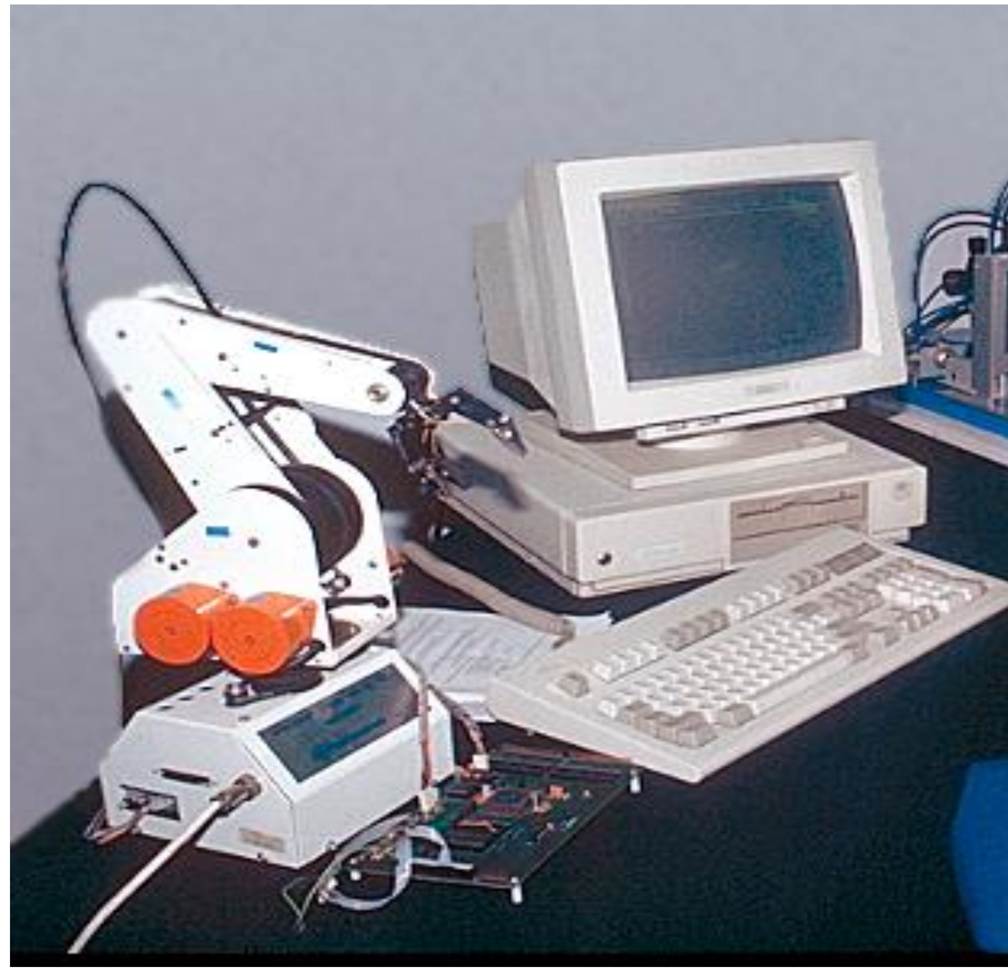
Sistemas de Contol

Presentación y objetivo del curso

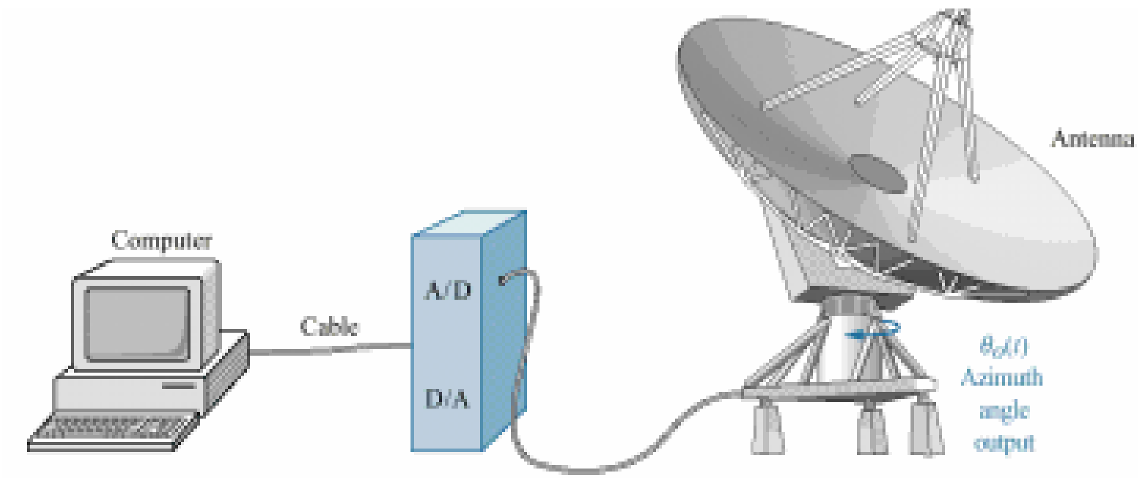


M. I. Ricardo Garibay Jiménez

rcgaribay@servidor.unam.mx

Sistemas de Contol

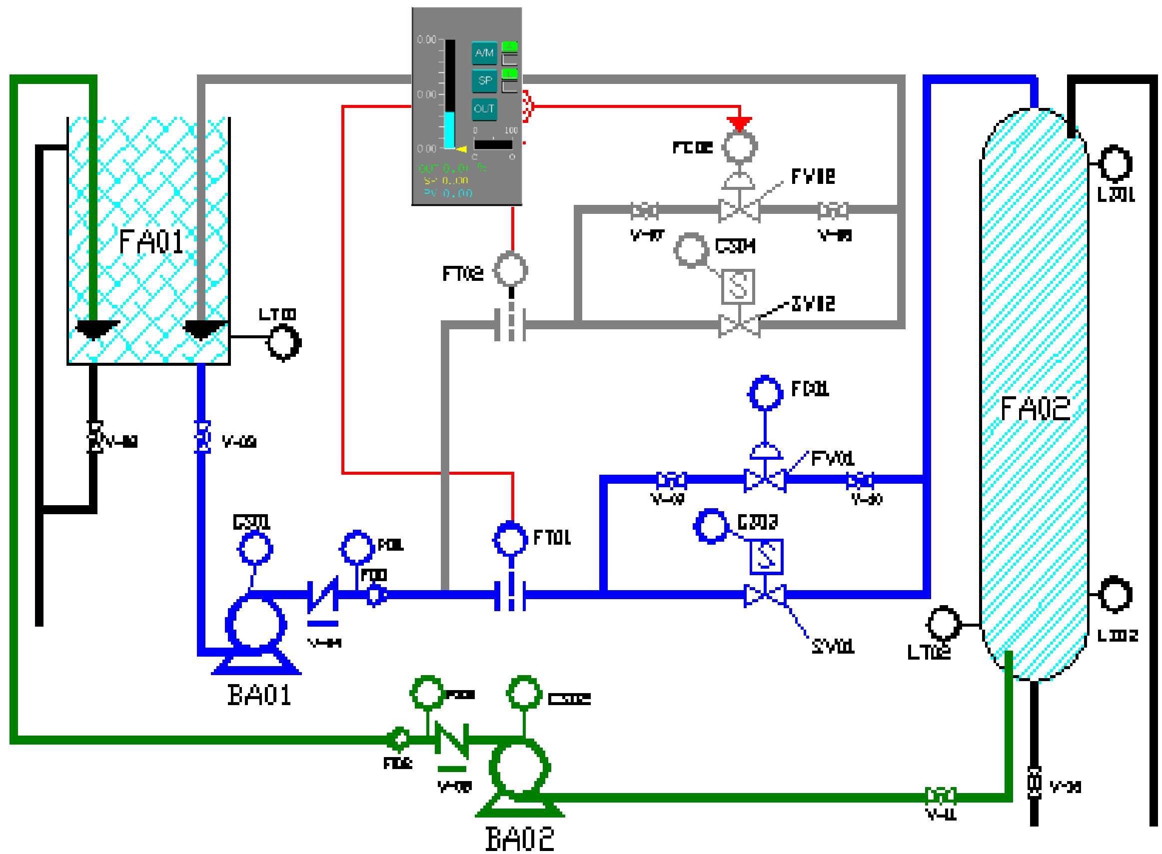
Objetivo: El alumno comprenderá y analizará sistemas de control de tiempo continuo (t) y discreto (k) utilizando métodos del dominio del tiempo y la frecuencia (transformadas 's' y 'z').



Sistemas de Contol

Temario

- Modelado y representación de sistemas físicos
- Introducción a los sistemas de control de tipo analógico y digital
- Acciones de control



Sistemas de Contol

- Estabilidad de sistemas de control
- Lugar geométrico de las raíces
- Diseño de control con base en la respuesta en frecuencia

Modelado y representación de sistemas físicos

Objetivo: El alumno comprenderá los conceptos y métodos empleados en la formulación de modelos matemáticos de sistemas físicos elementales en el enfoque lineal.

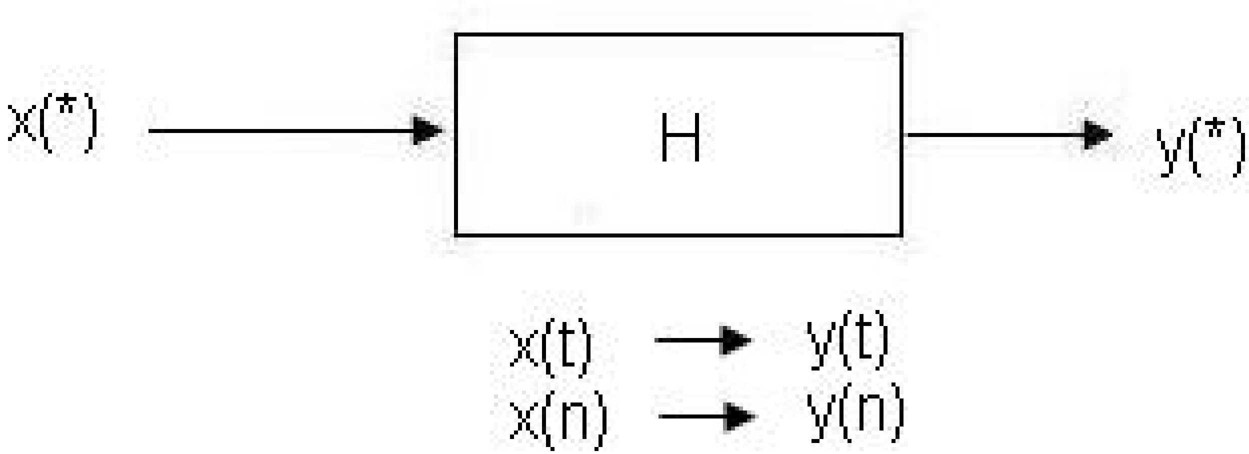
Sistemas de Contol

Un sistema es una combinación de elementos o componentes que actúan de manera conjunta para realizar una función específica. Los componentes manifiestan interacciones entre sí a través de un grupo de señales de entrada y de salida. Esquemáticamente esto se representa con un bloque que establece la relación causa-efecto entra las entradas y las salidas.

Bloque funcional

Sistemas de Contol

Un sistema define la relación entrada-salida (causa-efecto) por medio de un operador H que le es propio.

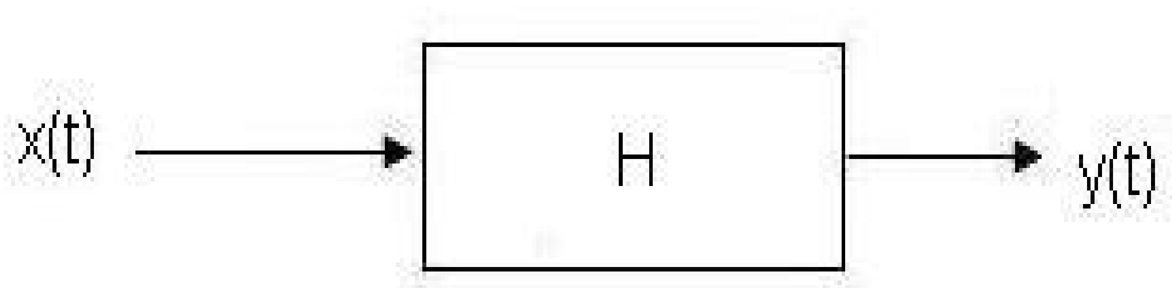


En el tiempo continuo la variable de tiempo es ***t*** en seg.

En el tiempo discreto la variable de tiempo es ***n*** adimensional.

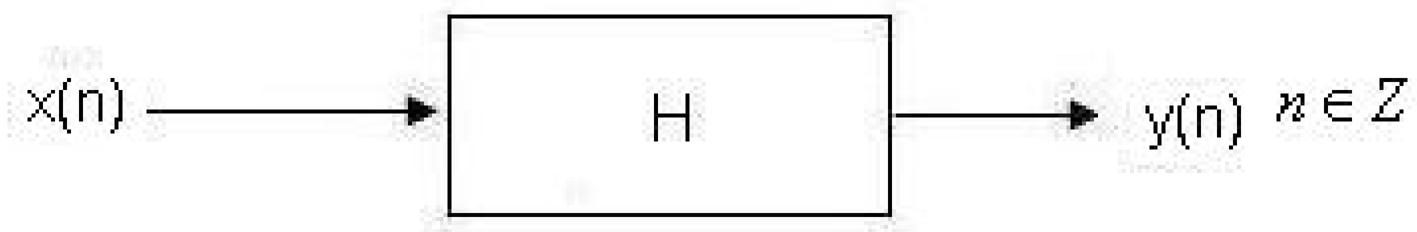
Sistemas de Contol

Un sistema continuo es aquel cuyas variables principales o significativas se desarrollan y expresan en el dominio del tiempo continuo t.



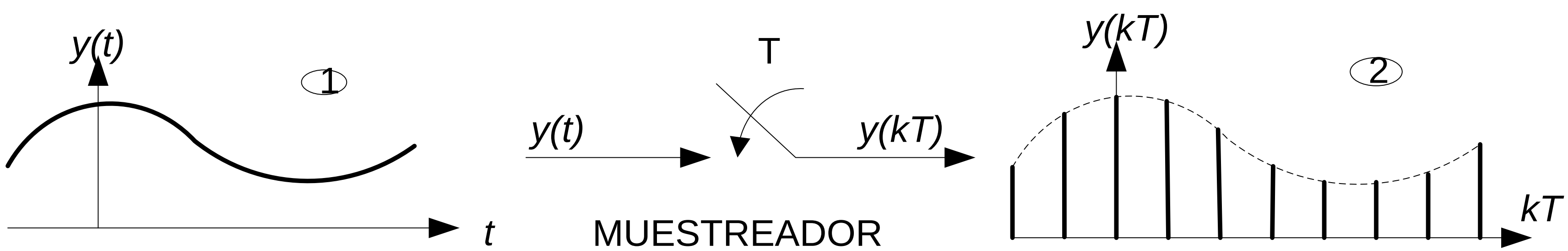
$t \in R$

Un sistema discreto es aquel cuyas variables principales se desarrollan y expresan en el dominio del tiempo discreto ***n***, donde la ***n*** toma valores enteros y se le puede asociar con el numero de la muestra que constituye a la señal.



Sistemas de Contol

Los dominios de tiempo continuo *t* y discreto *n* se relación a través del concepto de muestreo uniforme, ideal

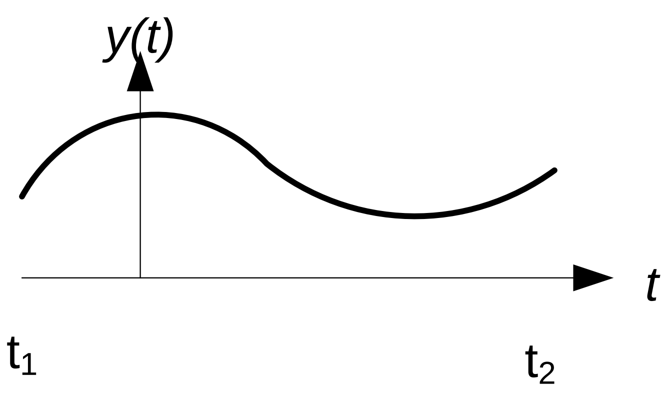


Señal continua

Señal discreta compuesta por una secuencia de impulsos

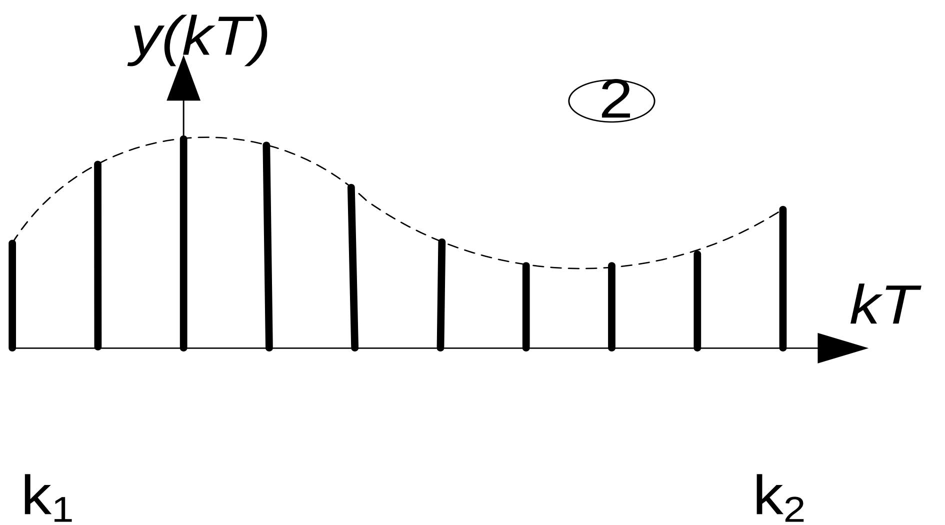
Sistemas de Contol

Una señal de tiempo continuo *t* es aquella que se manifiesta en un intervalo de valores reales de la variable independiente



Señal continua

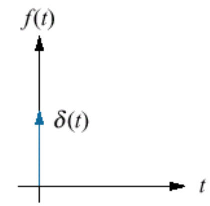
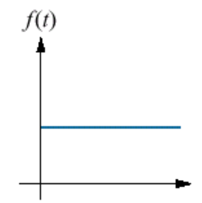
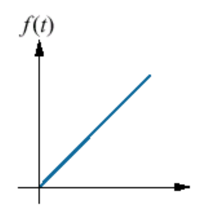
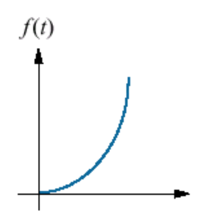
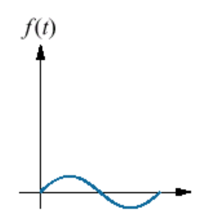
Una señal de tiempo discreto ***n*** es aquella que se manifiesta solamente en ciertos instantes de tiempo, en un intervalo de valores enteros de la variable independiente



Señal discreta

Sistemas de Contol

Señales comunes

Input	Function	Description	Sketch	Use
Impulse	$\delta(t)$	$\delta(t) = \infty$ for $0- < t < 0+$ $= 0$ elsewhere $\int_{0-}^{0+} \delta(t)\,dt = 1$		Transient response Modeling
Step	$u(t)$	$u(t) = 1$ for $t > 0$ $= 0$ for $t < 0$		Transient response Steady-state error
Ramp	$tu(t)$	$tu(t) = t$ for $t \geq 0$ $= 0$ elsewhere		Steady-state error
Parabola	$\frac{1}{2}t^2u(t)$	$\frac{1}{2}t^2u(t) = \frac{1}{2}t^2$ for $t \geq 0$ $= 0$ elsewhere		Steady-state error
Sinusoid	$\sin \omega t$			Transient response Modeling Steady-state error

Transformadas de *Laplace* y *Z* de funciones comunes

	f(t)	F(s)	F(z)	f(kT)
1.	$u(t)$	$\dfrac{1}{s}$	$\dfrac{z}{z-1}$	$u(kT)$
2.	t	$\dfrac{1}{s^2}$	$\dfrac{Tz}{(z-1)^2}$	kT
3.	t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	$\lim\limits_{a\to 0}(-1)^n \dfrac{d^n}{da^n}\left[\dfrac{z}{z-e^{-aT}}\right]$	$(kT)^n$
4.	e^{-at}	$\dfrac{1}{s+a}$	$\dfrac{z}{z-e^{-aT}}$	e^{-akT}
5.	$t^n e^{-at}$	$\dfrac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	$(-1)^n \dfrac{d^n}{da^n}\left[\dfrac{z}{z-e^{-aT}}\right]$	$(kT)^n e^{-akT}$
6.	$\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\dfrac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z\cos \omega T + 1}$	$\sin \omega kT$
7.	$\cos \omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$	$\dfrac{z(z-\cos \omega T)}{z^2 - 2z\cos \omega T + 1}$	$\cos \omega kT$
8.	$e^{-at}\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\dfrac{ze^{-aT}\sin \omega T}{z^2 - 2ze^{-aT}\cos \omega T + e^{-2aT}}$	$e^{-akT}\sin \omega kT$
9.	$e^{-at}\cos \omega t$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\dfrac{z^2 - ze^{-aT}\cos \omega T}{z^2 - 2ze^{-aT}\cos \omega T + e^{-2aT}}$	$e^{-akT}\cos \omega kT$

Sistemas de Contol

Propiedades de la Transformada de Laplace

Item no.	Theorem	Name
1.	$\mathscr{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$	Definition
2.	$\mathscr{L}[kf(t)] = kF(s)$	Linearity theorem
3.	$\mathscr{L}[f_1(t) + f_2(t)] = F_1(s) + F_2(s)$	Linearity theorem
4.	$\mathscr{L}[e^{-at}f(t)] = F(s+a)$	Frequency shift theorem
5.	$\mathscr{L}[f(t-T)] = e^{-sT}F(s)$	Time shift theorem
6.	$\mathscr{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$	Scaling theorem
7.	$\mathscr{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s) - f(0-)$	Differentiation theorem
8.	$\mathscr{L}\left[\frac{d^2f}{dt^2}\right] = s^2F(s) - sf(0-) - \dot{f}(0-)$	Differentiation theorem
9.	$\mathscr{L}\left[\frac{d^nf}{dt^n}\right] = s^nF(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k}f^{k-1}(0-)$	Differentiation theorem
10.	$\mathscr{L}\left[\int_{0-}^{t} f(\tau)\,d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}$	Integration theorem
11.	$f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s)$	Final value theorem[1]
12.	$f(0+) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$	Initial value theorem[2]

[1] For this theorem to yield correct finite results, all roots of the denominator of $F(s)$ must have negative real parts and no more than one can be at the origin.
[2] For this theorem to be valid, $f(t)$ must be continuous or have a step discontinuity at $t = 0$ (i.e., no impulses or their derivatives at $t = 0$).

Sistemas de Contol

Propiedades de la Transformada Z

	Theorem	Name
1.	$z\{af(t)\} = aF(z)$	Linearity theorem
2.	$z\{f_1(t) + f_2(t)\} = F_1(z) + F_2(z)$	Linearity theorem
3.	$z\{e^{-at}f(t)\} = F(e^{aT}z)$	Complex differentiation
4.	$z\{f(t - nT)\} = z^{-n}F(z)$	Real translation
5.	$z\{tf(t)\} = -Tz\dfrac{dF(z)}{dz}$	Complex differentiation
6.	$f(0) = \lim_{z \to \infty} F(z)$	Initial value theorem
7.	$f(\infty) = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1})F(z)$	Final value theorem

Note: kT may be substituted for t in the table.

Las propiedades básicas de sistemas nos permiten identificar y clasificar las características elementales de los sistemas, para desarrollar sus modelo o representación matemática. Se definen las siguientes:

Linealidad (L), invariancia en el tiempo (I), Causalidad, Estabilidad y condición dinámica.

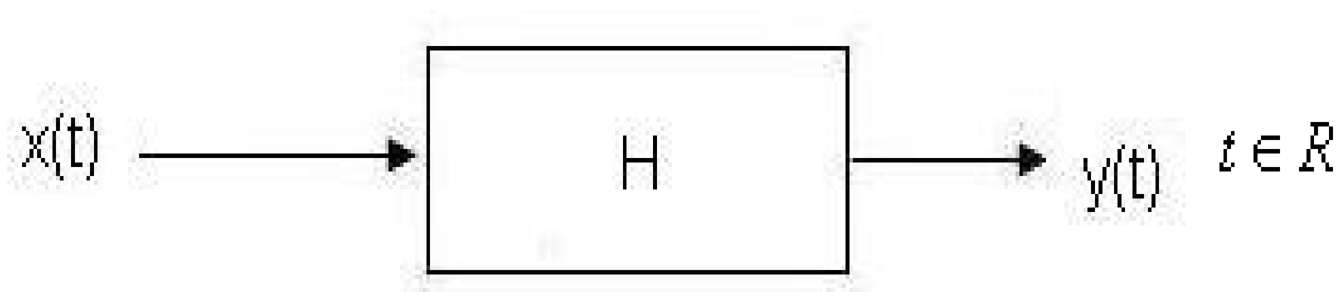
Sistemas de Contol

Linealidad (L). Para el sistema mostrado, dados

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t), x_2(t) \rightarrow y_2(t) \text{ con } \alpha, \beta \text{ escalares.}$$

El sistema es lineal si se cumplen las propiedades de homogeneidad y aditividad, de acuerdo con

$$\alpha \cdot x_1(t) + \beta \cdot x_2(t) \rightarrow \alpha \cdot y_1(t) + \beta \cdot y_2(t)$$

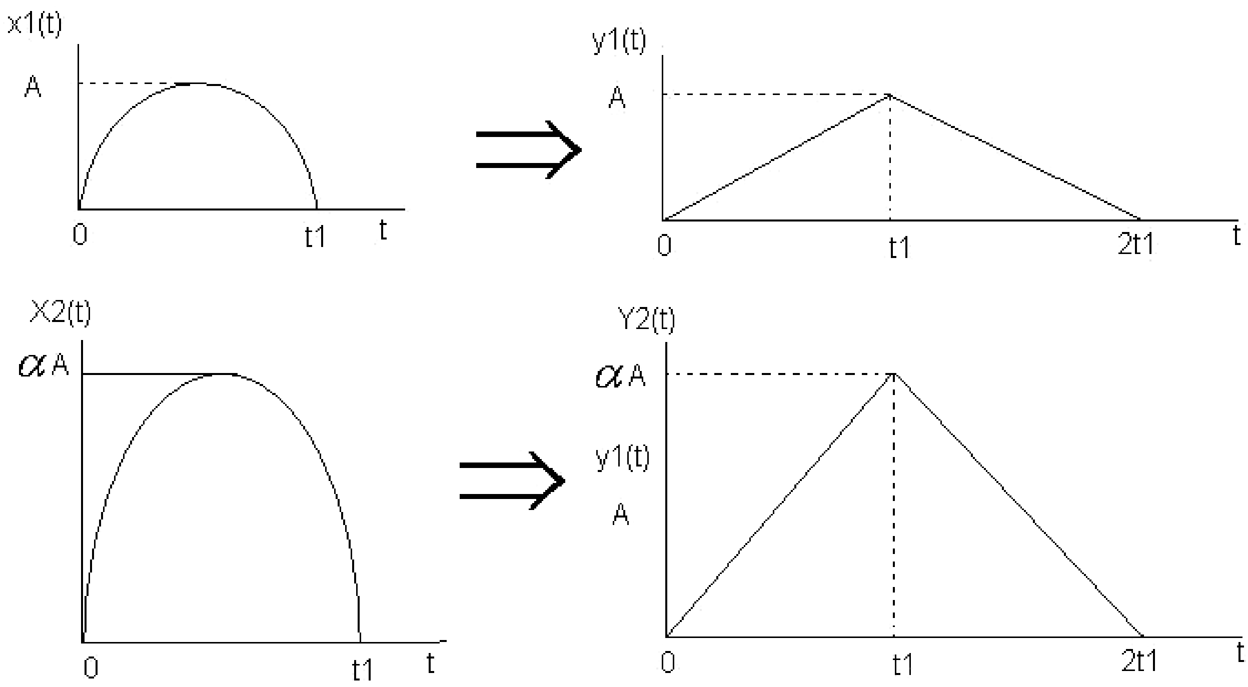


A esto también se le conoce como principio de superposición

Sistemas de Contol

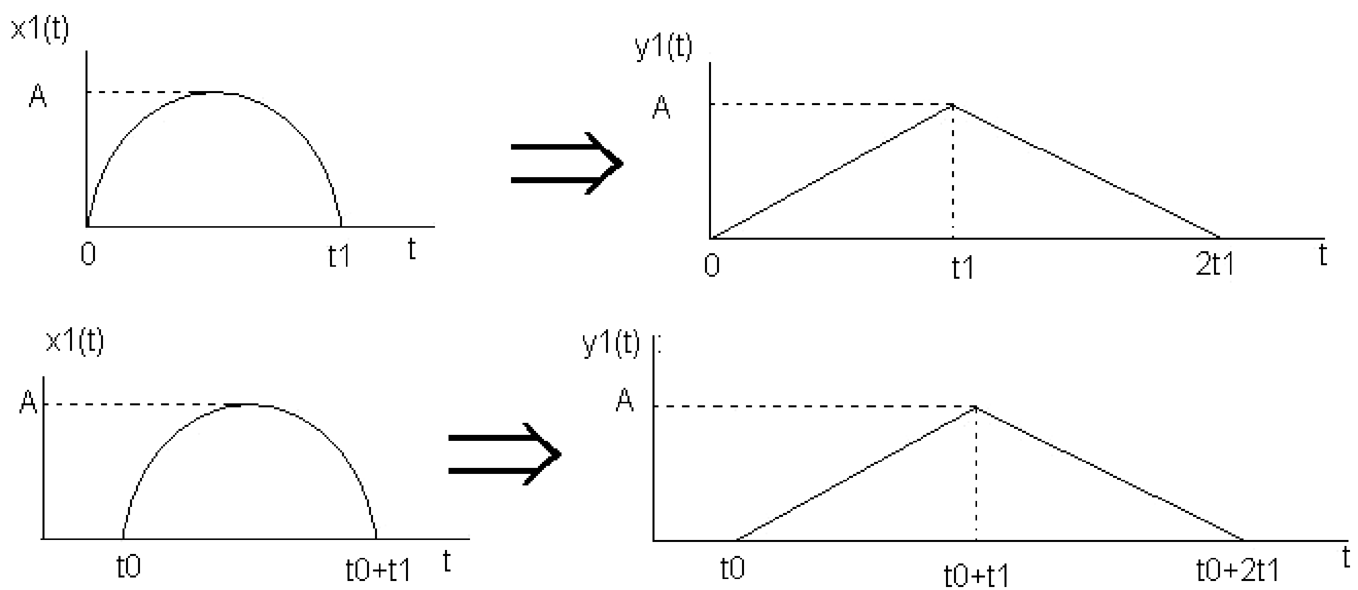
Homogeneidad

$$\alpha \cdot x_1(t) \rightarrow \alpha \cdot y_1(t)$$



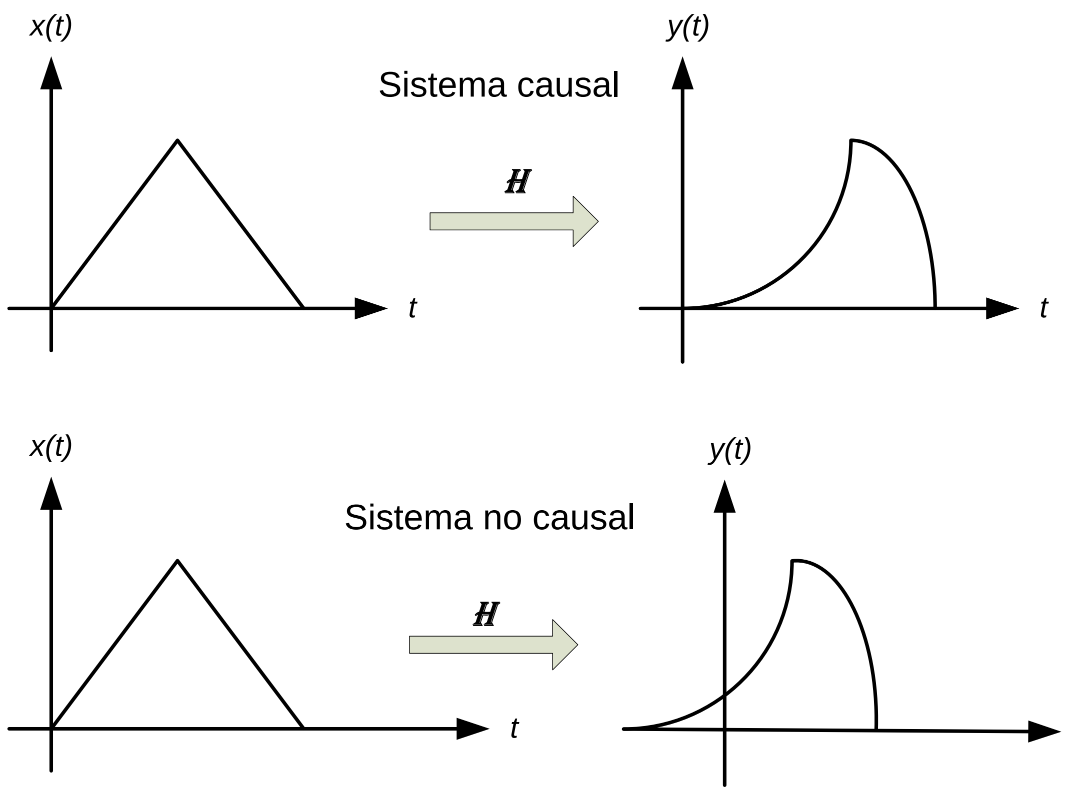
Invariancia (I) o permanencia en el tiempo Un sistema es invariante en el tiempo si al desplazar su entrada una cantidad *to*, la salida muestra el mismo desplazamiento.

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t)$$



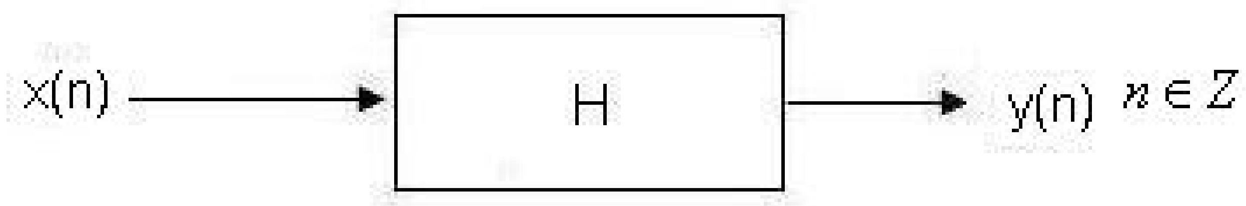
$$x_1(t - t_0) \rightarrow y_1(t - t_0)$$

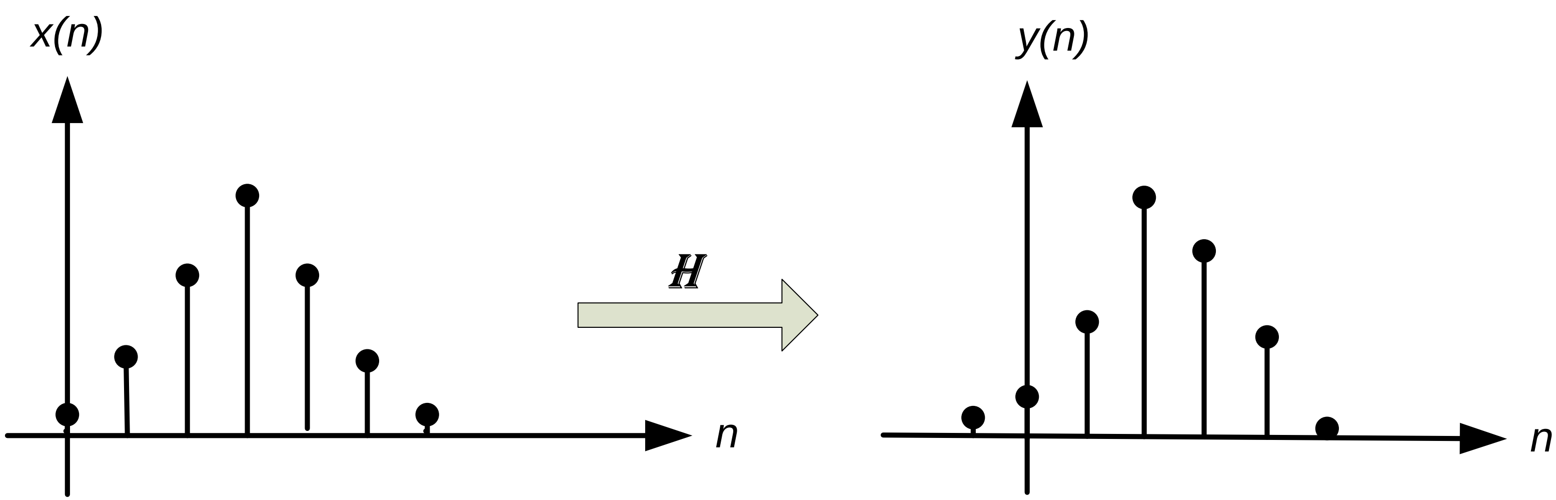
Causalidad. Un sistema es causal si su salida en cualquier instante depende del valor de la entrada en dicho instante y de sus valores anteriores. Se dice que en un sistema causal la salida no se anticipa a la entrada.



Sistemas de Contol

Definición de Estabilidad en el enfoque EASA. Un sistema es estable si al aplicársele cualquier entrada acotada, la salida que resulta también es acotada.

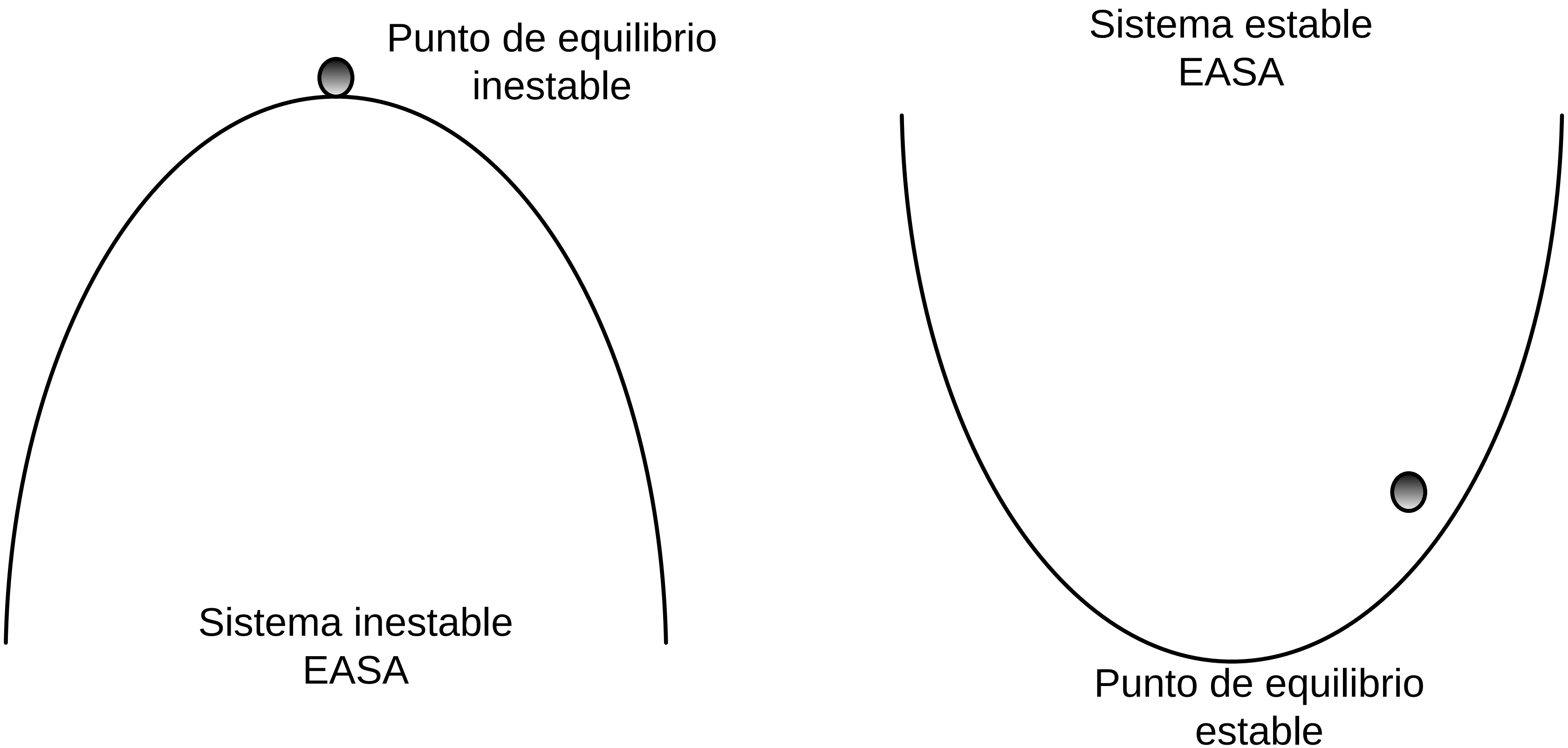




Entrada acotada

Salida acotada

Interpretación de Estabilidad en el enfoque EASA.



Sistemas instantáneos y dinámicos. Un sistema instantáneo, también denominado sin memoria, es aquel cuya salida en un instante cualquiera depende solamente de la entrada en dicho instante.

$$x_1(t_1) \rightarrow y_1(t_1)$$

En los sistemas dinámicos la salida depende del valor de entrada actual y de los anteriores, un ejemplo clásico:

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + a_1\frac{d}{dt}y(t) + a_2 y(t) = b_1\frac{d}{dt}x(t) + b_2 x(t)$$

FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DE SISTEMAS LINEALES E INVARIANTES CON EL TIEMPO

La función de transferencia tiene una trascendencia muy grande en el análisis de sistemas basado en el modelo de entrada-salida. A partir de ella se han desarrollado diversos métodos de interpretación, análisis y diseño de sistemas continuos y discretos. Incluso los importantes conceptos de estabilidad y respuesta en frecuencia han sido abordados tradicionalmente desde esta base.

La función de transferencia caracteriza la relación entrada-salida de componentes o sistemas que pueden describirse por ecuaciones diferenciales (o en diferencias) lineales, invariantes en el tiempo, bajo la suposición de que las condiciones iniciales son nulas.

La función de transferencia es un modelo matemático operacional que relaciona la variable de salida del sistema con la variable de entrada.

La función de transferencia es una caracterización del sistema en sí, independiente de la magnitud y naturaleza de la entrada o función impulsora.

Sistemas de Contol

Función de Transferencia

	TIEMPO CONTINUO	TIEMPO DISCRETO
Definición	$H(s) \leftrightarrow h(t)\ ;\ \ H(s)=\dfrac{Y(s)}{X(s)}$	$H(z) \leftrightarrow h(k)\ ;\ \ H(z)=\dfrac{Y(z)}{X(z)}$
	$H(s)=\dfrac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + b_2 s^{m-2} + \cdots + b_{m-1}s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1}s + a_n} = \dfrac{B(s)}{A(s)}$ Polinomios: *B(s)* de grado *m* y *A(s)* de grado *n*	$H(s)=\dfrac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} + \cdots + b_{n-1}z + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1}z + a_n} = \dfrac{B(z)}{A(z)}$ Polinomio *B(z)* de grado *n* y *A(z)* de grado *n*
Polos y ceros (reales o complejos)	$H(s)=\dfrac{K\prod_{j=1}^{m}(s+c_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)}$ n polos de valores: $-p_i$ m ceros de valores: $-c_j$	$H(z)=\dfrac{K\prod_{j=1}^{n}(z-c_j)}{\prod_{i=1}^{n}(z-p_i)}$ n polos de valores: p_i n ceros de valores: c_j
Obención 1	Transformando la ecuación diferencial del SCLI	Transformando la ecuación en diferencias del SDLI
Obtención 2	Modelando el sistema a partir de sus impedancias	Modelando el sistema a partir de sus retrasos en el tiempo.
Salida	$Y(s)=H(s)X(s)\ ;\ \ y(t)=L^{-1}\{Y(s)\}$	$Y(z)=H(z)X(z)\ ;\ \ y(k)=\mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\}$

Sistemas de Contol

La función de transferencia incluye las unidades necesarias para relacionar la entrada con la salida; pero no expresa ninguna información respecto a la estructura física del sistema (las funciones de transferencia de sistemas físicamente distintos pueden ser idénticas).

Si se conoce la función de transferencia de un sistema, se puede estudiar la salida o respuesta para diversas formas de entrada con el objetivo de lograr una compresión de la naturaleza del sistema.

Si no se conoce la función de transferencia de un sistema, se puede establecer experimentalmente introduciendo entradas conocidas y estudiando la respuesta correspondiente.

Sistemas de Contol

Expansión en fracciones parciales y antitransformación

Expansion en fracciones parciales, caso 1: polos reales distintos	$Y(s)=\dfrac{d_1}{(s+p_1)}+\dfrac{d_2}{(s+p_2)}+\cdots+\dfrac{d_n}{(s+p_n)}$	$Y(z)=d_0+\dfrac{d_1 z}{(z-p_1)}+\dfrac{d_2 z}{(z-p_2)}+\cdots+\dfrac{d_n z}{(z-p_n)}$
Antitransformando por tablas	$y(t)=\left[d_1 e^{-p_1 t}+d_2 e^{-p_2 t}+\cdots+d_n e^{-p_n t}\right]u_{-1}(t)$	$y(k)=\left[d_0\delta(k)+d_1 p_1^k+d_2 p_2^k+\cdots+d_n p_n^k\right]u_{-1}(k)$
Expansion en fracciones parciales, caso 2: polos complejos conjugados	$Y(s)=\dfrac{d_1}{s+p_1}+\dfrac{d_2}{s+p_2}+\ldots+\dfrac{d_l}{s+(\xi_l\omega_{nl}-j\omega_{dl})}+$ $+\dfrac{d_{l*}}{s+(\xi_l\omega_{nl}+j\omega_{dl})}+\cdots+\dfrac{d_n}{s+p_n}$	$Y(z)=d_0+\dfrac{d_1 z}{z-p_1}+\dfrac{d_2 z}{z-p_2}+\mathrm{K}+\dfrac{d_l z}{z-\rho_l e^{j\theta_l}}+$ $+\dfrac{d_{l*} z}{z-\rho_l e^{-j\theta_l}}+\mathrm{K}+\dfrac{d_n z}{z-p_n}$
Antitransformando por tablas	$y(t)=d_1 e^{-p_1 t}+d_2 e^{-p_2 t}+\ldots+D_l e^{-\xi_l\omega_{nl}t}\cos(\omega_{dl}t-\phi_l)+$ $\ldots+d_n e^{-p_n t}$ $t\geq 0$	$y(k)=d_0\delta(k)+d_1 p_1^k+d_2 p_2^k+\cdots+D_l\rho_l^k\cos(\theta_l k-\phi_l)+$ $\cdots+d_n p_n^k$ $k\geq 0$

Sistemas de Contol

Los sistemas de orden superior siguen el mismo análisis que los básicos de 1° y 2° orden, ya que se puede considerar que un sistema de orden superior es la superposición de sistemas básicos, como lo muestra la descomposición en fracciones parciales. Cada componente de esta superposición esta ponderado por un coeficiente el cual le da peso a la función exponencial o trigonométrica correspondiente a los términos de 1er y 2° orden. Del planteamiento anterior se derivan 2 aspectos fundamentales en el análisis de sistemas de control: la estabilidad y la presencia de polos dominantes.