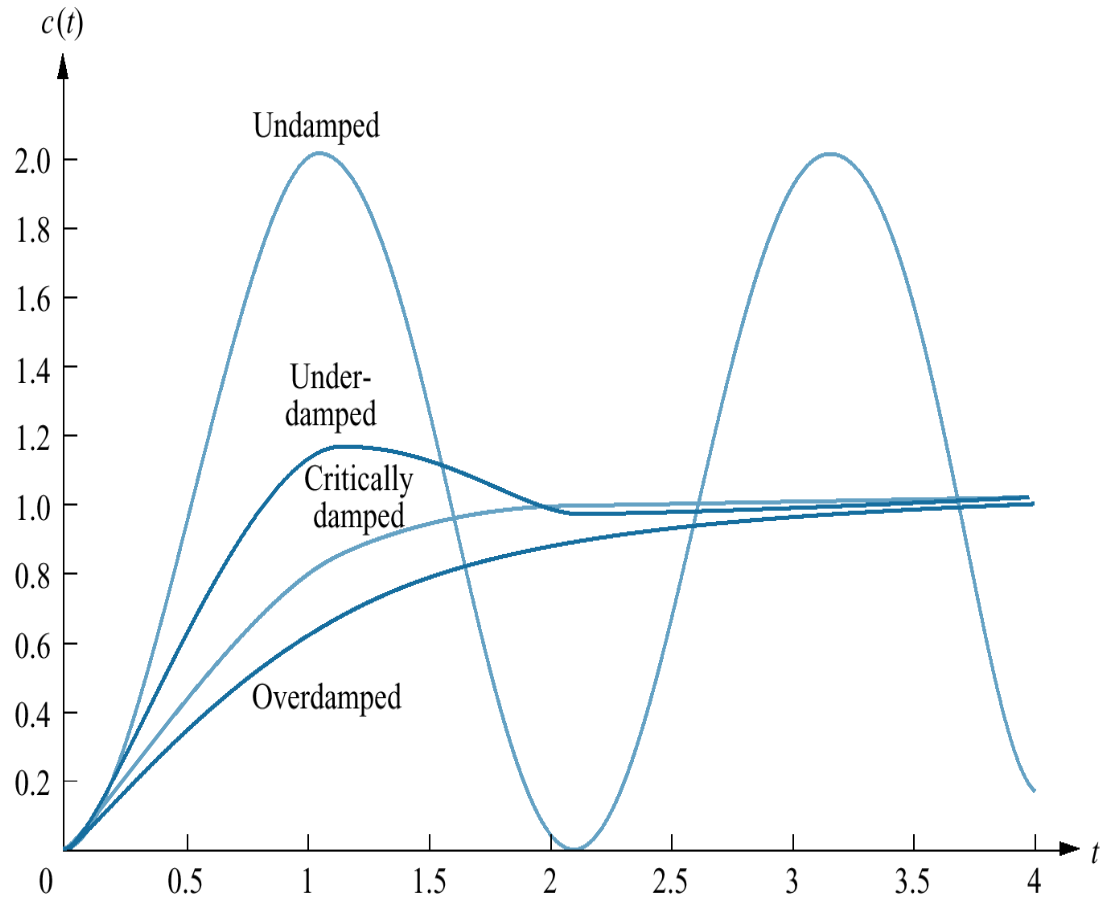


Figura 4.10

Respuestas escalón para casos de amortiguamiento en sistemas de segundo orden

Sistema de 2° orden subamortiguado, dos polos complejos conjugados.
Función de transferencia normalizada y sus parámetros

La función normalizada de este tipo de sistemas es:

$$G(s) = \frac{\omega_n{}^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n{}^2} \qquad 0 < \zeta < 1$$

Frecuencia natural, ω_n, que es la frecuencia de oscilación del sistema sin amortiguamiento, en ***rad/seg***.

Factor de amortiguamiento, ζ es la cantidad que surge de la comparación de la frecuencia a la cual disminuye la envolvente de la exponencial con respecto de la frecuencia natural.

Ej. Encontrar ζ ***y*** ω_n para la siguiente función de transferencia :

$$G(s) = \frac{36}{s^2 + 4.2s + 36}$$

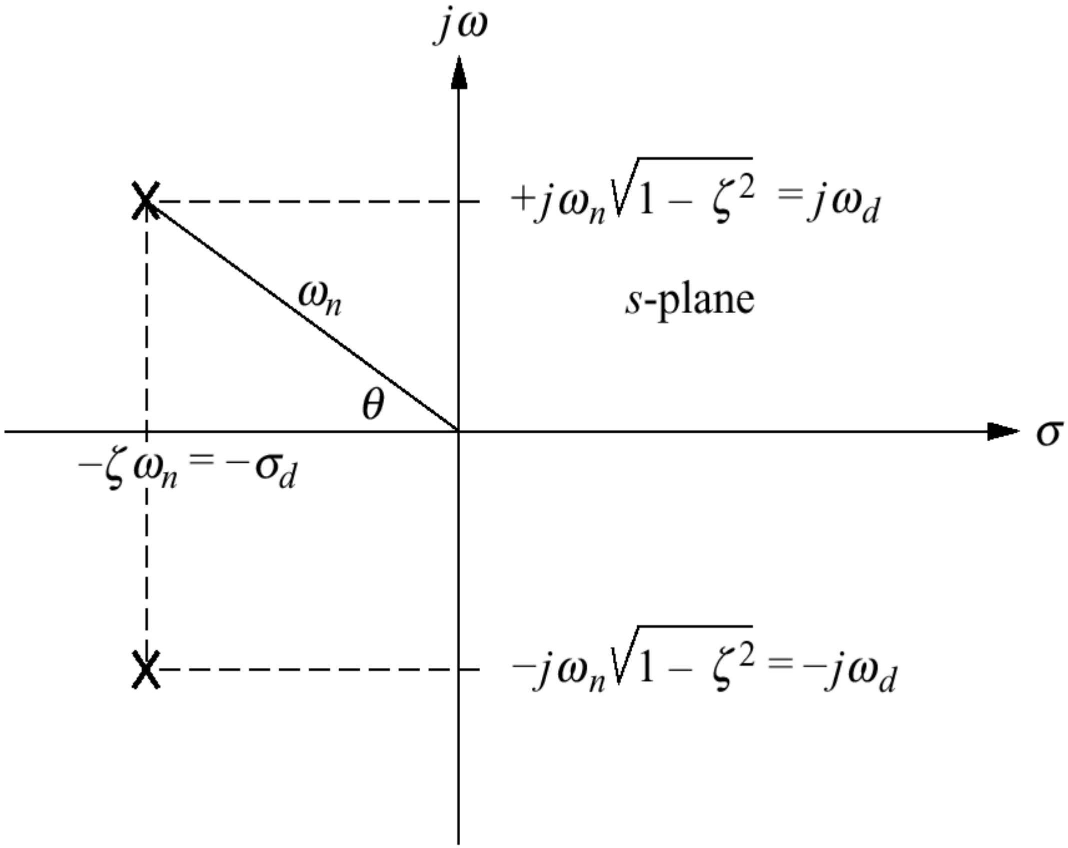
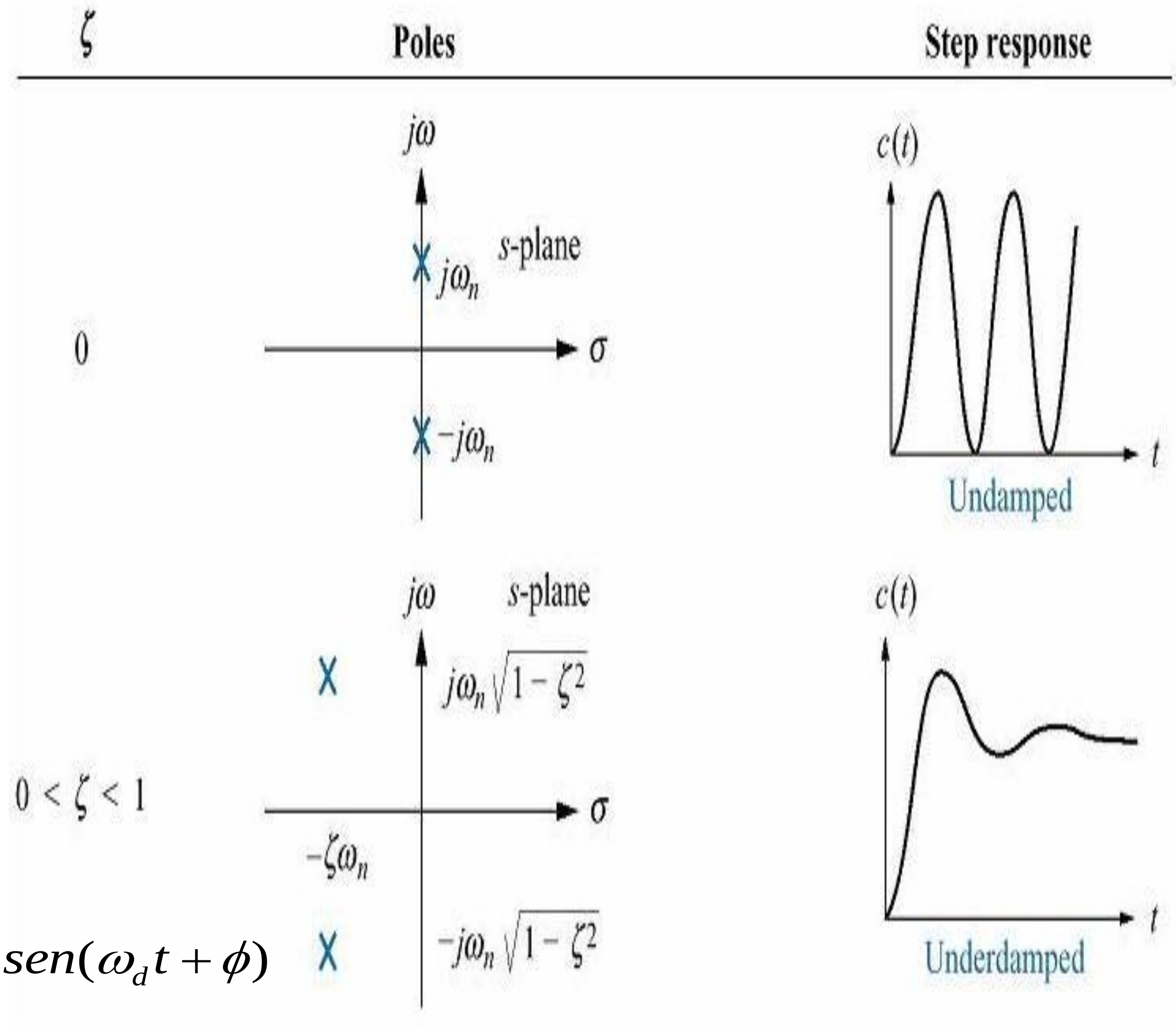


Figura 4.17

Patrón de polos para un sistema de segundo orden subamortiguado

Figura 4.11

Respuesta de segundo orden en función del factor de amortiguamiento



Solución analítica

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi \omega_n t} sen(\omega_d t + \phi)$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2} \;; \qquad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right)$$

Figura 4.11

Respuesta de segundo orden en función del factor de amortiguamiento

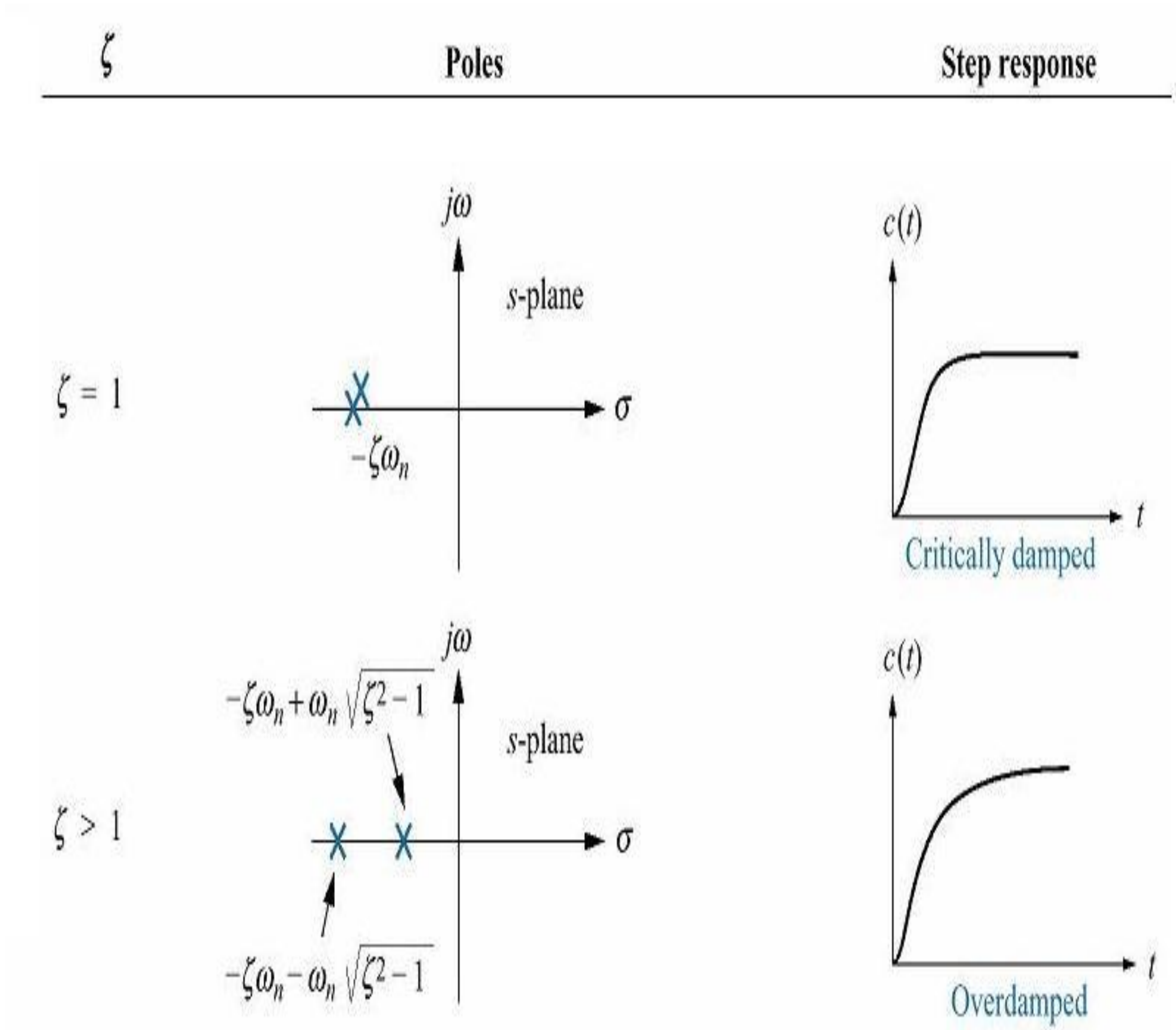


Figura 4.11

Ejercicio 4.4 Para cada uno de los sistemas mostrados a continuación halle los valores de ζ ***y*** ω_n y diga que tipo de respuesta es de esperarse

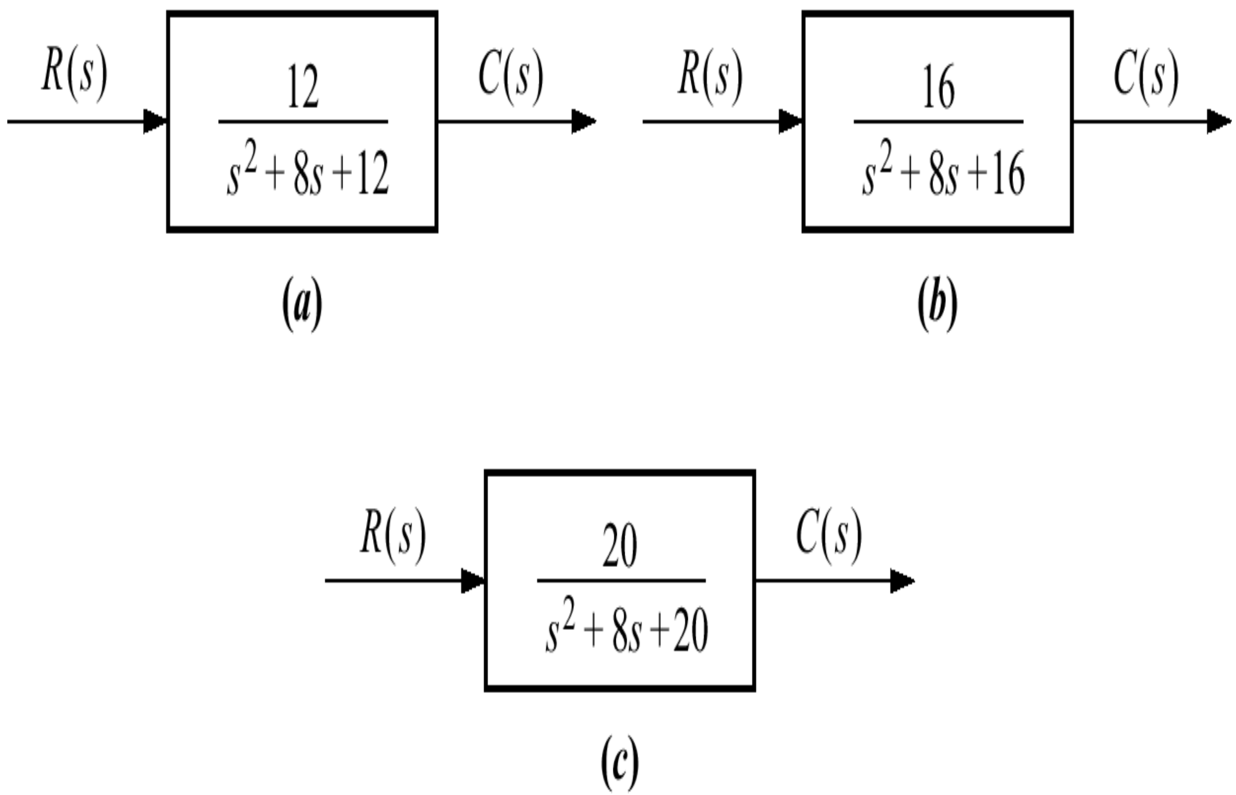


Figura 4.12

4.6 Sistemas de segundo orden subamortiguados

Figura 4.13

Respuestas subamortiguadas de segundo orden para diferentes valores de ζ

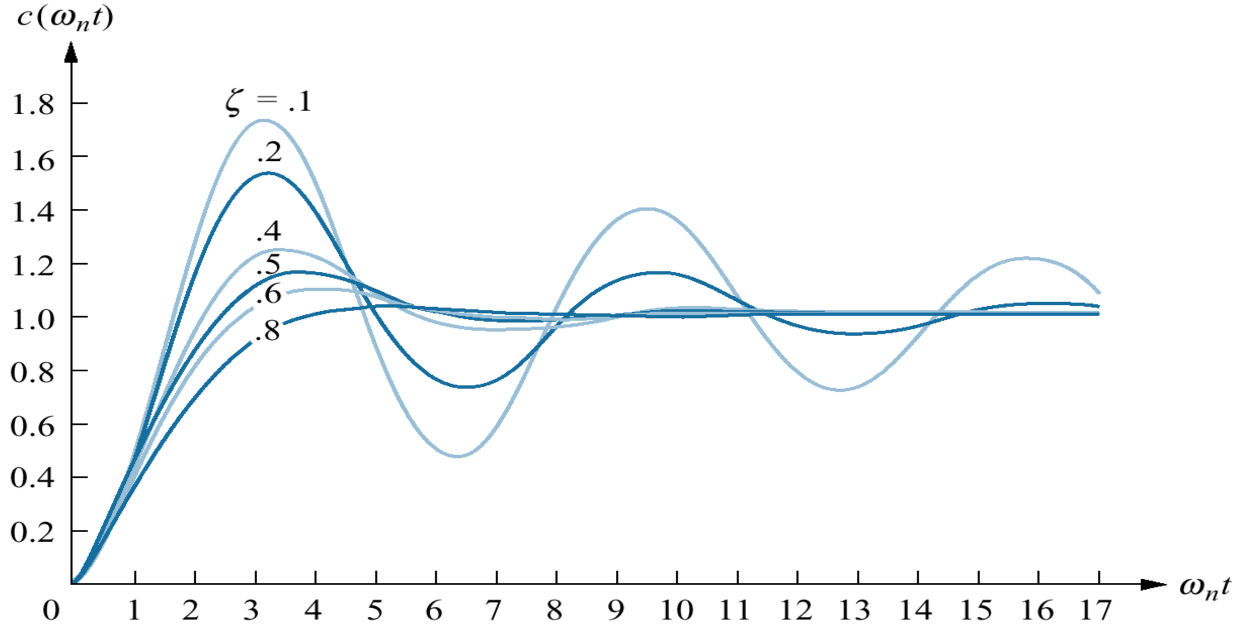
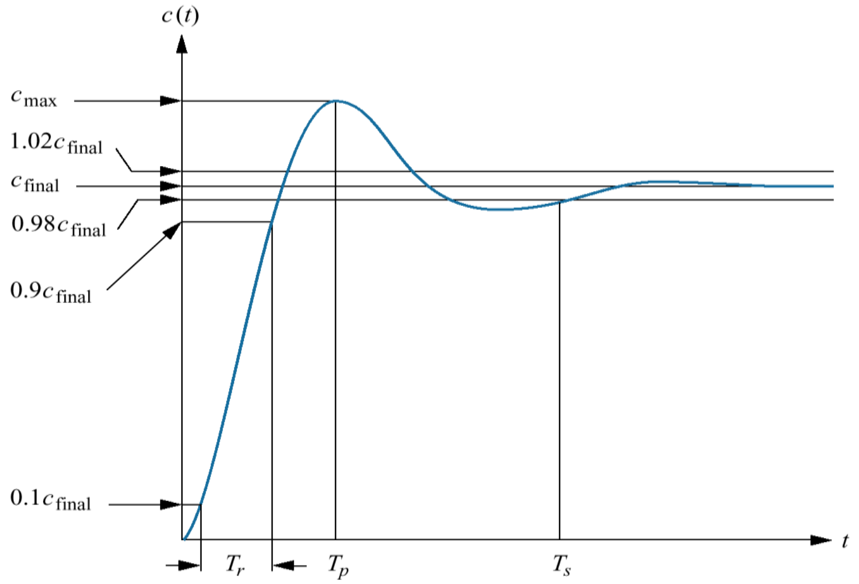


Figura 4.13

Al disminuir el factor de amortiguamiento hace mas oscilatoria la respuesta y la frecuencia natural solo escala en el tiempo la respuesta.

Figura 4.14 Parámetros de especificación de sistemas subamortiguados



1.- ***Tiempo de levantamiento*** $t_r = \dfrac{\pi - \theta}{\omega_d}$; $\theta = \cos^{-1}\xi$

2.- ***Tiempo sobrepaso*** $t_p = \dfrac{\pi}{\omega_d}$

3.- ***Sobrepaso*** $Mp = OS = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$

4.- ***Tiempo de asentamiento*** $t_s = \dfrac{4}{\zeta\omega_n}$

Figura 4.15

Porcentaje de sobrepaso vs ζ

$$Mp = OS = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

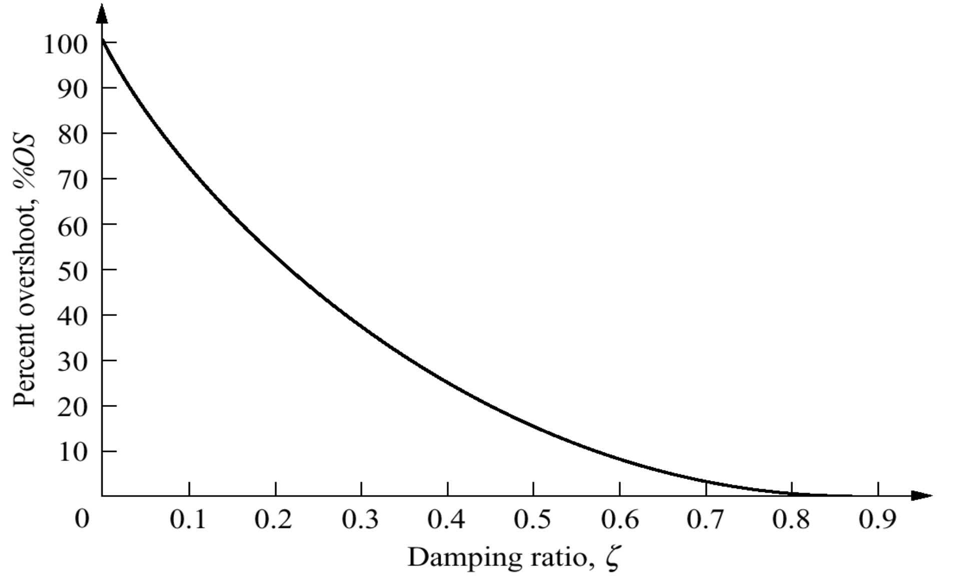
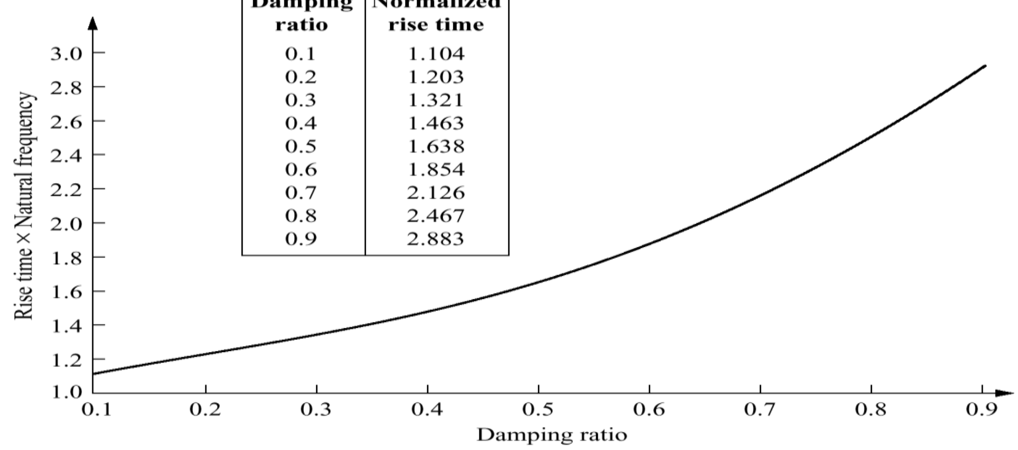


Figura 4.15

Figura 4.16

Tiempo de levantamiento normalizado vs ζ



Damping ratio	Normalized rise time
0.1	1.104
0.2	1.203
0.3	1.321
0.4	1.463
0.5	1.638
0.6	1.854
0.7	2.126
0.8	2.467
0.9	2.883

Figura 4.16

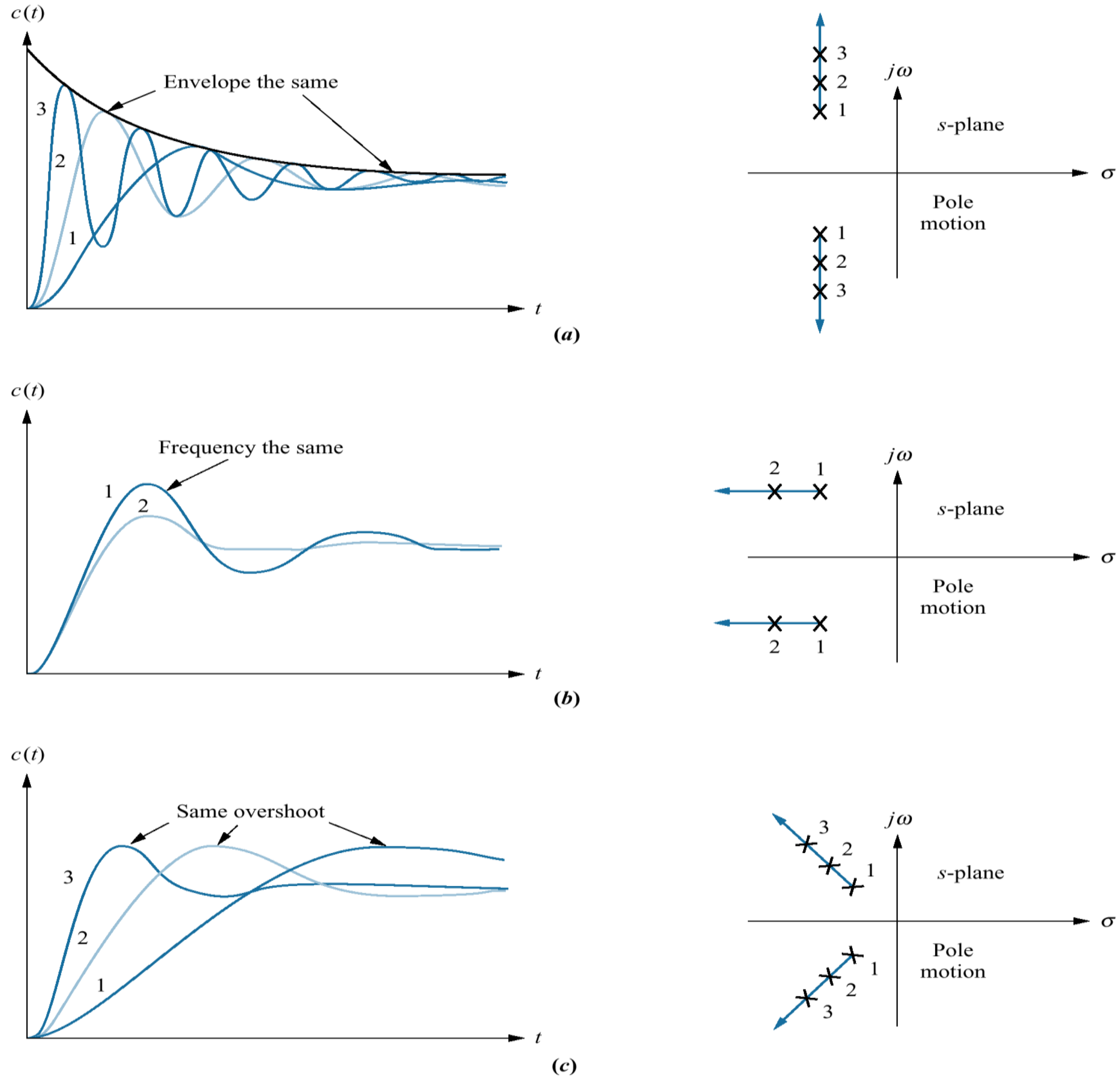
Figura 4.19

Regiones de parámetros constantes

a) parte real constante

b) parte imaginaria constante

c) factor de amortiguamiento relativo constante

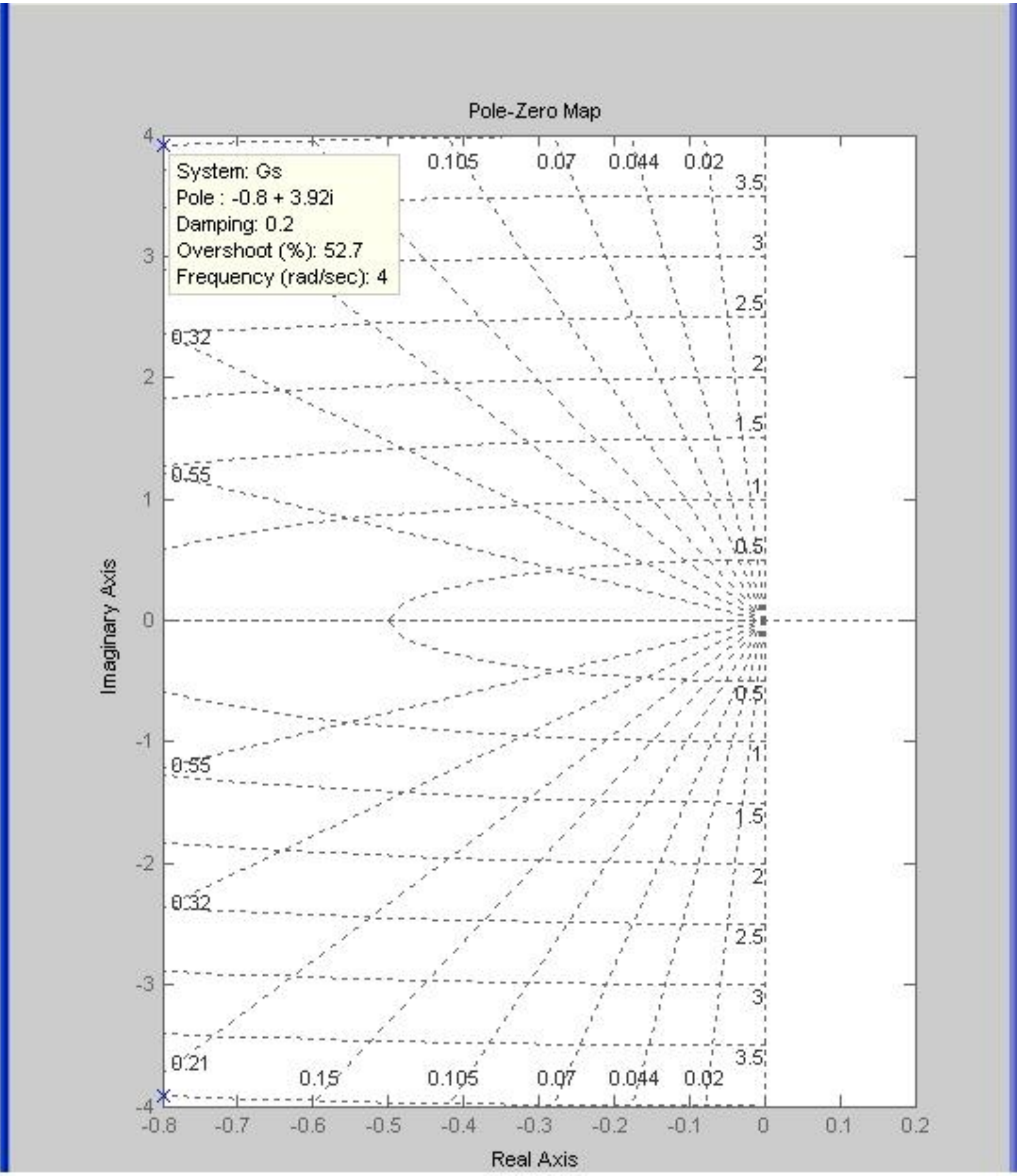


Regiones de parámetros constantes en Matlab

```
>> n=16;
>> d=[1 1.6 16];
>> Gs=tf(n,d)

Transfer function:
       16
----------------
s^2 + 1.6 s + 16

>> sgrid('new')
>> pzmap(Gs)
>>
```



Polos dominantes

En los sistemas de orden superior, alguno o algunos de los polos se encuentran más cerca del eje imaginario. A dichos polos se les llama polos dominantes porque determinan en mayor medida el comportamiento y respuesta del sistema. complejos.

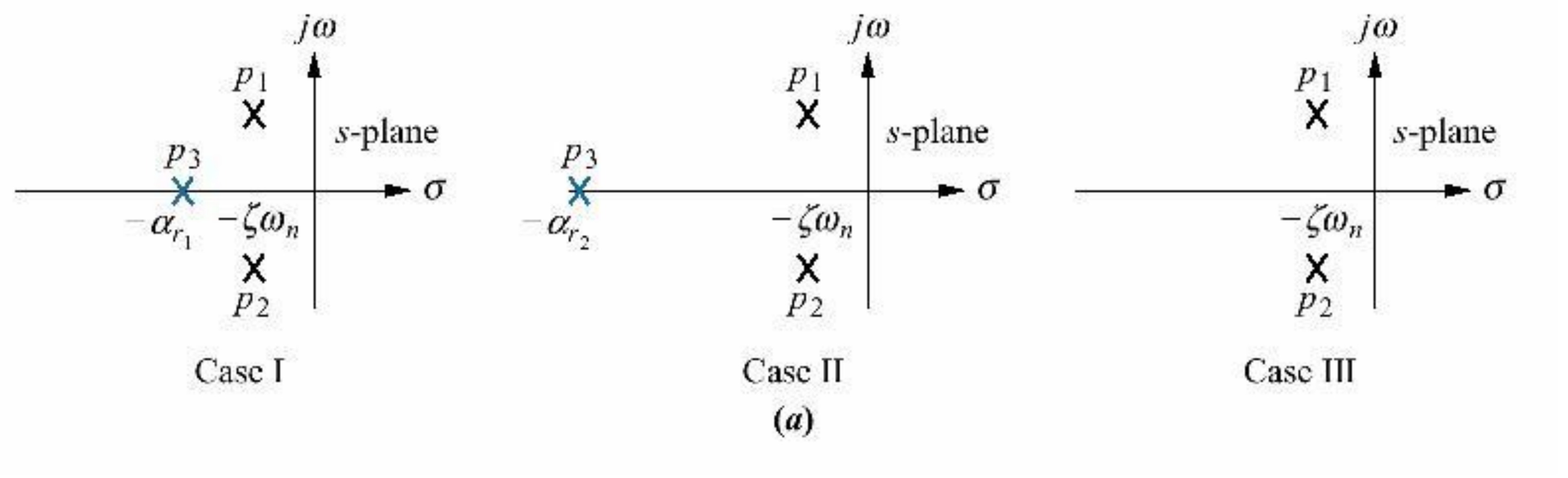


Figura 4.23