

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código:	MADO-70
		Versión:	01
		Página:	1 / 78
		Sección ISO:	8.3
		Fecha de emisión:	2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

# Manual de Prácticas

## del Laboratorio de

### Análisis de Sistemas y Señales

Elaborado por:	Revisado por:	Autorizado por:	Vigente desde:
M.I. Isaac Ortega Velázquez M.I. Natanael Vieyra Valencia M.I. Michael Rojas Garcia M.I. Hugo Andrés Franco de los reyes Ing. Gloria Mata Hernández	M.I. Isaac Ortega Velázquez M.I. Michael Rojas Garcia Ing. Víctor Manuel Sánchez Esquivel Ing. Abel Villanueva Peña	Dr. Paul Rolando Maya Ortiz	28/01/2019
Modificación:	Dr. Michael Jossué Rojas García	08/2025	

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código:	MADO-70
		Versión:	01
		Página:	2 / 78
		Sección ISO:	8.3
		Fecha de emisión:	2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento:	Laboratorio de control y robótica
		La impresión de este documento es una copia no controlada	

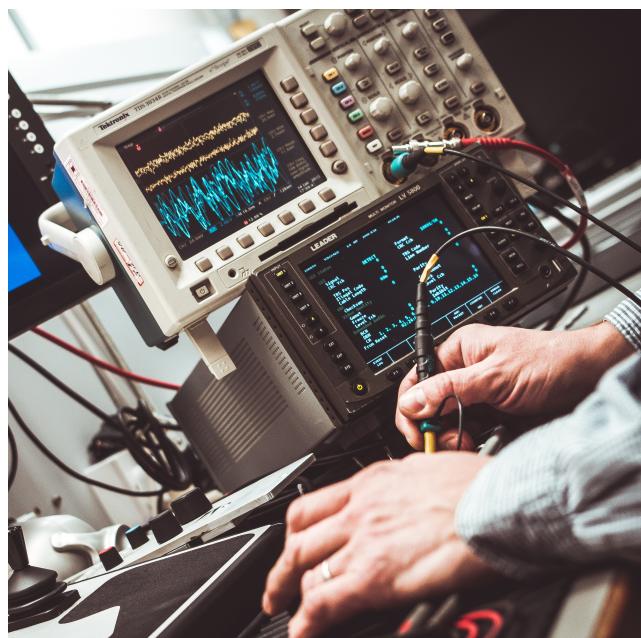
# Índice de prácticas

Práctica N° 1 Manipulación Experimental de Señales	3
Práctica N° 2 Respuesta de Sistemas Dinámicos	18
Práctica N° 3 Función de transferencia y sistemas de primer orden	36
Práctica N° 4 Transformada Z y aplicaciones a sistemas de tiempo discreto	46
Práctica N° 5 Transformada de Fourier	66
Bibliografía	78

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código: MADO-70
		Versión: 01
		Página: 3 / 78
		Sección ISO: 8.3
		Fecha de emisión: 2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica
		La impresión de este documento es una copia no controlada

# Práctica N° 1

## Manipulación Experimental de Señales



Apellidos y nombres:			
Grupo:	Profesor:	Calificación:	
Brigada:			
Semestre:	Fecha de ejecución:		

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código: Versión: Página: Sección ISO: Fecha de emisión:	MADO-70 01 4 / 78 8.3 2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

## Objetivos

- ☒ El alumno conocerá el uso básico de instrumentos a partir de la implementación de medios digitales como simuladores y aplicaciones.
- ☒ El alumno reconocerá las señales de prueba básicas en la ingeniería y las relacionará con las señales del análisis teórico.
- ☒ El alumno será capaz de inferir el concepto de sistema a través de la experimentación, y así lograr atribuir diversas características a los mismos.

## Recursos

1. Software
  - a) Matlab-Simulink 2019b o superior.
  - b) Un dispositivo con android.
2. Equipos, instrumentos, herramientas y accesorios proporcionados por el laboratorio
  - a) 1 Generador de señales.
  - b) 1 Osciloscopio.
  - c) 1 Fuente de alimentación *PS1/EV*.
  - d) 1 Multímetro con puntas.
  - e) 3 Cables de alimentación.
  - f) 1 Juego de cables B-B banana.
  - g) 1 Multicontacto.
3. Material proporcionado por el alumno
  - a) 3 Cables bnc-caimán.
  - b) 6 cables caimán-caíman.
  - c) Alambre de calibre 22.
  - d) Pinzas de corte.
  - e) Tarjeta de proyectos *protoboard*.
  - f) 2 Resistores de  $1[k\Omega]$  a  $\frac{1}{2}[W]$ .
  - g) 3 Capacitores cerámicos de varios valores.
  - h) 3 Capacitores electrolíticos de varios valores a  $50[V]$ .
  - i) 3 Potenciómetros o resistencias variables de  $10[k\Omega]$ .
  - j) 4 Amplificadores operacionales LM741 o TL081.

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código: MADO-70
		Versión: 01
		Página: 5 / 78
		Sección ISO: 8.3
		Fecha de emisión: 2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería	Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica	
La impresión de este documento es una copia no controlada		

## Seguridad en la ejecución de la actividad

Peligro o fuente de energía		Riesgo asociado	Medidas de control	Verificación
1 <sup>ro</sup>	Voltaje alterno		Electrocución	Identificar los puntos energizados antes de realizar la actividad y evitar contacto.
2 <sup>do</sup>	Voltaje continuo		Daño a equipo	Verificar polaridad y nivel antes de realizar la conexión del equipo o dispositivo.
3 <sup>do</sup>	Herramientas de mano		Lesiones en manos	Verificar el buen estado de las herramientas y usar siempre la correcta.
Apellidos y nombres:				

## Fundamento teórico

Según la Real Academia de la lengua española, la Ingeniería es el conjunto de conocimientos y técnicas que permiten aplicar el saber científico a la utilización de la materia y las fuentes de energía; otra definición de ingeniería es aquella que relaciona el quehacer científico y tecnológico del ingeniero con el ámbito social, es decir, la ingeniería es una actividad humana orientada a crear nuevos artefactos, algoritmos, procesos y sistemas para el beneficio de la humanidad; la definición que clasifica a la ingeniería como una profesión dice que se encarga de aplicar conocimientos científicos y tecnológicos que con base en la experiencia y el empleo de energía e información con el objetivo de resolver problemas de manera eficaz respetando las restricciones económicas, temporales y ambientales de su entorno.

Con base en las definiciones anteriores, es posible afirmar que la ingeniería se dedica al estudio de su entorno para lograr objetivos. Si se toma en cuenta que el entorno depende de la aplicación, es decir, podemos llamar entorno a una computadora, una incubadora con material genético hasta a una mina con sal, es necesario, en cualquiera que sea el caso, comunicar o saber que es lo que sucede dentro de ese entorno, es aquí donde se encuentra la primera definición importante para la asignatura, ya que a cada entorno dentro de la ingeniería se denomina **sistema**.

Un sistema es un elemento o conjunto de elementos que interactúan entre sí para cumplir un objetivo específico. Existen una gran cantidad de sistemas, como ejemplo están los físicos, económicos, sociales, naturales etc(...). En todos estos casos para realizar el objetivo para el cual se diseñaron necesitan ser excitados, a esta excitación se le conoce como entrada, de acuerdo con la entrada el sistema adquiere un comportamiento asociado a dicha excitación, a dicho comportamiento se le conoce como salida, de esta forma es posible tener una comunicación constante con los diferentes sistemas, por ejemplo, el sistema respiratorio es el encargado de realizar un intercambio de gases para lograr la oxidación de los alimentos<sup>1</sup>, donde dicho sistema se conforma de elementos que al interactuar lograr el objetivo de síntesis de oxígeno, en la Figura 1.

Otro ejemplo es el sistema legal, que es un conjunto de subsistemas desde la demanda hasta el juicio, en donde el funcionamiento del sistema depende de la entrada y por lo tanto la salida u objetivo logrado también.

<sup>1</sup>Atender la actividad uno del trabajo previo

 <b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código: MADO-70 Versión: 01 Página: 6 / 78 Sección ISO: 8.3 Fecha de emisión: 2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería	Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica
La impresión de este documento es una copia no controlada	

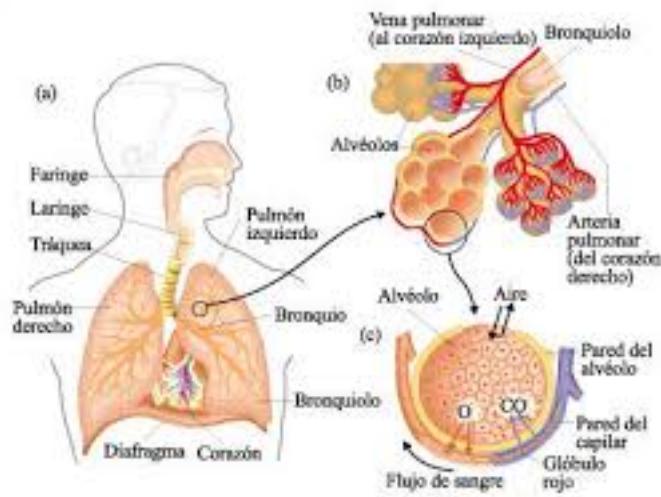


Figura 1. Sistema respiratorio

A estas variables, entrada y salida, dentro del desarrollo de la ingeniería se les denomina **señales**.

La primera aproximación que se tiene de una señal se encuentra asociada a la información que existe en el sistema para su análisis, pero dentro del ámbito de la física una señal es una función que posee una gran cantidad de parámetros generalmente asociados a magnitudes físicas, las señales típicamente contienen datos sobre la conducta o naturaleza de un fenómeno o sistema. En el análisis de sistemas físicos existen señales que son consideradas como prueba empleadas para conocer cual es el comportamiento de los sistemas y obtener características, tanto físicas como matemáticas, las señales que se emplean son, el escalón, la rampa y la señal senoidal. Para poder realizar pruebas a los sistemas es necesario contar con equipo de laboratorio de investigación básica<sup>2</sup> que permita la interacción del experimentador con el sistema, dicho equipo es el generador de funciones y el osciloscopio.

## Generador de funciones/señales

El generador de funciones es un dispositivo cuya salida corresponde a una de las tres señales de prueba básicas, un tren de pulsos, una señal rampa o diente de sierra, y una señal senoidal, todas ellas con la posibilidad de aumentar y disminuir su amplitud y su frecuencia. En la Figura 2 se muestra la cara frontal de dicho generador<sup>3</sup>.

El principio de funcionamiento del generador de señales se basa en la realización de circuitos osciladores, estos circuitos son capaces de generar señales periódicas a un amplitud y frecuencia determinada; existen circuitos integrados que son capaces de generar los tres tipos de señales y con base en diversas configuraciones modificar

<sup>2</sup>En el contexto de investigación de ciencias físicas

<sup>3</sup>Atender el punto tres del trabajo previo

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código:	MADO-70
		Versión:	01
		Página:	7 / 78
		Sección ISO:	8.3
		Fecha de emisión:	2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería	Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica		
La impresión de este documento es una copia no controlada			



Figura 2. Generador de señales

la amplitud y la frecuencia.

## Osciloscopio

El osciloscopio de los instrumentos de medición más empleado en las ramas de ingeniería eléctrica, computación y telecomunicaciones, esto se debe a que con este instrumento es posible observar de manera inmediata cual es el comportamiento del sistema que se está analizando. El osciloscopio consta con una interfaz que permite visualizar señales eléctricas, y algunos más modernos permiten realizar operaciones como multiplicación, resta, adición, etc(...); de las señales que se encuentran midiendo, en la Figura 3 se muestra la cara frontal de un osciloscopio.

El osciloscopio no sólo permite visualizar las señales, también permite medir su período, su amplitud y valores promedio. Existen dos tipos de osciloscopio, los analógicos y los digitales, los primeros trabajan directamente con la señal que se desea visualizar, los digitales necesitan una etapa de descomposición en una señal digital con el fin de almacenarla, ya sea para realizar algún proceso después de adquirida o simplemente guardarla. Ambos tipos tienen sus ventajas y desventajas, el objetivo de la práctica es brindar una noción básica del uso de este instrumento, en cursos posteriores se analizará de manera más concreta cada una de estas opciones.

## Operación con señales

Para la realización de esta práctica es necesario realizar una introducción acerca de las operaciones básicas que puede realizar un sistema, estas operaciones para esta práctica se encuentran caracterizados con circuitos eléctricos, es importante mencionar que estas operaciones las puede realizar cualquier sistema.

### Suma y resta

La suma es la más básica de las operaciones con señales, esta operación es considerada sin memoria ya que solo depende del valor actual de las señales para poder ser realizada. Los sistemas que realicen solo las suma de señales son sistemas estáticos o sin memoria, en la Figura 4 se muestra el esquema básico de la señal.

 <b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código: MADO-70 Versión: 01 Página: 8 / 78 Sección ISO: 8.3 Fecha de emisión: 2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería	Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica
La impresión de este documento es una copia no controlada	

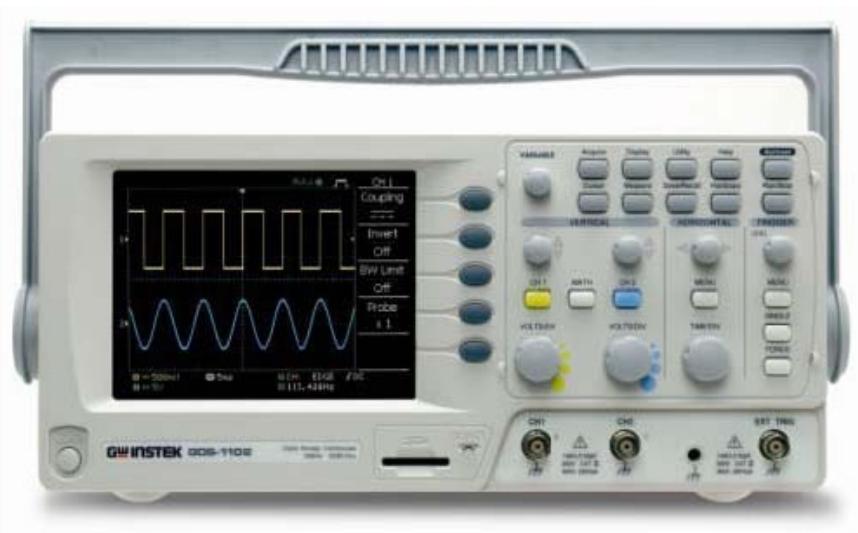


Figura 3. Osciloscopio

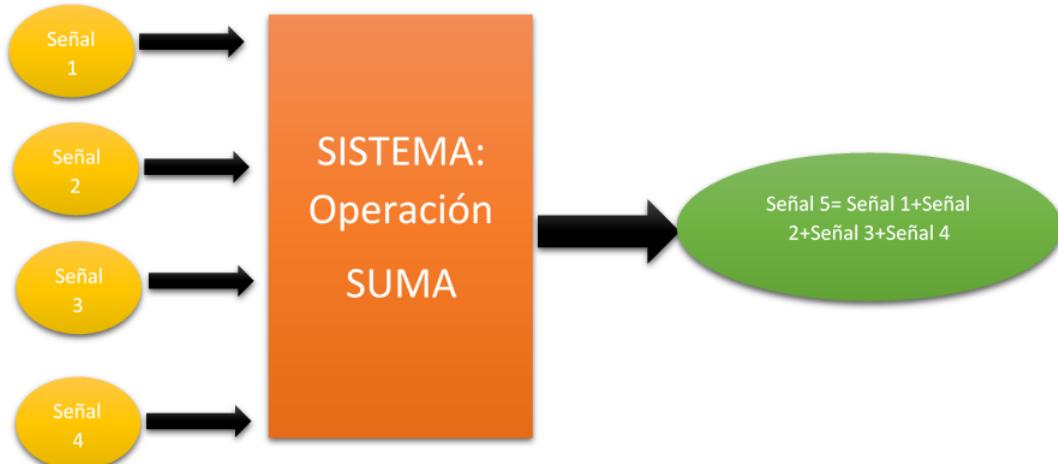


Figura 4. Suma

La suma se define de la siguiente forma, sean  $n$  señales que dependen del tiempo  $\{s_1(t), s_2(t), s_3(t), \dots, s_n(t)\}$ , se dice que el sistema realiza una suma de señales si la salida del sistema  $y(t)$  es equivalente a

$$y(t) = s_1(t) + s_2(t) + s_3(t) + \dots + s_n(t) \quad (1)$$

La resta es una operación aritmética que al considerar el siguiente conjunto de señales dependientes del

 <b>Manual de prácticas del</b> <b>Laboratorio de</b> <b>Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código: MADO-70 Versión: 01 Página: 9 / 78 Sección ISO: 8.3 Fecha de emisión: 2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería	Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica
La impresión de este documento es una copia no controlada	

tiempo  $\{s_1(t), s_2(t), s_3(t), \dots, s_n(t)\}$ , la salida del sistema resta,  $y(t)$ , se define como

$$y(t) = -s_1(t) - s_2(t) - s_3(t) - \dots - s_n(t) \quad (2)$$

por lo tanto la resta también es considerada una operación sin memoria.

### Escalamiento de amplitud

Existen dos tipos de escalamiento de amplitud, el escalamiento positivo y el escalamiento negativo, en la Figura 5 se muestra el esquema general de estos tipos de escalamiento.

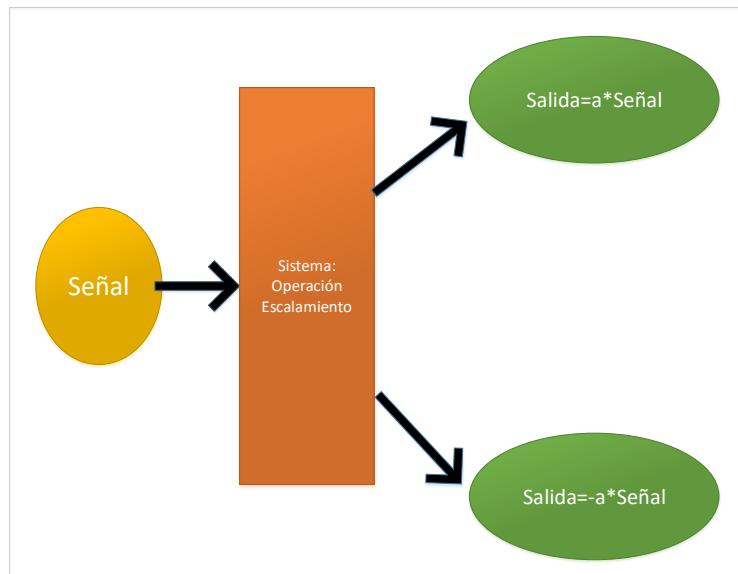


Figura 5. Escalamiento en amplitud

El escalamiento positivo se define de la siguiente manera, sea  $a$  una constante y una señal que varía en el tiempo  $s(t)$ , la salida  $y(t)$  de un sistema que escala la amplitud de una señal es la siguiente

$$y(t) = a(s(t)) \quad (3)$$

es decir, la amplitud de la señal crecerá o se atenuará con un factor de  $a$ .

El escalamiento negativo se define de la siguiente forma, sea una constante  $a$  y una señal variante en el tiempo  $s(t)$ , la salida  $y(t)$  de un sistema que escala de forma negativa la amplitud de una señal se define de la siguiente forma

$$y(t) = -a(s(t)) \quad (4)$$

 <b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código: MADO-70 Versión: 01 Página: 10 / 78 Sección ISO: 8.3 Fecha de emisión: 2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería	Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica
La impresión de este documento es una copia no controlada	

dentro de la práctica a los sistemas que tienen esta característica se les denomina sistemas inversores, es decir, cambian el signo de la señal de salida.

Debido a que estos sistemas sólo dependen del valor actual de la señal, también son considerados sistemas sin memoria o estáticos.

### Integral y derivada

La derivada es una operación que aproxima de manera infinitesimal el límite de la variación de una función a un punto, en otras palabras la derivada de una función representa la tasa de cambio de ésta con respecto del tiempo, el esquema del sistema se muestra en la Figura 6.

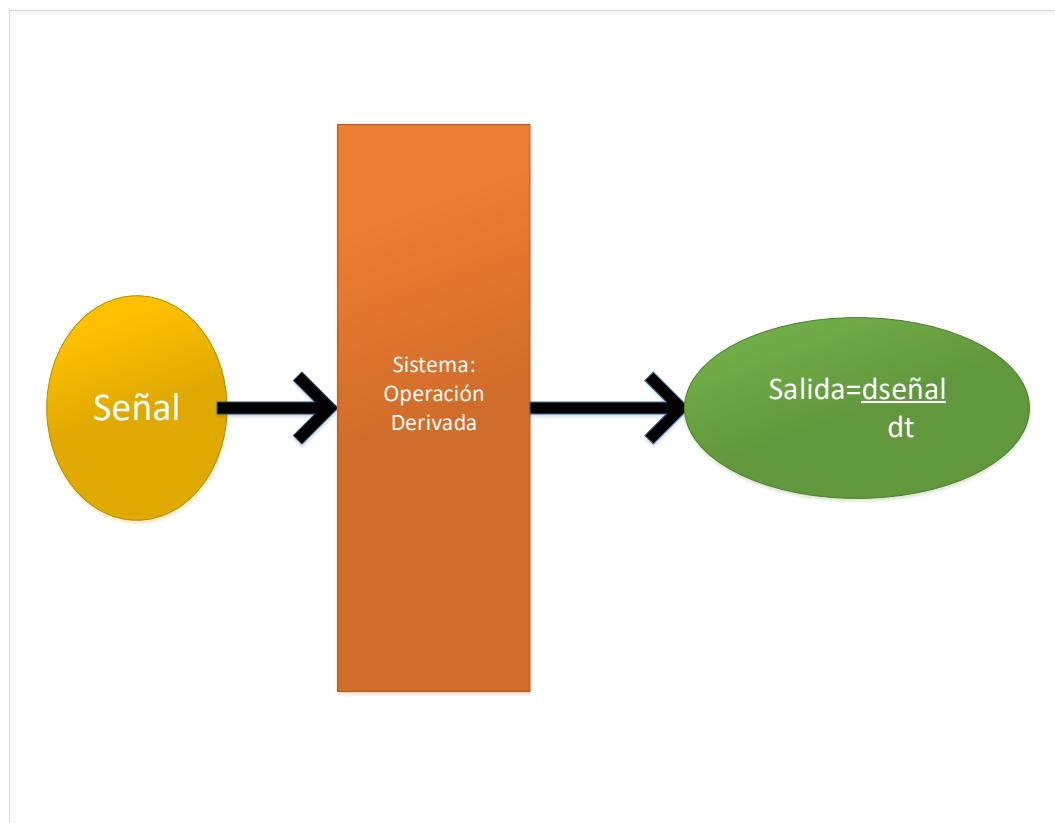


Figura 6. Derivada

Suponga una señal continua y variante en el tiempo  $s(t)$ , la salida del sistema  $y(t)$  es la siguiente

$$y(t) = \frac{d}{dt} s(t) \quad (5)$$

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código: MADO-70
		Versión: 01
		Página: 11 / 78
		Sección ISO: 8.3
		Fecha de emisión: 2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica
La impresión de este documento es una copia no controlada		

en este caso la salida del sistema que realiza la operación derivada depende de los valores pasados así como de los actuales, esto se debe a que la derivada se calcula para cada tiempo  $t$  entonces la salida es

$$y(t) = \frac{d}{dt} s(t)|_{t=0} + \frac{d}{dt} s(t)|_{t=t_1} + \cdots + \frac{d}{dt} s(t)|_{t=t_n} \quad (6)$$

por lo tanto el sistema cuya operación sea una derivada es un sistema dinámico o con memoria.

La operación recíproca de la derivada es la integral, esta operación es la suma de áreas de cuadrados de un valor infinitesimal sobre un período de tiempo específico. Sea una señal  $s(t)$  la salida del sistema  $y(t)$  para la operación de integrar es la siguiente

$$y(t) = \int_{t_0}^{t_1} s(t) dt \quad (7)$$

los sistemas que realicen la integral como operación son considerados sistemas dinámicos.

### Operaciones logarítmica

Este tipo de sistemas realizan dos operaciones, logaritmos y antilogaritmos. Sea una señal  $s(t)$ , la salida del sistema  $y(t)$  se define de la siguiente forma

$$y(t) = \log(s(t)) \quad (8)$$

mientras que el antilogaritmo queda definido como

$$y(t) = \text{antilog}(s(t)) \quad (9)$$

### Sistemas seguidores

Los sistemas seguidores son muy en la ingeniería, son sistemas estáticos y su principal función es acoplar diferentes sistemas, la salida de este sistema esta dado por la siguiente ecuación

$$y(t) = s(t) \quad (10)$$

donde  $y(t)$  es la salida del sistema y  $s(t)$  la entrada.

## Trabajo Previo

Para la introducción de la práctica es necesario que se observen los siguientes videos

1. <https://www.youtube.com/watch?v=AdLMdNuetD8>
2. [https://www.youtube.com/watch?v=ynftt\\_j0r9g](https://www.youtube.com/watch?v=ynftt_j0r9g)

 <b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código: MADO-70 Versión: 01 Página: 12 / 78 Sección ISO: 8.3 Fecha de emisión: 2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería	Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica
La impresión de este documento es una copia no controlada	

## Diagramas eléctricos

Para poder desarrollar la actividad es necesario armar previo a la sesión de laboratorio los siguientes circuitos.

### Sistema 1

El esquemático del sistema es

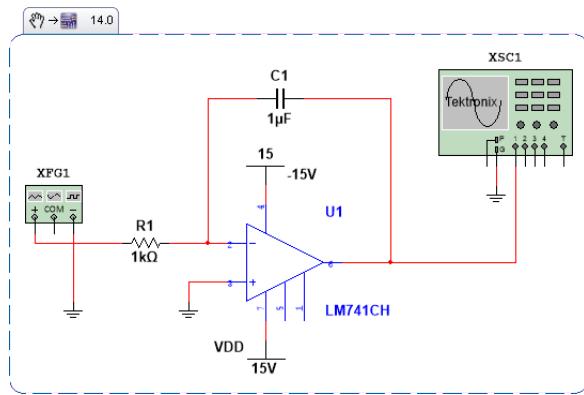


Figura 7. Sistema uno

### Sistema 2

El esquemático del sistema es

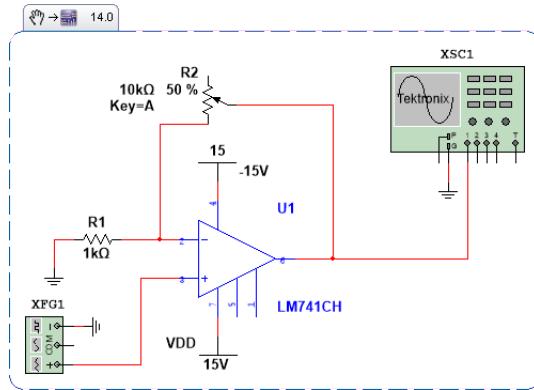


Figura 8. Sistema dos

### Sistema 3

El esquemático del sistema es

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código: MADO-70 Versión: 01 Página: 13 / 78 Sección ISO: 8.3 Fecha de emisión: 2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica
La impresión de este documento es una copia no controlada		

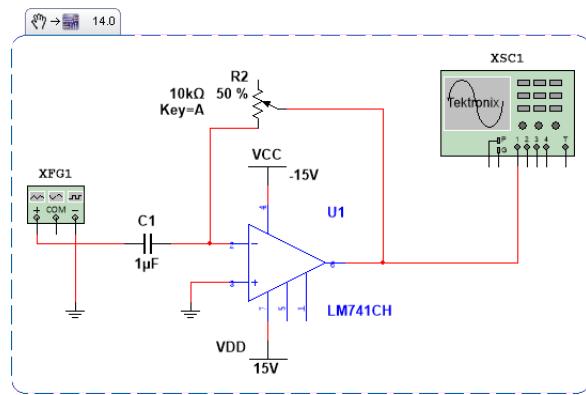


Figura 9. Sistema tres

#### Sistema 4

El esquemático del sistema es

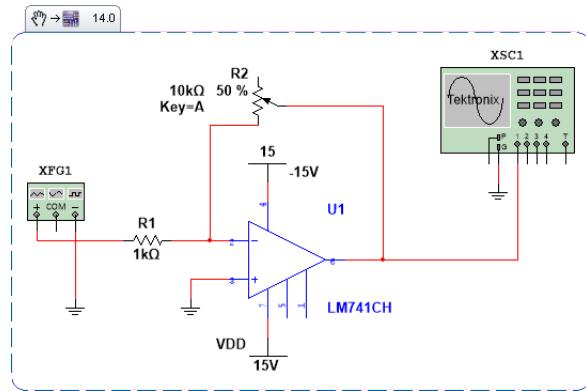


Figura 10. Sistema cuatro

En todos los sistemas anteriores el circuito integrado es el *LM741*. Para mayor información a cerca de la conexión de este circuito consulte el siguiente documento <http://www.ti.com/lit/ds/symlink/lm741.pdf>

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código: MADO-70
		Versión: 01
		Página: 14 / 78
		Sección ISO: 8.3
		Fecha de emisión: 2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica
		La impresión de este documento es una copia no controlada

## Desarrollo de la actividad

1. Identifique cada una de las partes del generador de señales mostrado en la Figura 11

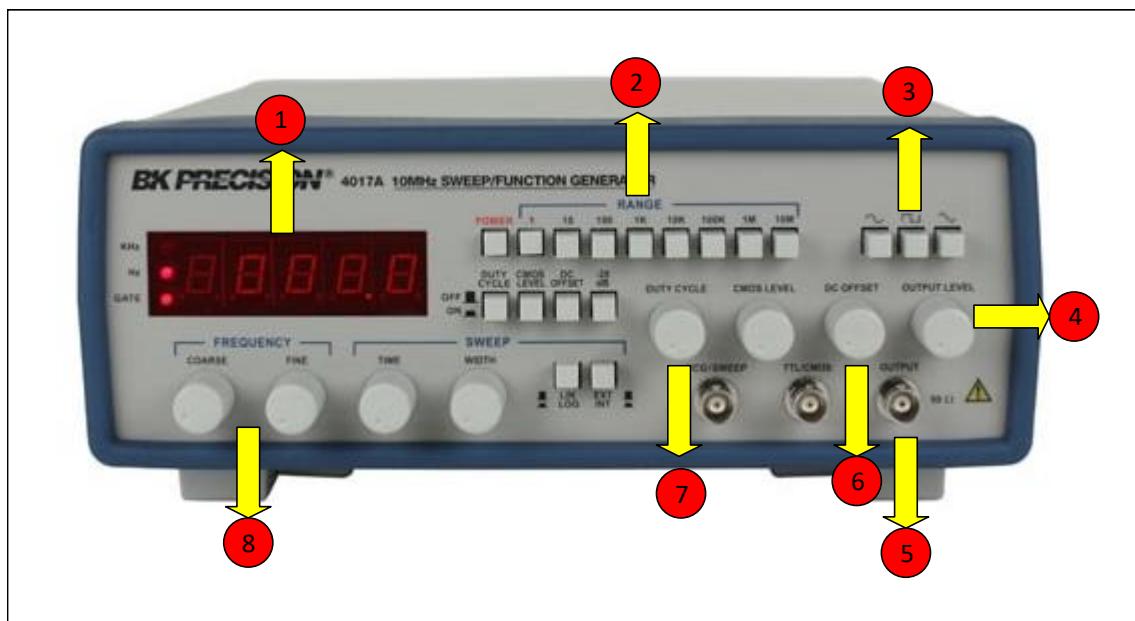


Figura 11. Generador de Señales

Número	Parte
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	

2. Identifique cada una de las partes del osciloscopio mostrado en la Figura 12.

 <b>Manual de prácticas del</b> <b>Laboratorio de</b> <b>Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código: MADO-70 Versión: 01 Página: 15 / 78 Sección ISO: 8.3 Fecha de emisión: 2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería	Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica
La impresión de este documento es una copia no controlada	

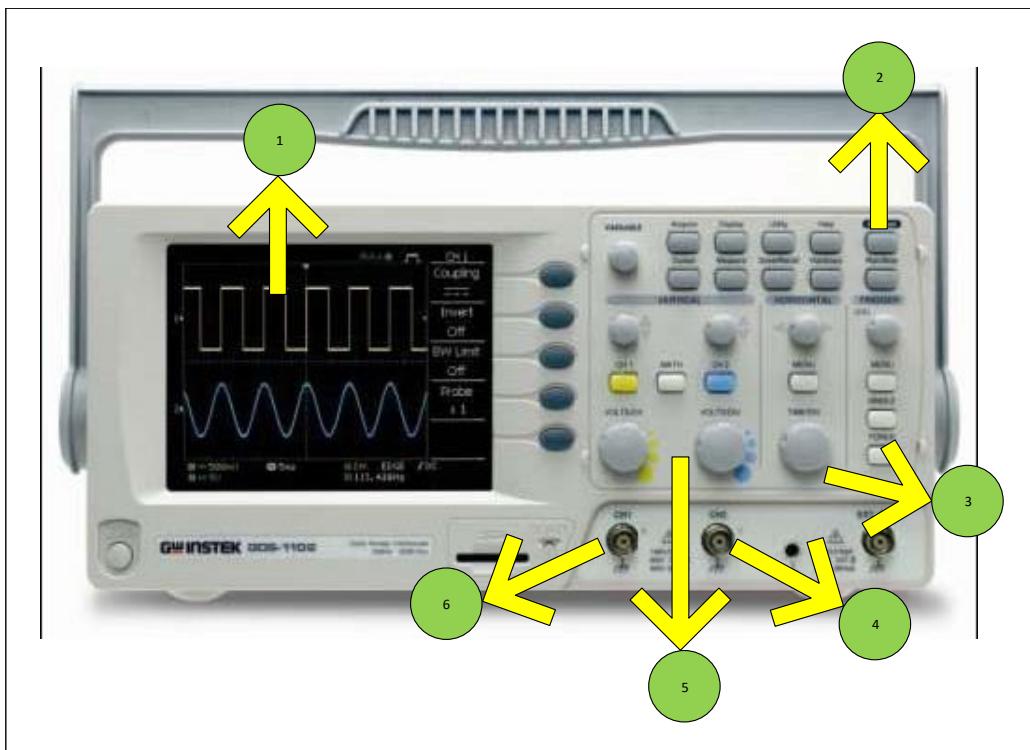


Figura 12. Osciloscopio digital.

Número	Parte
1	
2	
3	
4	
5	
6	

3. Utilizando el generador de funciones y el osciloscopio, obtener y dibujar los oscilogramas correspondientes a las siguientes señales:

- Senoidal  $V_{pp} = 10[V]$ ,  $f = 100[kHz]$
- Senoidal  $V_{pp} = 10[V]$ ,  $f = 100[kHz]$  con un  $V_{offset} = 4,8[V]$
- Cuadrada  $V_p = 5[V]$ ,  $f = 15[kHz]$ , un ciclo de trabajo de 70 %.
- Cuadrada  $V_p = 3[V]$ ,  $f = 150[Hz]$ , un ciclo de trabajo de 20 %.
- Triangular  $V_p = 3[V]$ ,  $f = 65[kHz]$

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código:	MADO-70
		Versión:	01
		Página:	16 / 78
		Sección ISO:	8.3
		Fecha de emisión:	2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

y agregue los oscilogramas obtenidos.

- De acuerdo con los circuitos mostrados en la sección de trabajo previo identifique cada una de las partes del sistema y realice las conexiones correspondientes con el sistema físico proporcionado<sup>4</sup>
  - Cada uno de los sistemas proporcionados posee un número, de acuerdo a este número caracterice cada uno de los sistemas de acuerdo a la operación que realizan

Sistema	Operación
1	
2	
3	
4	

## OBSERVACIONES Y CONCLUSIONES

Nombre:

---

---

---

---

---

Nombre:

---

---

---

---

---

---

<sup>4</sup>Informe a su instructor antes de encender cualquier elemento asociado al esquema.

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código:	MADO-70
		Versión:	01
		Página:	17 / 78
		Sección ISO:	8.3
		Fecha de emisión:	2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento:	Laboratorio de control y robótica
La impresión de este documento es una copia no controlada			

Nombre:

---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---

Nombre:

---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---

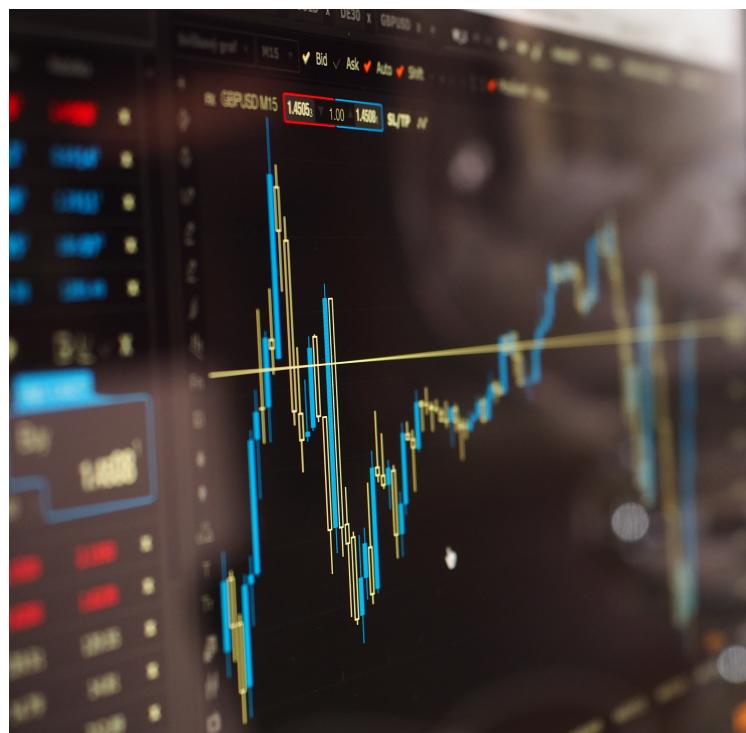


---

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código: MADO-70
		Versión: 01
		Página: 18 / 78
		Sección ISO: 8.3
		Fecha de emisión: 2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica
		La impresión de este documento es una copia no controlada

## Práctica N° 2

### Respuesta de Sistemas Dinámicos



Apellidos y nombres:			
Grupo:	Profesor:	Calificación:	
Brigada:			
Semestre:	Fecha de ejecución:		

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código: MADO-70
		Versión: 01
		Página: 19 / 78
		Sección ISO: 8.3
		Fecha de emisión: 2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica
		La impresión de este documento es una copia no controlada

## Objetivos

- ☒ El alumno interpretará el comportamiento característico de diferentes sistemas físicos a partir del concepto de la respuesta al escalón.
- ☒ El alumno analizará el comportamiento de la respuesta dinámica de sistemas de primer y segundo orden.

## Recursos

1. Software
  - a) Matlab-Simulink 2019b o superior.
2. Equipos, instrumentos, herramientas y accesorios proporcionados por el laboratorio
  - a) Computadora con 2GB RAM mínimo.
  - b) 1 Generador de señales
  - c) 1 Osciloscopio
  - d) 1 Multímetro con juego de puntas y caimanes
  - e) 1 Módulo de temperatura y controlador (G34, TY34/EV)
  - f) 1 Fuente de alimentación
  - g) 1 Juego de cables B-B
  - h) 3 Cables de alimentación
  - i) 1 Transductor STT
  - j) 1 Multicontacto
3. Equipos, instrumentos, herramientas y accesorios proporcionados por el alumno
  - a) 1 potenciómetro de  $5[k\Omega]$
  - b) 1 Capacitor cerámico  $0.22[\mu F]$ .
  - c) 1 Capacitor cerámico  $0.1[\mu F]$ .
  - d) 1 Capacitor electrolítico  $1[\mu F]$ .
  - e) 1 inductor de  $50 [mH]$
  - f) 3 Cables caimán-caimán
  - g) 3 Cables banana-caimán
  - h) 3 Cables banana-banana
  - i) 3 Cables BNC
  - j) 1 protoboard
  - k) Alambre para protoboard
  - l) Pinzas de punta
  - m) Pinzas para cables

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código: MADO-70
		Versión: 01
		Página: 20 / 78
		Sección ISO: 8.3
		Fecha de emisión: 2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería	Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica	
La impresión de este documento es una copia no controlada		

## Seguridad en la ejecución de la actividad

Peligro o fuente de energía		Riesgo asociado	Medidas de control	Verificación
1 <sup>ro</sup>	Voltaje alterno		Electrocución	Identificar los puntos energizados antes de realizar la actividad y evitar contacto <input type="checkbox"/>
2 <sup>do</sup>	Voltaje continuo		Daño a equipo	Verificar polaridad y nivel antes de realizar la conexión del equipo o dispositivo <input type="checkbox"/>
3 <sup>do</sup>	Herramientas de mano		Lesiones en manos	Verifique el buen estado de las herramientas y use siempre la correcta <input type="checkbox"/>
Apellidos y nombres:				

## Fundamento teórico

El modelo general de un sistema lineal e invariante en el tiempo (LIT) se muestra en la ecuación (11), en donde los coeficientes son constantes.

$$\sum_{n=0}^N a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = \sum_{n=0}^M b_n \frac{d^n x(t)}{dt(n)} \quad (11)$$

donde  $y(t)$  y  $x(t)$  son las señales de salida y entrada respectivamente.

El orden del sistema está establecido por la derivada de mayor orden, que generalmente corresponde al número de elementos que almacenan energía.

Un sistema de primer orden está caracterizado por tener solamente un elemento capaz de almacenar energía, por lo tanto, se representan por la ecuación diferencial mostrada en la ecuación (12)

$$a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 x(t) \quad (12)$$

misma que se puede expresar en términos de sus parámetros como

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t) \quad (13)$$

donde  $k = \frac{b_0}{a_0}$  es la ganancia y  $\tau = \frac{a_1}{a_0}$  es la constante de tiempo del sistema.

La respuesta al escalón de sistemas de primer orden es como la mostrada en la Figura 13, donde el parámetro  $\tau$ , que depende del modelo matemático del sistema en estudio, es la constante de tiempo del sistema. Los sistemas de segundo orden están representados por la ecuación diferencial mostrada en la ecuación (14)

$$a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y(t) = b_0 x(t) \quad (14)$$

La expresión general anterior puede ser representada en términos de los siguientes parámetros

 <b>Manual de prácticas del</b> <b>Laboratorio de</b> <b>Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código: MADO-70 Versión: 01 Página: 21 / 78 Sección ISO: 8.3 Fecha de emisión: 2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería	Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica
La impresión de este documento es una copia no controlada	

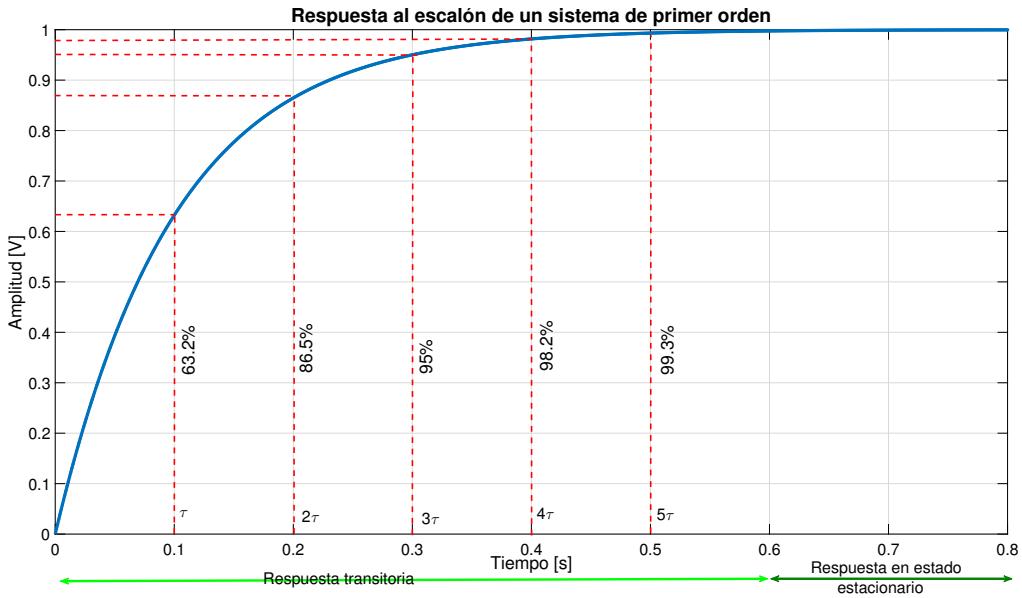


Figura 13. Respuesta de un sistema de 1<sup>er</sup> orden

- $\omega_n$  es la frecuencia natural del sistema
- $\zeta$  la razón de amortiguamiento, y
- $k$  la ganancia del sistema

con lo cual se obtiene

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) = k\omega_n^2 x(t)$$

cuya respuesta de entrada cero es la siguiente

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) = 0 \quad (15)$$

Suponiendo una solución de la forma  $y_{zi}(t) = e^{st}$  en la ecuación homogénea, donde  $s$  son constantes a definir, la Ec. (15) queda como

$$s^2 e^{st} + 2\zeta\omega_n s e^{st} + \omega_n^2 e^{st} = 0 \quad (16)$$

en donde siempre se obtendrá un polinomio de la forma

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (17)$$

 <b>Manual de prácticas del</b> <b>Laboratorio de</b> <b>Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código: MADO-70 Versión: 01 Página: 22 / 78 Sección ISO: 8.3 Fecha de emisión: 2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería	Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica
La impresión de este documento es una copia no controlada	

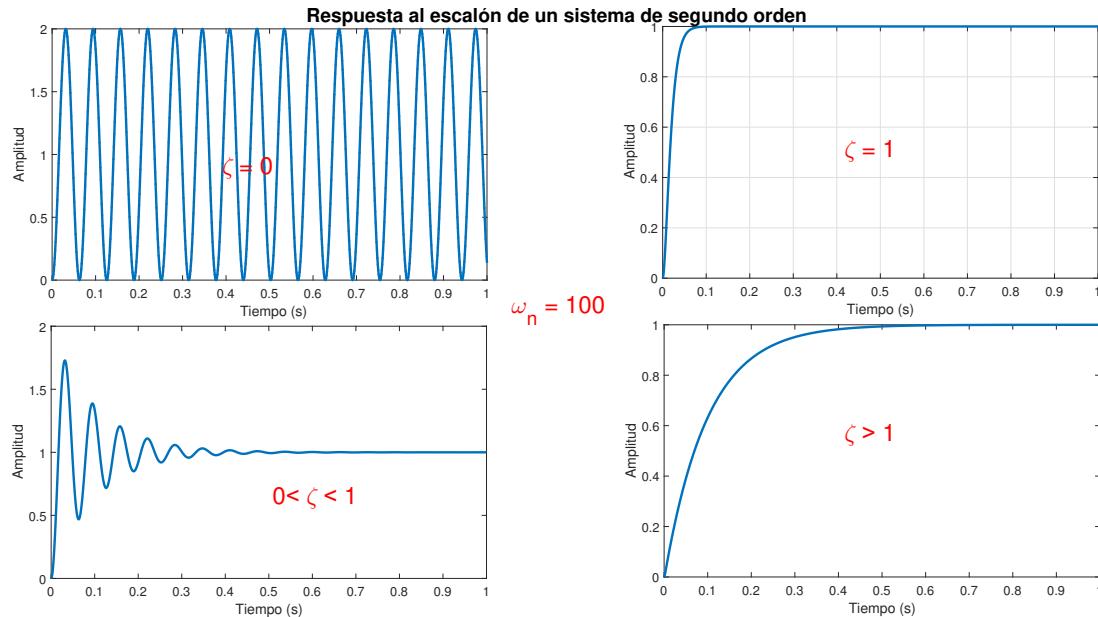


Figura 14. Respuesta de un sistema de  $2^{\text{do}}$  orden

Este polinomio en  $s$  se le nombra ecuación característica, cuyas raíces son

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (18)$$

dependiendo de los valores del parámetro  $\zeta$  se pueden considerar cuatro casos en los que las raíces del polinomio característico del sistema son diferentes. Este análisis se presenta a continuación.

1.  $\zeta = 0$ . Cuando esto sucede, entonces las raíces de la ecuación característica son números puramente imaginarios conjugados, es decir,  $s_{1,2} = \pm j\omega_n$ .
2.  $0 < \zeta < 1$ . En este caso las raíces del sistema son números complejos conjugados, de la forma  $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$ .
3.  $\zeta = 1$ . En este caso se tiene que las raíces de la ecuación característica toman el mismo valor negativo, por lo que se tienen raíces reales repetidas, cuyo valor es  $s_{1,2} = -\omega_n$ .
4.  $\zeta > 1$ . Las raíces de la ecuación característica en este caso son reales, diferentes y negativas,  $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$ .

La respuesta al escalón de un sistemas de segundo orden, considerando los cuatro casos mencionados, se muestra en la Figura 14.

 <b>Manual de prácticas del</b> <b>Laboratorio de</b> <b>Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código: MADO-70 Versión: 01 Página: 23 / 78 Sección ISO: 8.3 Fecha de emisión: 2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería	Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica
La impresión de este documento es una copia no controlada	

## Desarrollo

### Actividad 1: Respuesta al escalón de un sistema eléctrico de primer orden

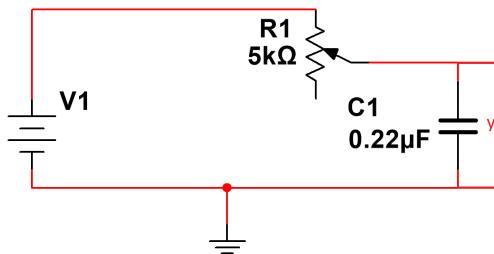


Figura 15. Sistema eléctrico de primer orden

1. Acomodar los equipos (generador de funciones y osciloscopio) y conectar los cables de alimentación, tanto a los equipos como al multicontacto.
2. Encender el generador de señales y el osciloscopio.
3. Identificar la salida del generador de señales y conectar en el canal 1 del osciloscopio.
4. Generar una señal cuadrada con amplitud pico-pico de  $5[V]$  a  $100[Hz]$ .
5. Alambrar en la protoboard el sistema mostrado en la Figura 15.
6. Conectar la señal del generador de funciones al circuito alambrado.
7. Conectar el canal 1 del osciloscopio a la entrada del circuito, y el canal 2 en la salida (Voltaje del capacitor).
8. Considere un sistema como el mostrado en la Fig. 16 cuya representación matemática es la siguiente.

$$R_1 C_1 \frac{dV_c(t)}{dt} + V_c(t) = V_1 \quad (19)$$

en donde la entrada del sistema es el voltaje  $V_1$  y la salida es el voltaje en las terminales del capacitor  $V_c$

9. El sistema total se debe mostrar como en la Fig.16
10. ¿Qué le pasa a la respuesta del sistema cuando se modifica el valor del parámetro  $R_1$ ?

---



---



---



---

 <b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código: MADO-70 Versión: 01 Página: 24 / 78 Sección ISO: 8.3 Fecha de emisión: 2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería	Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica
La impresión de este documento es una copia no controlada	

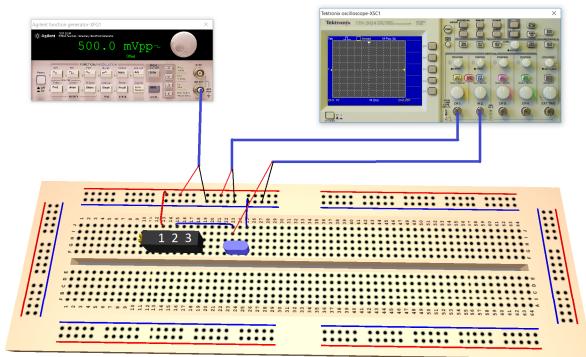


Figura 16. Sistema eléctrico de primer orden en la protoboard

11. Cambiar el valor del parámetro  $C_1$  y comparar la respuesta obtenida con las anteriores. ¿Qué sucede? <sup>5</sup>
- 
- 
- 
- 

## Actividad 2 Respuesta al escalón de un sistema eléctrico de segundo orden

En la Figura 17 se observa un circuito eléctrico, cuyo modelo matemático está dado por la ecuación (20).

$$LC \frac{d^2V_c(t)}{dt^2} + RC \frac{dV_c(t)}{dt} + V_c(t) = V_1 \quad (20)$$

en donde la entrada del sistema es  $V_1$  y la salida es  $V_c(t)$

<sup>5</sup>Sugerencia: Conecte varios capacitores en paralelo para modificar el valor de la Capacitancia  $C_1$

 <b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código: MADO-70 Versión: 01 Página: 25 / 78 Sección ISO: 8.3 Fecha de emisión: 2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería	Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica
La impresión de este documento es una copia no controlada	

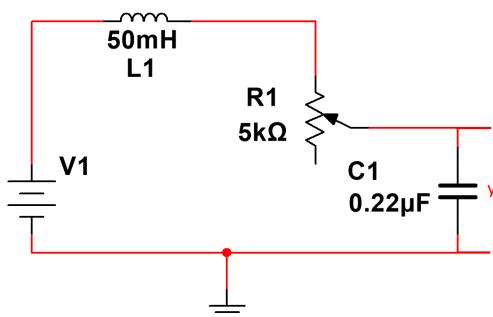


Figura 17. Sistema eléctrico de segundo orden

Procedimiento para realizar la actividad:

1. Acomodar los equipos (generador de funciones y osciloscopio) y conectar los cables de alimentación, tanto a los equipos como al multicontacto.
2. Encender el generador de señales y el osciloscopio.
3. Identificar la salida del generador de señales y conectar en el canal 1 del osciloscopio.
4. Generar una señal cuadrada con amplitud 5[V].
5. Alambrar en la protoboard el sistema mostrado en la Fig.17.
6. Conectar la señal del generador de funciones al circuito alambrado.
7. Conectar el canal 1 del osciloscopio a la entrada del circuito, y el canal 2 en la salida (Voltaje del capacitor).
8. El sistema alambrado se debe de observar como en la Fig.18
9. Variar el potenciómetro y observar cómo se obtienen las diferentes respuestas del sistema de segundo orden. Anotar el valor de los parámetros del sistema en la Tabla 1 para obtener cada una de las respuestas del sistema de segundo orden.
10. Variar el parámetro  $R_1$  del sistema representado por la Fig. 17 con el objetivo de encontrar las diferentes respuestas a escalón del sistema de segundo orden representado por la Ecuación (20) y registre sus resultados en la tabla.
11. ¿En un sistema real se lograían obtener los cuatro tipos de respuesta? Justifique su respuesta.

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código:	MADO-70
		Versión:	01
		Página:	26 / 78
		Sección ISO:	8.3
	Fecha de emisión:		2 de febrero 2018
	Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica
La impresión de este documento es una copia no controlada			

Tipo de respuesta	<i>Capacitor</i>	<i>Inductor</i>	<i>Resistencia<sub>min</sub></i>	<i>Resistencia<sub>max</sub></i>
No amortiguada				
Subamortiguada				
Críticamente amortiguada				
Sobreamortiguada				

Tabla 1. Parámetros del sistema eléctrico de segundo orden

---



---



---



---



---



---

12. La manera de obtener el parámetro del resistor de manera teórica, para sistema de segundo orden, se emplea la siguiente ecuación

$$R = 2\xi\sqrt{\frac{L}{C}} \quad (21)$$

en donde  $\xi$  es el factor de amortiguamiento,  $C$  es la capacitacia y  $L$  la inductacia del sistema de segundo orden.

Con base en el factor de amortiguamiento para cada una de las respuestas escalón que caracteriza a los sistemas de segundo orden ¿Cuál es el valor de resistencia necesaria para cumplir dichas respuestas para el sistema mostrado en la Figura 18?

13. Compruebe sus resultados con el software especializado.  
14. ¿Calcule el error de medición que obtiene de acuerdo a los datos obtenidos?.

 <b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código: MADO-70 Versión: 01 Página: 27 / 78 Sección ISO: 8.3 Fecha de emisión: 2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería	Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica
La impresión de este documento es una copia no controlada	

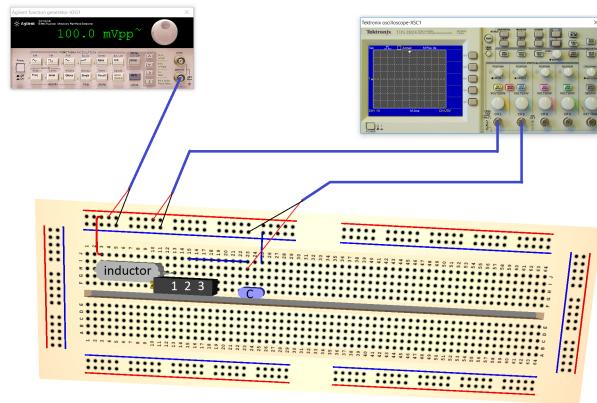


Figura 18. Sistema eléctrico de segundo orden en la protoboard

### Actividad 3 Respuesta al escalón de un sistema mecánico rotacional

Dado el sistema de la Figura 19



Figura 19. Sistema mecánico rotacional spinner

1. ¿Cuál es la entrada y la salida del spinner?.

 <b>Manual de prácticas del</b> <b>Laboratorio de</b> <b>Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código: MADO-70 Versión: 01 Página: 28 / 78 Sección ISO: 8.3 Fecha de emisión: 2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería	Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica
La impresión de este documento es una copia no controlada	

2. Si el modelo matemático del sistema es

$$J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + B \frac{d\theta(t)}{dt} = \tau_{in}$$

donde  $J = 2$ ,  $B = 0,2$  y el torque de entrada  $\tau_{in}$  es como se muestra en la Figura 20

3. Obtenga la respuesta del sistema con ayuda de software especializado (anexar gráficas al final de la práctica).
  4. ¿Qué parámetros modificaría en el sistema para que gire por un tiempo más prolongado? Justifique matemáticamente su respuesta.
- 
- 
- 
- 

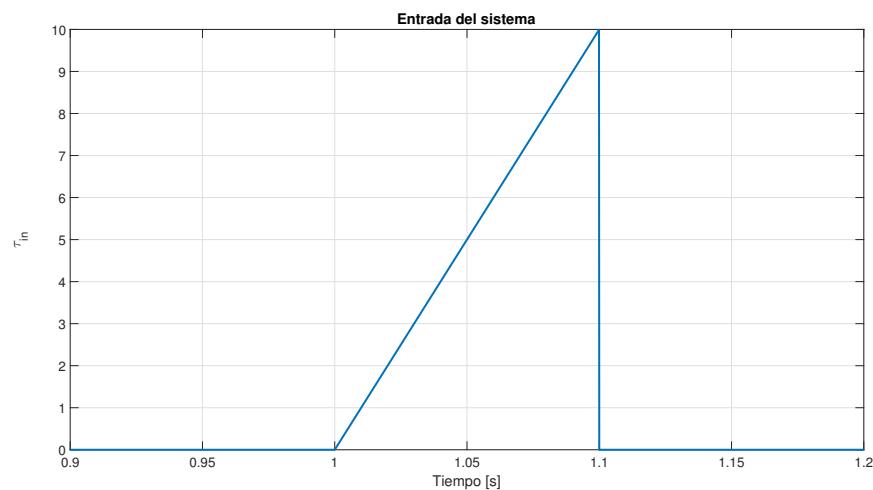


Figura 20. Torque de entrada al spinner

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código: MADO-70
		Versión: 01
		Página: 29 / 78
		Sección ISO: 8.3
		Fecha de emisión: 2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica
		La impresión de este documento es una copia no controlada

## Actividad 4 Caracterización de la respuesta al escalón a diferentes clases de sistemas

En esta actividad se caracteriza la respuesta de un sistema térmico, el procedimiento para realizar la actividad es el siguiente:

### Sistema Térmico.

1. Considere los siguientes datos obtenido de un experimento asociado a un sistema térmico.
2. Acomodar los equipos (fuente de voltaje, Módulo de temperatura y controlador) y conectar los cables de alimentación, tanto a los equipos como al multicontacto.
3. Encender las fuentes de voltaje y verificar los voltajes que necesita el módulo ( $\pm 12[V_{DC}]$  y  $24[V_{CA}]$ ).
4. Identificar las partes a utilizar del módulo de control de temperatura (set point, Temperature meter, heater power amplifier, STT conditioner, PID controller, entrada del transductor STT y salidas del módulo heater and cooler).
5. Alimentar la sección lógica del módulo  $G34/EV(\pm 12V)$  y también el módulo de potencia.
6. Conectar la salida **SET-POINT** (borne 2) con la entrada del bloque **ERROR AMPLIFIER** (borne 3).
7. Conectar la salida **STT CONDITIONER** (borne 22) con la entrada del bloque **TEMPERATURE METER** (borne 10) y con la entrada del bloque **ERROR AMPLIFIER** (borne 4).
8. Conectar la salida **PID CONTROLLER** (borne 9) con la entrada de **HEATER POWER AMPLIFIER** (borne 11). En la Figura 21 se observa en color rojo las partes del módulo que se utilizarán y en azul, las conexiones necesarias.
9. Colocar el interruptor que se encuentra en **TEMPERATURE METER** en la posición **STT**, el interruptor que se encuentra en **HEATER POWER AMPLIFIER** en la posición **AUT**
10. Conectar las salidas **HEATER** y **COOLER** del bloque **POWER AMPLIFIER** con las correspondientes entradas de la unidad  $TY34/EV$ .
11. Colocar en cero el **SET-POINT**.
12. Conectar el transductor y colocarlo en su posición en el módulo de temperatura.
13. Regular el potenciómetro de temperatura ambiente, al valor correspondiente (medir el voltaje en el borne 2 y variar el potenciómetro de temperatura ambiente hasta alcanzar el mismo valor de voltaje que se encuentre en el borne 10).
14. Aplicar la alimentación de potencia ( $24V_{CA}$ )
15. Aplicar una señal escalón en el **SET-POINT** de  $2[V]$ .
16. Tomar lecturas del voltaje y del display cada  $10[s]$  y anotar en la Tabla ??.

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código: MADO-70
		Versión: 01
		Página: 30 / 78
		Sección ISO: 8.3
		Fecha de emisión: 2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica
		La impresión de este documento es una copia no controlada

17. Con los datos registrados, obtener la gráfica de la respuesta escalón del sistema (anexar gráfica de voltaje y temperatura al final de la práctica con comentarios).
18. ¿Cómo son las raíces del polinomio característicos del sistema de temperatura en estudio? justifique su respuesta.

---



---



---



---



---

19. ¿Las gráficas de voltaje y temperatura son continuas?

---



---



---



---



---

20. ¿Cuál de las dos gráficas muestra mejor el comportamiento del sistema? Justifique su respuesta.

---



---



---



---



---

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código: MADO-70 Versión: 01 Página: 31 / 78 Sección ISO: 8.3 Fecha de emisión: 2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería	Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica	
La impresión de este documento es una copia no controlada		

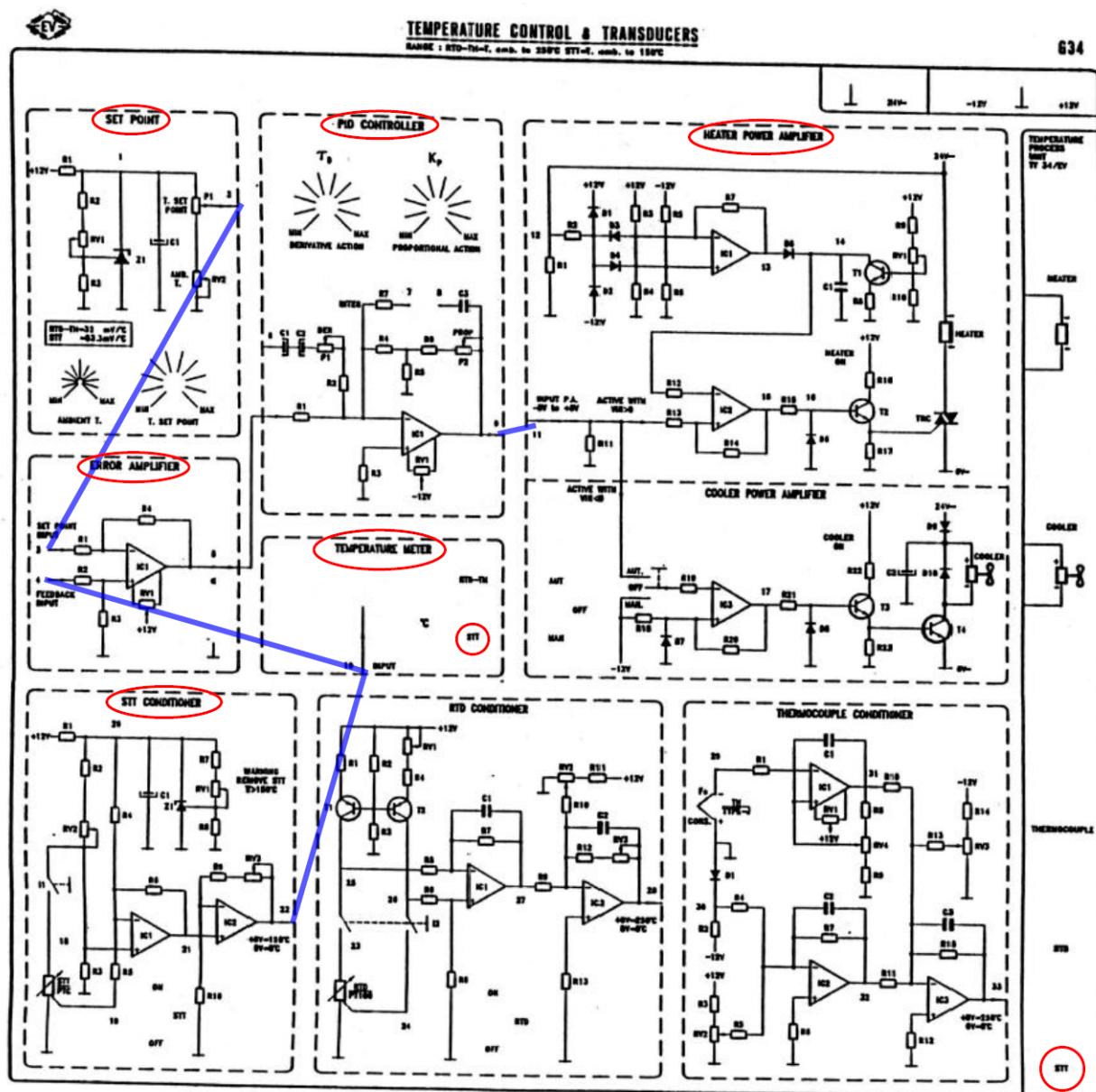


Figura 21. Módulo de control de un sistema térmico

 <b>Manual de prácticas del</b> <b>Laboratorio de</b> <b>Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código: MADO-70 Versión: 01 Página: 32 / 78 Sección ISO: 8.3 Fecha de emisión: 2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería	Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica
La impresión de este documento es una copia no controlada	

## Sistema 2.

1. Considere un sistema en donde la respuesta escalón se encuentra caracterizada por la gráfica mostrada en la Fig. 22
- 
- 
- 
- 

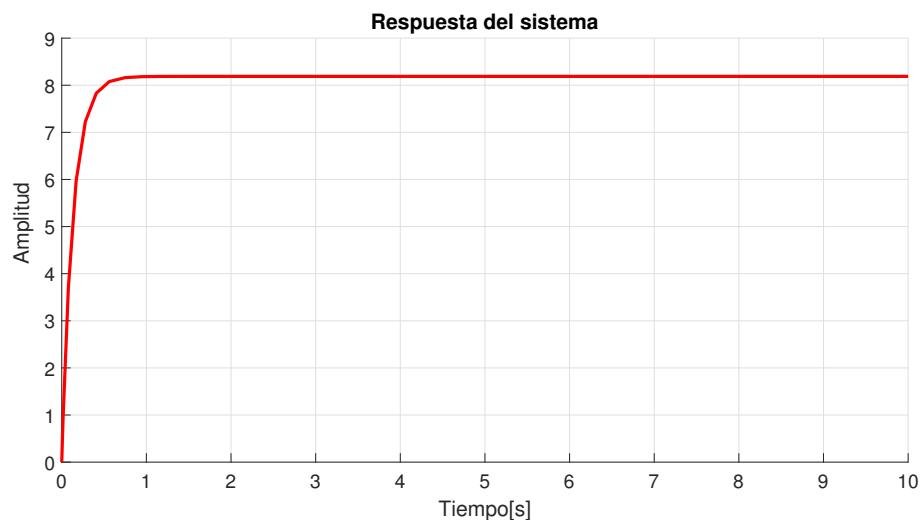


Figura 22. Sistema 2

2. ¿Cómo son las raíces del polinomio característico del sistema en estudio? justifique su respuesta.
- 
- 
- 
-

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código:	MADO-70
		Versión:	01
		Página:	33 / 78
		Sección ISO:	8.3
		Fecha de emisión:	2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento:	Laboratorio de control y robótica
		La impresión de este documento es una copia no controlada	

3. De acuerdo a la gráfica mostrada en la Fig. 22, defina una ecuación matemática que caracterice el comportamiento de dicho sistema.
- 
- 
- 
- 
- 

#### OBSERVACIONES Y CONCLUSIONES

Nombre:

---



---



---



---



---

Nombre:

---



---



---



---



---

Nombre:

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código:	MADO-70
		Versión:	01
		Página:	34 / 78
		Sección ISO:	8.3
		Fecha de emisión:	2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento:	Laboratorio de control y robótica
		La impresión de este documento es una copia no controlada	

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código:	MADO-70
		Versión:	01
		Página:	35 / 78
		Sección ISO:	8.3
		Fecha de emisión:	2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento:	Laboratorio de control y robótica
La impresión de este documento es una copia no controlada			

Nombre:

---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



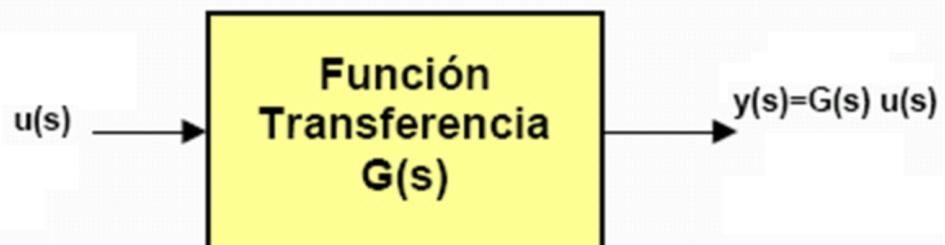
---

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código: MADO-70
		Versión: 01
		Página: 36 / 78
		Sección ISO: 8.3
		Fecha de emisión: 2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica
		La impresión de este documento es una copia no controlada

## Práctica N° 3

### Función de transferencia y sistemas de primer orden

$$\frac{y(s)}{u(s)} = G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \dots + b_{n-1} s^{n-1} + b_n s^n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + a_n s^n}$$



Apellidos y nombres:			
Grupo:	Profesor:	Calificación:	
Brigada:			
Semestre:	Fecha de ejecución:		

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código: MADO-70
		Versión: 01
		Página: 37 / 78
		Sección ISO: 8.3
		Fecha de emisión: 2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica
		La impresión de este documento es una copia no controlada

## Objetivos

- ☒ El alumno estudiará el concepto de función de transferencia.
- ☒ El alumno caracterizará la respuesta de sistemas de primer orden a las entradas impulso y escalón.

## Recursos

1. Software
  - a) Software especializado para cálculo numérico, puede utilizarse paquetería de software libre como Octave o Scilab.
2. Equipos, instrumentos, herramientas y accesorios
  - a) Computadora con 2GB RAM min.

## Seguridad en la ejecución de la actividad

Peligro o fuente de energía		Riesgo asociado	Medidas de control	Verificación
1 <sup>ro</sup>	Voltaje alterno	Electrocución	Identificar los puntos energizados antes de realizar la actividad y evitar contacto	<input type="checkbox"/>
Apellidos y nombres:				

## Fundamento teórico

### Función de Transferencia

Uno de los métodos más comunes y útiles para representar a un sistema lineal e invariante en el tiempo, el cual es modelado por medio de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes, es a través de su función de transferencia. El concepto de función de transferencia surge de la integral de convolución como herramienta para caracterizar la salida de un sistema causada por cualquier señal de entrada arbitraria mediante el conocimiento de la respuesta al impulso del sistema, esto es,

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau, \quad t > 0, \quad (22)$$

y la transformada unilateral de Laplace de señales; ésta transformada, además de ser lineal, tiene la siguiente propiedad,

$$\mathcal{L}\{x_1(t) * x_2(t)\} = \mathcal{L}\{x_1(t)\} \mathcal{L}\{x_2(t)\} = X_1(s)X_2(s), \quad (23)$$

en donde el símbolo  $*$  denota la operación de convolución entre las señales de tiempo continuo  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$ ,  $\mathcal{L}\{(\cdot)\}$  denota la transformada de Laplace de  $(\cdot)$  y  $X_1(s)$  y  $X_2(s)$  son las respectivas transformadas de  $x_1(t)$  y

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código:	MADO-70	
		Versión:	01	
		Página:	38 / 78	
		Sección ISO:	8.3	
Facultad de Ingeniería		Fecha de emisión:	2 de febrero 2018	
		Área/Departamento:	Laboratorio de control y robótica	
La impresión de este documento es una copia no controlada				

$x_2(t)$ . La propiedad anterior, nos indica que la transformada de Laplace de la convolución de dos señales es igual al producto de las transformadas de Laplace correspondientes. Aplicando la propiedad (22) a (23) obtenemos la siguiente expresión,

$$Y(s) = H(s)X(s),$$

en donde  $Y(s)$ ,  $H(s)$  y  $X(s)$  son las transformadas de Laplace de la señal de salida de estado cero, de la respuesta al impulso y de la entrada del sistema, respectivamente. El cociente entre las transformadas de Laplace de la señal de salida y la señal de entrada, se conoce como la función de transferencia del sistema,

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s).$$

La función de transferencia es fácil de determinar una vez que el sistema ha sido descrito mediante una ecuación diferencial; se debe mencionar que se trabaja con sistemas con una sola entrada y una sola salida (SISO, por sus siglas en inglés). La función de transferencia no es exclusiva de este tipo de sistemas sino que también puede ser extendida a sistemas con múltiples entradas y salidas. Considere un ejemplo un sistema de tercer orden en el que la ecuación diferencial que describe su comportamiento con  $x(t)$  como una entrada y  $y(t)$  como salida es,

$$a_0 \ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_2 y(t) = b_0 \ddot{x}(t) + b_1 \dot{x}(t) + b_2 x(t)$$

Para encontrar la función de transferencia, como primer punto se obtiene la transformada de Laplace de la ecuación diferencial (considerando condiciones iniciales nulas)

$$a_0 s^3 Y(s) + a_1 s^2 Y(s) + a_2 s Y(s) + a_3 Y(s) = b_0 s^2 X(s) + b_1 s X(s) + b_2 X(s)$$

La función de transferencia se define como la relación entre la salida y la entrada, esto es,

$$(a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3) Y(s) = (b_0 s^2 + b_1 s + b_2) X(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^2 + b_1 s + b_2}{a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}$$

El polinomio que se obtiene en el denominador de la función de transferencia recibe el nombre de polinomio característico, el cual determina el comportamiento del sistema (rápido, lento, oscilatorio, sub-amortiguado, etc). Generalmente el coeficiente  $a_0$  de la función de transferencia es igualado a 1.

Para el caso general de una ecuación diferencial de orden  $n$  con  $m$  derivadas en la entrada (los superíndices en paréntesis indican el orden de la derivada):

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} y(t) + a_n y(t) = b_0 x^{(m)}(t) + b_1 x^{(m-1)}(t) + \dots + b_{m-1} x(t) + b_m x(t)$$

$$a_0 s^n Y(s) + a_1 s^{n-1} Y(s) + \dots + a_{n-1} s Y(s) + a_n Y(s) = b_0 s^m X(s) + b_1 s^{m-1} X(s) + \dots + b_{m-1} s X(s) + b_m X(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

Esto puede ser escrito como

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(n-i)} = \sum_{i=0}^m b_i x^{(m-i)}$$

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código: MADO-70
		Versión: 01
		Página: 39 / 78
		Sección ISO: 8.3
		Fecha de emisión: 2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica
		La impresión de este documento es una copia no controlada

tomando la transformada de Laplace de ambos miembros,

$$Y(s) \sum_{i=0}^n a_i s^{n-i} = X(x) \sum_{i=0}^m b_i s^{m-i}$$

y calculando el cociente entre las transformadas de la salida y la entrada, se tiene lo siguiente,

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^{m-i}}{\sum_{i=0}^n a_i s^{n-i}} = \frac{\mathcal{L}(\text{salida})}{\mathcal{L}(\text{entrada})}$$

La función de transferencia es una representación de estado cero del sistema, solamente si las condiciones iniciales son cero.

## Patrón de polos y ceros

Un sistema es regularmente definido en términos de los polos y los ceros de su función de transferencia. Como se mencionó anteriormente un sistema puede ser descrito a través de su función de transferencia:

$$H(s) = \frac{b_0 s^2 + b_1 s + b_2}{a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}$$

Reescribiendo  $H(s)$  en su forma estándar tal que el término de orden superior del numerador y el denominador son unitarios.

$$H(s) = \frac{b_0}{a_0} \frac{s^2 + \frac{b_1}{b_0}s + \frac{b_2}{b_0}}{s^3 + \frac{a_1}{a_0}s^2 + \frac{a_2}{a_0}s + \frac{a_3}{a_0}}$$

El término constante ( $b_0/a_0$ ) multiplica la relación de los polinomios los cuales pueden ser factorizados

$$H(s) = k \frac{(s - z_1)(s - z_2)}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)}$$

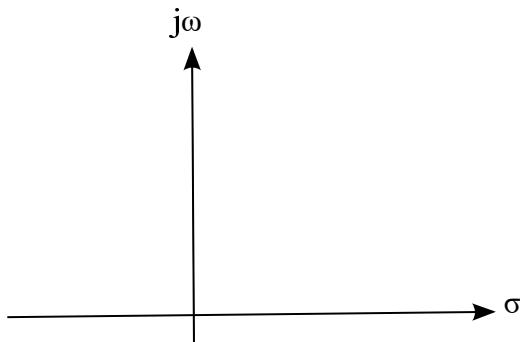
Donde  $k = b_0/a_0$ , el cual es conocido como término constante. Los términos  $z_i$  son los ceros de la función de transferencia, si  $s \rightarrow z_i$  el numerador del polinomio es cero, por lo que la función de transferencia también es cero. Los términos  $p_i$  son los polos de la función de transferencia; si  $s \rightarrow p_i$  el denominador del polinomio es cero, por lo que la función de transferencia tiende a infinito.

En el caso general de una función de transferencia con un numerador de orden  $m$  y un denominador de orden  $n$ , puede ser representada como:

$$H(s) = k \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

 <b>Manual de prácticas del</b> <b>Laboratorio de</b> <b>Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código: MADO-70 Versión: 01 Página: 40 / 78 Sección ISO: 8.3 Fecha de emisión: 2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería	Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica
La impresión de este documento es una copia no controlada	

El patrón de polos y ceros de la función de transferencia de un sistema lineal invariante en el tiempo (SLI) es una gráfica en el plano complejo  $s$  donde los ceros se describen con el símbolo ‘o’ y los polos con el símbolo ‘x’.



Un sistema con función de transferencia  $H(s)$  es estable si todos los polos se encuentran en el semiplano izquierdo.

### Respuesta a una entrada escalón

Una de las entradas más utilizadas con fines de prueba, es el escalón unitario que se define como:

$$u_{-1}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s}$$

Se puede encontrar fácilmente la respuesta de un sistema debido a una entrada escalón si se conoce la función de transferencia del sistema,

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

la salida con condiciones nulas (por lo tanto se habla de la respuesta en estado cero) es simplemente determinada por

$$Y(s) = X(s)H(s)$$

por lo que la respuesta al escalón queda determinada por

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código: MADO-70
		Versión: 01
		Página: 41 / 78
		Sección ISO: 8.3
		Fecha de emisión: 2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica
La impresión de este documento es una copia no controlada		

$$Y_\gamma(s) = \frac{1}{s}H(s)$$

Inmediatamente se puede determinar dos características de la respuesta al escalón, los valores inicial y final, entonces:

Teorema del valor inicial:

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) &= \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} y_\gamma(t) &= \lim_{s \rightarrow \infty} sY_\gamma(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{1}{s} H(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} H(s)\end{aligned}$$

Teorema del valor final:

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} y_\gamma(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sY_\gamma(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s} H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} H(s)\end{aligned}$$

El resultado puede ser escrito como:

$$\begin{aligned}y_\gamma(0^+) &= H(\infty) \\ y_\gamma(\infty) &= H(0)\end{aligned}$$

Si se considera un sistema de primer orden genérico cuya función de transferencia está dada por,

$$H(s) = \frac{bs + c}{s + a}$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son números reales arbitrarios, se debe mencionar que  $b$  o  $c$  (no ambos) pueden ser cero. Para obtener la respuesta al escalón unitario, la función de transferencia  $H(s)$  es multiplicada por  $1/s$

$$Y_\gamma(s) = \frac{1}{s}H(s) = \frac{1}{s} \frac{bs + c}{s + a}$$

Utilizando el teorema del valor final e inicial, se puede determinar

$$\begin{aligned}y_\gamma(0^+) &= H(\infty) = b \\ y_\gamma(\infty) &= H(0) = \frac{c}{a} \\ \tau &= \frac{1}{a}\end{aligned}$$

 <b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código: MADO-70 Versión: 01 Página: 42 / 78 Sección ISO: 8.3 Fecha de emisión: 2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería	Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica
La impresión de este documento es una copia no controlada	

La expresión que determina la respuesta al escalón unitaria está dada por:

$$\begin{aligned} y_\gamma(t) &= y_\gamma(\infty) + (y_\gamma(0^+) - y_\gamma(\infty))e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= H(0) + (H(\infty) - H(0))e^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned}$$

### Respuesta a un impulso

Si la función de transferencia de un sistema está denotada por  $H(s)$ , la respuesta al impulso de un sistema está dada por  $h(t)$ ; donde  $h(t)$  es la transformada inversa de Laplace de  $H(s)$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$$

También se debe mencionar que la respuesta al impulso puede ser obtenida a través de la derivada de la respuesta a un escalón

$$y_\delta(t) = h(t) = \frac{d}{dt}y_\gamma(t)$$

### Desarrollo de la actividad

1. Encontrar la representación mediante el patrón de polos y ceros, así como el término constante del sistema cuya función de transferencia es:

$$H(s) = \frac{6s^2 + 18s + 12}{2s^3 + 10s^2 + 16s + 12}$$

2. Con ayuda de un equipo de computo y un software especializado, obtenga la representación gráfica de los polos y de los ceros de la función de transferencia anteriormente mencionada. ¿Qué puede decir sobre la estabilidad del sistema?.
3. De la Figura 23 obtenga la ecuación diferencial que represente la dinámica del sistema.

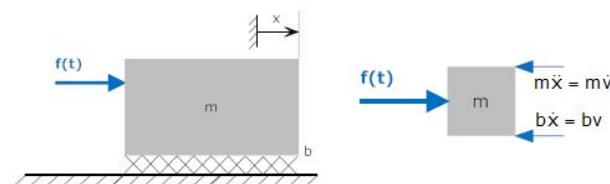


Figura 23. Acción de una fuerza sobre una masa.

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código: Versión: Página: Sección ISO: Fecha de emisión:	MADO-70 01 43 / 78 8.3 2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería	Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica		
La impresión de este documento es una copia no controlada			

4. Obtenga la función de transferencia del sistema y determine la expresión matemática de la respuesta al impulso unitario (considere condiciones iniciales nulas).
5. Bosqueje la respuesta al impulso cuando la magnitud de este es dos, considere  $m = b = 1$ .
6. Considere un sistema cuya función de transferencia es representada como:

$$F(s) = \frac{s+1}{s(s+2)}$$

Utilice el método de fracciones parciales para encontrar la transformada inversa de Laplace y corrobore sus resultados con ayuda de un software especializado.

7. Considere el circuito mostrado en la Figura 24. Si la entrada de voltaje,  $e_{in}(t)$  es un escalón, encuentre la salida  $e_{out}(t)$ . Considere  $R_1 = 2 [\Omega]$ ,  $R_2 = 3 [\Omega]$  y  $C = 1 [F]$ .

Como primer punto encuentre la función de transferencia. Considere que el circuito es un divisor de voltaje con dos impedancias, es decir:

$$\frac{E_{out}(s)}{E_{in}(s)} = H(s) = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

donde

$$\begin{aligned} Z_1 &= R_1 \\ Z_2 &= Z_{R2} + Z_c \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\frac{E_{out}(s)}{E_{in}(s)} = H(s) = \frac{R_2 + \frac{1}{sC}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{sC}}$$

8. Encuentre la expresión matemática que determina la respuesta a una entrada escalón y bosqueje sus resultados con ayuda de un software especializado.
  9. De una forma alternativa, considerando el teorema del valor final y el teorema del valor inicial (sin la transformada inversa de Laplace) determine la respuesta al escalón. ¿Qué puede decir con respecto a lo realizado en la actividad 8?.
- 
- 
- 
-



# Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales

Código:	MADO-70
Versión:	01
Página:	44 / 78
Sección ISO:	8.3
Fecha de emisión:	2 de febrero 2018

Facultad de Ingeniería

Área/Departamento:  
Laboratorio de control y robótica

La impresión de este documento es una copia no controlada

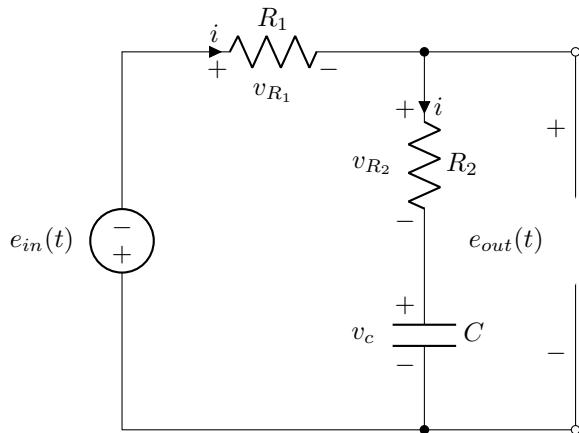


Figura 24. Circuito RL paralelo

## OBSERVACIONES Y CONCLUSIONES

Nombre:

---

---

---

---

---

Nombre:

---

---

---

---

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código:	MADO-70
		Versión:	01
		Página:	45 / 78
		Sección ISO:	8.3
		Fecha de emisión:	2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento:	Laboratorio de control y robótica
La impresión de este documento es una copia no controlada			

Nombre:

---



---



---



---



---



---



---



---



---

Nombre:

---



---



---



---



---



---



---



---

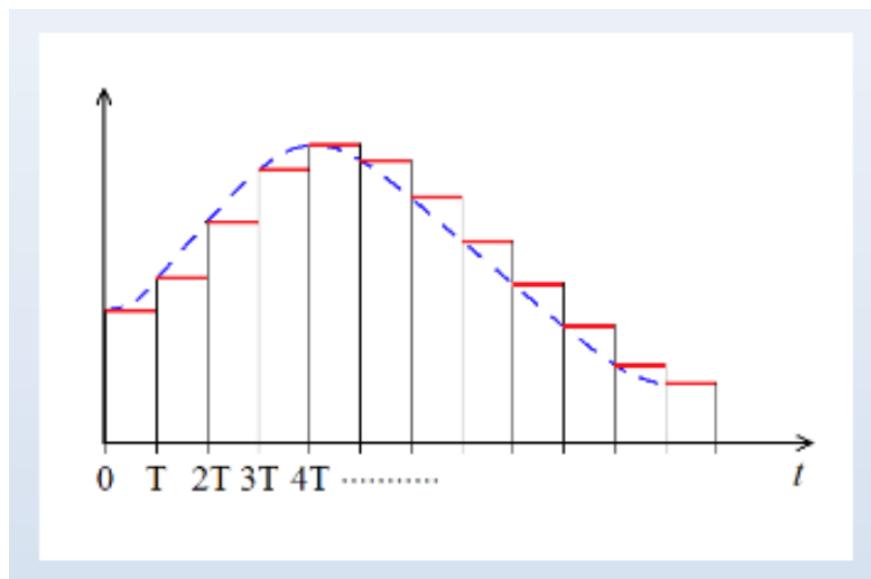


---

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código: MADO-70
		Versión: 01
		Página: 46 / 78
		Sección ISO: 8.3
		Fecha de emisión: 2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica
La impresión de este documento es una copia no controlada		

## Práctica N° 4

### Transformada Z y aplicaciones a sistemas de tiempo discreto



Apellidos y nombres:			
Grupo:		Profesor:	Calificación:
Brigada:			
Semestre:		Fecha de ejecución:	

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código: MADO-70
		Versión: 01
		Página: 47 / 78
		Sección ISO: 8.3
		Fecha de emisión: 2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica
		La impresión de este documento es una copia no controlada

## Objetivos

- ☒ El alumno aplicará el concepto de función de transferencia en sistemas discretos.
- ☒ El alumno aplicará algunas herramientas de análisis de sistemas discretos.

## Recursos

1. Software
  - a) Software especializado para cálculo numérico, puede utilizarse paquetería de software libre como Octave o Scilab.
2. Equipos, instrumentos, herramientas y accesorios
  - a) Computadora con 2GB RAM min.
  - b) Celular para grabar sonidos.

## Seguridad en la ejecución de la actividad

Peligro o fuente de energía		Riesgo asociado	Medidas de control	Verificación
1 <sup>ro</sup>	Voltaje alterno	Electrocución	Identificar los puntos energizados antes de realizar la actividad y evitar contacto	<input type="checkbox"/>
Apellidos y nombres:				

## Fundamento teórico

### Muestreo uniforme

El primer paso para convertir una señal continua  $x(t)$  a una señal digital es discretizar la variable de tiempo, es decir, considerar muestras de  $x(t)$  en instantes uniformes de tiempo  $t = nT_s$ , o,

$$x(nT_s) = x(t)|_{t=nT_s}$$

en donde  $n$  es un número entero y  $T_s$  es el periodo de muestreo. Para conceptualizar el método de muestreo, es posible pensarlo como la multiplicación de la señal  $x(t)$  por un tren de pulsos de ancho fijo, una descripción teórica profunda puede ser consultada en [?], aquí nos limitaremos a explicar algunas cuestiones prácticas en el proceso de muestreo.

Para procesar señales analógicas utilizando computadoras es necesario convertir señales analógicas a digitales y señales digitales a analógicas, estos procedimientos son realizados por medio de convertidores analógico-digital

 <b>Manual de prácticas del</b> <b>Laboratorio de</b> <b>Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código: MADO-70 Versión: 01 Página: 48 / 78 Sección ISO: 8.3 Fecha de emisión: 2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería	Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica
La impresión de este documento es una copia no controlada	

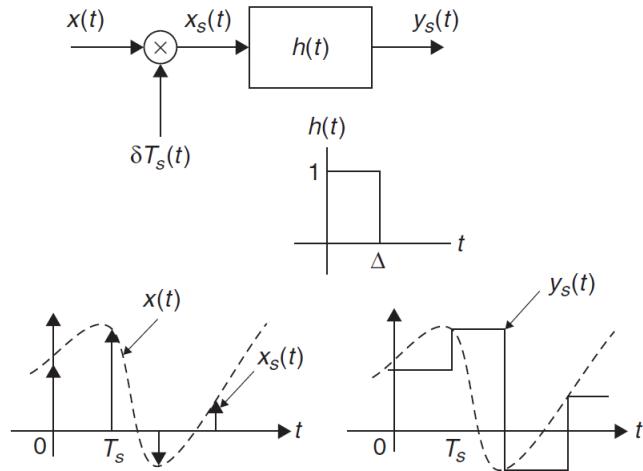


Figura 25. Muestreo utilizando un sistema de muestreo y retención

(CAD) y digital-analógico (CDA), respectivamente. Un convertidor analógico-digital, una vez que la señal es discretizada en tiempo, debe considerar el tiempo requerido para completar el proceso de digitalización. Un *sistema de muestreo y retención* toma muestras de la señal continua y las retiene hasta que el proceso de digitalización es completado y una nueva muestra puede ser adquirida. Un sistema de este tipo es mostrado en la Figura 25, el procedimiento consiste en multiplicar las señal a muestrear  $x(t)$  por un tren de impulsos  $\delta_{T_s}$  con periodo  $T_s$  para obtener otro tren de impulsos  $x_s(t)$  cuya magnitud es el valor de la señal en los instantes de muestreo  $nT_s$ . Posteriormente, la señal  $x_s(t)$  es introducida a un *retenedor de orden cero*, un sistema lineal e invariante en el tiempo, cuya respuesta al impulso  $h(t)$  es un pulso de ancho deseado  $\Delta \leq T_s$ . La salida  $y_s(t)$  del sistema de muestreo y retención es una secuencia de pulsos trasladados  $h(t) = u(t) - u(t - \Delta)$  y escalados por el valor  $x(nT_s)$ , es decir,

$$y_s(t) = \sum_n x(nT_s)h(t - nT_s).$$

## Sistemas de tiempo discreto

A continuación se introducen los sistemas de tiempo discreto que de mayor importancia teórica para el curso, estos son los sistemas de tiempo discreto lineales, invariantes en el tiempo y causales, los cuales pueden ser representados por medio de ecuaciones en diferencias que relacionan la entrada y la salida el sistema.

### Los sistemas de interés

De forma similar a los sistemas de tiempo continuo, un sistema de tiempo discreto puede ser conceptualizado como un procesador que transforma una señal de entrada de tiempo discreto  $x[n]$  en una señal de salida de

 <b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código: MADO-70 Versión: 01 Página: 49 / 78 Sección ISO: 8.3 Fecha de emisión: 2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería	Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica
La impresión de este documento es una copia no controlada	

tiempo discreto  $y[n]$ , es decir,

$$y[n] = \mathcal{T}\{x[n]\}.$$

Al igual que en sistemas de tiempo continuo, estudiaremos sistemas de tiempo discreto  $\mathcal{T}\{\cdot\}$  que tienen las siguientes propiedades:

- Linealidad
- Invarianza en el tiempo
- Estabilidad
- Causalidad

Para un sistema de tiempo discreto  $\mathcal{T}$  se dice que es

- *Lineal:* Si para las entradas  $x[n]$  y  $v[n]$  y constantes  $a$  y  $b$ , el sistema satisface las siguientes condiciones
  - Escalamiento:  $\mathcal{T}\{ax[n]\} = a\mathcal{T}\{x[n]\}$ ,
  - Aditividad:  $\mathcal{T}\{x[n] + v[n]\} = \mathcal{T}\{x[n]\} + \mathcal{T}\{v[n]\}$ , o equivalentemente si se cumple el principio de superposición,  

$$\mathcal{T}\{ax[n] + bv[n]\} = a\mathcal{T}\{x[n]\} + b\mathcal{T}\{v[n]\}.$$
- *Invariante en el tiempo:* si para cualquier entrada  $x[n]$  con la correspondiente salida  $y[n] = \mathcal{T}\{x[n]\}$ , la salida correspondiente a la versión retrasada o adelantada de  $x[n]$ ,  $x[n \pm M]$ , es  $y[n \pm M] = \mathcal{T}\{x[n \pm M]\}$  para un entero  $M$ .

### Los sistemas de tiempo discreto como ecuaciones en diferencias

De forma similar a como los sistemas de tiempo continuo pueden ser representados mediante ecuaciones diferenciales, los sistemas de tiempo discreto que nos interesan, cuyas señales de entrada es  $x[n]$  y de salida  $y[n]$ , pueden ser representados como ecuaciones en diferencias que relacionan a  $x[n]$  con  $y[n]$ , de acuerdo con la siguiente expresión

$$y[n] + \sum_{k=1}^{N-1} a_k y[n-k] = \sum_{m=0}^{M-1} b_m x[n-m], \quad n \geq 0 \quad (24)$$

con condiciones iniciales  $y[-k]$ ,  $k = 1, \dots, N-1$  y en donde el orden del sistema es  $N-1$ . Si la ecuación en diferencias anterior es lineal, con coeficientes constantes, condiciones iniciales nulas y la respuesta es cero para  $n < 0$ , entonces esta representa un sistema lineal e invariante en el tiempo. Para este tipo de sistemas, la salida  $y[n]$  en el instante de tiempo  $n$ , depende de los valores previos de la salida  $\{y[n-k], k = 1 \dots N-1\}$ , por lo que también se les conoce como sistemas recursivos, ya que la salida del sistema puede ser definida como una secuencia de valores numéricos dados por la siguiente expresión,

$$y[n] = - \sum_{k=1}^{N-1} a_k y[n-k] + \sum_{m=0}^{M-1} b_m x[n-m], \quad n \geq 0$$

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código: MADO-70
		Versión: 01
		Página: 50 / 78
		Sección ISO: 8.3
		Fecha de emisión: 2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica
		La impresión de este documento es una copia no controlada

con condiciones iniciales  $y[-k]$ ,  $k = 1, \dots, N - 1$ . Existen otras metodologías para resolver ecuaciones en diferencias en el dominio del tiempo discreto  $n$  las cuales no serán presentadas, pero pueden ser consultadas en la literatura correspondiente.

### Solución de ecuaciones en diferencia mediante la transformada Z y la función de transferencia

La transformada Z puede ser utilizada para resolver ecuaciones en diferencias de la forma (24), aplicando la transformada a ambos miembros de la ecuación y combinando las propiedades de desplazamiento en el tiempo y diferencia finita, se puede obtener una expresión para la transformada Z de la salida del sistema de la siguiente forma

$$Y(z) = \frac{X(z)B(z)}{A(z)} + \frac{I_0(z)}{A(z)} \quad (25)$$

la cual tiene dos componentes, la primera depende de los efectos de la entrada del sistema y es la transformada Z de la respuesta forzada, mientras que la segunda componente es debida a las condiciones iniciales, por lo que se trata de la transformada Z de la respuesta libre. Por lo que descomponiendo la expresión en fracciones simples con antittransformadas comunes encontradas en el Tabla ?? es posible determinar la expresión para la respuesta total del sistema.

Si consideramos condiciones iniciales nulas, es decir, sustituyendo  $I_0(z) = 0$  en (25), es posible determinar el cociente entre las transformadas Z de la señal de salida y de la señal de entrada, es decir,

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

la cual es la función de transferencia del sistema, que en general es una función racional de polinomios en  $z$ . Otra posible definición de la función de transferencia es utilizando la suma convolución, la cual determina la salida del sistema  $y[n]$  ante una señal de entrada  $x[n]$  arbitraria, es decir,

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

en donde  $h[n]$  es la respuesta del sistema a una muestra unitaria. Aplicando la transformada Z a ambos miembros se obtiene

$$Y(z) = X(z)H(z)$$

en donde

$$H(z) = \mathcal{Z}(h[n]) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\mathcal{Z}(y[n])}{\mathcal{Z}(x[n])}$$

por lo que la función de transferencia se puede interpretar también como la transformada Z de la respuesta de un sistema a la muestra unitaria  $\delta[n]$ .

La función de transferencia permite determinar la salida del sistema para cualquier entrada arbitraria, la respuesta forzada, por medio de la siguiente expresión,

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código: MADO-70
		Versión: 01
		Página: 51 / 78
		Sección ISO: 8.3
		Fecha de emisión: 2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica
La impresión de este documento es una copia no controlada		

utilizando expansión en fracciones simples y antitransformando el resultado es posible determinar la respuesta forzada del sistema.

Otra propiedad de interés es la estabilidad de los sistemas de tiempo discreto, la cual puede ser caracterizada por medio de la evaluación de las raíces del polinomio del denominador  $A(z)$  de la función de transferencia, los cuales son los polos del sistema. Para que el sistema sea estable se requiere que los polos estén contenidos en el círculo unitario del plano complejo  $z$ , o bien, que la magnitud de los polos sea menor a la unidad.

### De ecuaciones diferenciales a ecuaciones en diferencias

Ahora se presentará un método para aproximar la solución de ecuaciones diferenciales por medio de la solución de ecuaciones en diferencias. El procedimiento consiste en obtener una ecuación en diferencias asociada a la ecuación diferencial original aproximando la operación de derivación por medio de la operación de diferencias finitas, este método puede ser aplicado a sistemas de orden arbitrario, sin embargo en este caso nos limitaremos, sin pérdida de generalidad, a sistemas de segundo orden. Considere un sistema dinámico cuya relación entrada salida está dada por la siguiente ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 x(t), \quad y(0) = y_0 \quad \frac{dy}{dt}(0) = y'(0)$$

la definición de derivada está dada por

$$\frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t) - y(t - \Delta t)}{\Delta t}$$

en el límite esta operación tiende a la derivada, sin embargo, si consideramos que  $\Delta t$  no tiende a cero, sino a un valor pequeño  $T_s$  que denominaremos periodo de muestreo, entonces podemos aproximar la operación de derivada como

$$\frac{dy}{dt} \approx \frac{y(t) - y(t - T_s)}{T_s}$$

y para la segunda derivada,

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \frac{dy}{dt} \approx \frac{dy}{dt} \left[ \frac{y(t) - y(t - T_s)}{T_s} \right] \\ &\approx \frac{\left[ \frac{dy}{dt} - \frac{dy(t-T_s)}{dt} \right]}{T_s} \\ &\approx \frac{\frac{y(t) - y(t - T_s)}{T_s} - \frac{y(y - T_s) - y(t - 2T_s)}{T_s}}{T_s} \\ &\approx \frac{y(t) - 2y(t - T_s) + y(t - 2T_s)}{T_s^2} \end{aligned}$$

sustituyendo las aproximaciones de las derivadas en la ecuación diferencial, y considerando que el tiempo es muestreado, es decir,  $t = nT_s$ , en donde  $n$  es el índice de muestreo y  $T_s$  el periodo de muestreo, entonces se

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código: MADO-70
		Versión: 01
		Página: 52 / 78
		Sección ISO: 8.3
		Fecha de emisión: 2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica
		La impresión de este documento es una copia no controlada

tiene que

$$\frac{y(nT_s) - 2y(nT_s - T_s) + y(nT_s - 2T_s)}{T_s^2} + a_1 \frac{y(nT_s) - y(nT_s - T_s)}{T_s} + a_0 y(nT_s) = b_0 x(nT_s)$$

utilizando manipulaciones algebraicas simples es posible reescribir la ecuación anterior como,

$$\left( \frac{1}{T_s^2} + \frac{a_1}{T_s} + a_0 \right) y[(n)T_s] - \left( \frac{2}{T_s^2} + \frac{a_1}{T_s} \right) y[(n-1)T_s] + \frac{1}{T_s^2} y[(n-2)T_s] = b_0 x[(n)T_s]$$

o bien

$$\left( \frac{1 + a_1 T_s + a_0 T_s^2}{T_s^2} \right) y[(n)T_s] - \left( \frac{2 + a_1 T_s}{T_s^2} \right) y[(n-1)T_s] + \frac{1}{T_s^2} y[(n-2)T_s] = b_0 x[(n)T_s]$$

normalizando y omitiendo por simplicidad la dependencia con el tiempo de muestreo, entonces se obtiene la siguiente ecuación en diferencias,

$$y[n] - c_1 y[n-1] + c_2 y[n-2] = d_0 x[n]$$

con coeficientes

$$c_1 = \frac{2 + a_1 T_s}{1 + a_1 T_s + a_0 T_s^2}, \quad c_2 = \frac{1}{1 + a_1 T_s + a_0 T_s^2} \quad d_0 = \frac{T_s^2}{1 + a_1 T_s + a_0 T_s^2} b_0, \quad (26)$$

si se consideran condiciones iniciales nulas y se aplica la transformada Z a la ecuación anterior, se obtiene

$$Y(z) - c_1 z^{-1} Y(z) + c_2 z^{-2} Y(z) = d_0 X(z)$$

y finalmente la función de transferencia está dada por

$$H(z) = \frac{d_0}{1 - c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2}}$$

o bien

$$H(z) = \frac{d_0 z^2}{z^2 - c_1 z + c_2}$$

### De función de transferencia en tiempo continuo a función de transferencia en tiempo discreto

La transformada de Laplace de la derivada de una señal muestreada se puede representar como

$$\mathcal{Z}[f'(nT)] = \frac{1}{T_s} (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}[f(nT_s)]$$

con función de transferencia

$$\frac{\mathcal{Z}[f'(nT_s)]}{\mathcal{Z}[f(nT_s)]} = H_d(z) = \frac{1}{T_s} (1 - z^{-1}) = \frac{z - 1}{T_s z} \quad (27)$$

 <b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código: MADO-70 Versión: 01 Página: 53 / 78 Sección ISO: 8.3 Fecha de emisión: 2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería	Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica
La impresión de este documento es una copia no controlada	

de esta forma se tiene una forma de representar la operación de derivada en el dominio de la transformada Z. Por lo tanto, una derivada de orden arbitrario, se puede representar como

$$\frac{\mathcal{Z}[f^{(q)}(nT_s)]}{\mathcal{Z}[f(nT_s)]} = H_d^q(z) = \left[ \frac{z-1}{T_s z} \right]^q.$$

Ahora consideremos una ecuación diferencial de segundo orden que representa el comportamiento entrada salida de un sistema,

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 x(t), \quad y(0) = y_0 \quad \frac{dy}{dt}(0) = y'(0)$$

cuya función de transferencia está dada por

$$H(s) = \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \tag{28}$$

La ecuación diferencial después de muestreo, es decir, sustituyendo  $t = nT_s$  resulta en

$$\frac{d^2y(nT_s)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(nT_s)}{dt} + a_0 y(nT_s) = b_0 x(nT_s), \quad y(0) = y_0 \quad \frac{dy}{dt}(0) = y'(0)$$

aplicando la transformada Z a ambos miembros de la ecuación anterior y utilizando la derivada  $H_d(z)$ ,

$$H_d^2(z)Y(z) + a_1 H_d(z) + a_0 Y(z) = b_0 X(z)$$

y la función de transferencia está dada por

$$H_c(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0}{H_d^2(z) + a_1 H_d(z) + a_0} \tag{29}$$

comparando la función de transferencia del sistema en tiempo continuo (28) con la versión de tiempo discreto (29) notamos que

$$H_c(z) = H(z)|_{s=H_d(z)}$$

lo cual se puede considerar como un mapeo desde la variable  $s$  a la variable  $z$ . Si sustituimos la expresión (27) en (29), tenemos que

$$\begin{aligned} H_c(z) &= \frac{b_0}{\left(\frac{z-1}{T_s z}\right)^2 + a_1 \left(\frac{z-1}{T_s z}\right) + a_0} \\ &= \frac{b_0}{\frac{z^2 - 2z + 1}{T_s^2 z^2} + a_1 \frac{z-1}{T_s z} + a_0} \end{aligned}$$

 <b>Manual de prácticas del</b> <b>Laboratorio de</b> <b>Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código: MADO-70 Versión: 01 Página: 54 / 78 Sección ISO: 8.3 Fecha de emisión: 2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería	Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica
La impresión de este documento es una copia no controlada	

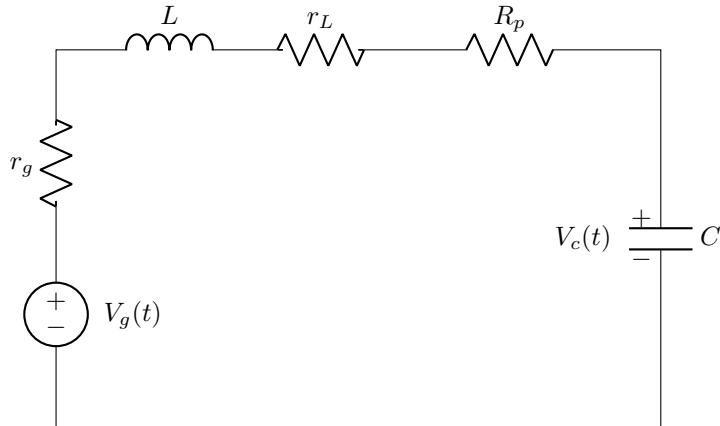


Figura 26. Circuito RLC serie

realizando manipulaciones algebraicas se obtiene

$$H_c(z) = \frac{d_0 z^2}{z^2 - c_1 z + c_2}$$

con los coeficientes definidos en (26). Conforme el tiempo de muestreo es más pequeño la aproximación a la respuesta del sistema en tiempo discreto es mejor. Los dos métodos vistos son basados en aproximaciones de derivadas con diferencias finitas, una en el dominio del tiempo y otra en el dominio de la transformada Z.

## Desarrollo de la práctica

### Aproximación de sistemas de sistemas de tiempo continuo por sistemas de tiempo discreto

#### De ecuaciones diferenciales a ecuaciones en diferencias y de función de transferencia en tiempo discreto a función de transferencia en tiempo continuo

Considere un circuito RLC como el mostrado en la Figura 26, cuyo comportamiento, considerando como entrada el voltaje  $V_g(t)$  de la fuente y como salida el voltaje en el capacitor  $V_c(t)$ , está dado por la ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2V_c(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dV_c(t)}{dt} + \frac{1}{LC} V_c(t) = \frac{1}{LC} V_g(t), \quad V_c(0) = V_{c0} \quad \frac{dV_c}{dt}(0) = V'_{c0}$$

considere que  $\frac{R}{L} = 1$  y  $\frac{1}{LC} = 5$ .

 <b>Manual de prácticas del</b> <b>Laboratorio de</b> <b>Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código: MADO-70 Versión: 01 Página: 55 / 78 Sección ISO: 8.3 Fecha de emisión: 2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería	Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica
La impresión de este documento es una copia no controlada	

- Resuelva la ecuación diferencial utilizando los métodos analíticos disponibles en el software especializado que esté utilizando, escriba la solución y grafíquela, muestre los resultados en el siguiente cuadro.

Solucion analitica del circuito: \_\_\_\_\_  
Representacion grafica:

- Considerando un periodo de muestreo de  $T_s = 1$  y utilizando el método de discretización mediante diferencias finitas, encuentre la ecuación en diferencias asociada y resuélvala utilizando el método de recurrencia. Compare los resultados gráficos de la versión de tiempo continuo y la de tiempo discreto para diferentes valores del periodo de muestreo (disminúyalo en un punto decimal hasta  $T_s = 0,0001$ ).

Comparacion entre solucion de tiempo discreto y aproximacion con diferencias finitas para diferentes valores del tiempo de muestreo

- Obtenga la función de transferencia del sistema de tiempo continuo.

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código:	MADO-70	
		Versión:	01	
		Página:	56 / 78	
		Sección ISO:	8.3	
Fecha de emisión:		2 de febrero 2018		
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica		
La impresión de este documento es una copia no controlada				

- Utilizando  $T_s = 1$ :

- a) Obtenga la función de transferencia de tiempo discreto de la ecuación en diferencias que resultó en el punto anterior.

---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---

- b) Obtenga la función de transferencia de tiempo discreto a partir de la función de transferencia de tiempo continuo del sistema utilizando un diferenciador discreto, ¿cómo son las funciones de transferencia obtenidas en este punto y el anterior? ¿qué puede concluir?

---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---

- Grafique en una sola figura la respuesta al impulso del sistema de tiempo continuo, y las dos aproximaciones de tiempo discreto.

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código: MADO-70
		Versión: 01
		Página: 57 / 78
		Sección ISO: 8.3
		Fecha de emisión: 2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica
		La impresión de este documento es una copia no controlada

Comparacion de solucion de tiempo continuo  
y solucion de tiempo discreto utilizando funciones de transferencia

- Disminuya el tiempo de muestreo hasta obtener una aproximación adecuada de la respuesta del sistema y grafique la comparación. ¿Qué aproximación resultó mejor?
- 

Comparacion de solucion de tiempo continuo y solucion de  
tiempo discreto utilizando funciones de transferencia para diferentes valores del  
tiempo de muestreo

### Análisis de un sistema discreto.

Considere un sistema lineal e invariante en el tiempo representado por la siguiente función de transferencia

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código: MADO-70
		Versión: 01
		Página: 58 / 78
		Sección ISO: 8.3
		Fecha de emisión: 2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica
La impresión de este documento es una copia no controlada		

$$G(s) = \frac{1}{s(s + 3)}$$

- Determine la estabilidad del sistema.
- 

- Utilizando el software especializado de su preferencia, determine la respuesta al escalón del sistema y describa como es su comportamiento.
- 
- 
- 
- 
- 
- 
- 
- 
- 
- 
- 
- 

Respuesta al escalon del sistema a controlar

- De manera general un sistema se encuentra caracterizado por la interacción entre la señal de entrada y su respuesta al impulso por esta razón para modificar el comportamiento de los sistemas es necesario

 <b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código: MADO-70 Versión: 01 Página: 59 / 78 Sección ISO: 8.3 Fecha de emisión: 2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería	Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica
La impresión de este documento es una copia no controlada	

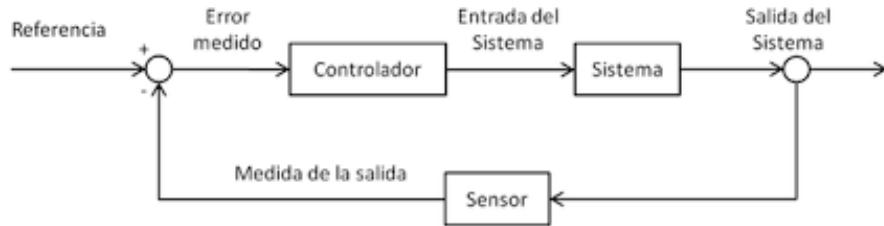


Figura 27. Sistema Automático

modificar su respuesta al impulso. Este objetivo se logra a través de la interconexión de sistemas con diferentes tipos de respuesta impulsiva. La forma en como se realiza la interconexión de sistemas puede garantizar que ciertas propiedades del sistema mejoren, por ejemplo la estabilidad. En las aplicaciones directas de la convolución es importante recalcar que es posible obtener una respuesta impulsiva equivalente dada una estructura en la interconexión de diferentes sistemas. Una interconexión clásica entre sistemas corresponde al lazo cerrado, el cual compara la señal de salida del sistema con una señal de referencia lo que da como resultado un error, que se trata de minimizar para garantizar el comportamiento deseado, de acuerdo con el diagrama de bloques mostrado en Figura 27.

El modo más simple de interconexión consiste en dos sistemas conectados en serie, en donde para esta aplicación se cumple lo siguiente

$$u(t) = e(t) * K\delta(t) \quad (30)$$

en donde  $u(t)$  es la salida del sistema controlador,  $e(t) = r(t) - y(t)$ , donde  $e(t)$  es la señal del entrada del sistema controlador denominada usualmente error,  $r(t)$  es una señal de referencia, y  $y(t)$  es la salida del sistema. Además  $\delta(t)$  es el impulso unitario y  $K$  es una constante que pertenece a los reales positivos. Si a 30 se le aplica la transformada de Laplace se obtiene

$$U(s) = E(s)K; \quad \frac{U(s)}{E(s)} = K \quad (31)$$

de esta forma  $K$  es la función de transferencia del sistema controlador, que desde un punto de vista práctico se denomina control proporcional.

La conexión de la Figura 27 se denomina conexión en retroalimentación negativa, y es posible determinar la función de transferencia correspondiente mediante software especializado, para lo cual se deben definir previamente las funciones de transferencia del controlador, del sistema y del sensor. Considerando la función de transferencia del sistema, la del controlador como  $C(s) = K$  y la del sensor  $H(s) = 1$ , determine la función de transferencia de lazo cerrado  $G_c(s)$  correspondiente. ¿Cómo son los polos del sistema? ¿Qué puede decir de la estabilidad del mismo?

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código:	MADO-70
		Versión:	01
		Página:	60 / 78
		Sección ISO:	8.3
		Fecha de emisión:	2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento:	Laboratorio de control y robótica
La impresión de este documento es una copia no controlada			

- A partir de las funciones de transferencia de lazo abierto y de lazo cerrado en tiempo continuo obtenga las versiones de tiempo discreto. Realice lo anterior utilizando los procedimientos presentados en la Introducción Teórica y el software especializado de su elección. Reporte sus resultados a continuación.
- 
- 
- 
- 
- 
-

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código: MADO-70
		Versión: 01
		Página: 61 / 78
		Sección ISO: 8.3
		Fecha de emisión: 2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica
		La impresión de este documento es una copia no controlada

Respuesta al escalon del sistema con control

- Determine los polos de lazo abierto y de lazo cerrado de tiempo discreto y caracterice la estabilidad de cada uno de estos. Determine la respuesta al escalón de ambos sistemas utilizando software especializado. Escriba sus resultados a continuación y las gráficas obtenidas en los espacios correspondientes.

---



---



---



---



---



---



---

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código: MADO-70
		Versión: 01
		Página: 62 / 78
		Sección ISO: 8.3
		Fecha de emisión: 2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica
		La impresión de este documento es una copia no controlada

Respuesta al escalón del sistema en tiempo discreto

Respuesta al escalón del sistema de control en tiempo discreto

## Preguntas de cierre

- Explique brevemente la importancia de la conversión de señales de tiempo continuo a tiempo discreto



# Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales

Código:	MADO-70
Versión:	01
Página:	63 / 78
Sección ISO:	8.3
Fecha de emisión:	2 de febrero 2018

Facultad de Ingeniería

Área/Departamento:  
Laboratorio de control y robótica

La impresión de este documento es una copia no controlada

2. ¿Qué relación existe entre la transformadas de Laplace y Z?

---

---

---

---

---

---

3. ¿Cómo se caracteriza la estabilidad de sistemas de tiempo continuo y tiempo discreto en el contexto de funciones de transferencia?

---

---

---

---

---

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código:	MADO-70
		Versión:	01
		Página:	64 / 78
		Sección ISO:	8.3
		Fecha de emisión:	2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento:	Laboratorio de control y robótica
La impresión de este documento es una copia no controlada			

## OBSERVACIONES Y CONCLUSIONES

Nombre:

---



---



---



---



---



---



---

Nombre:

---



---



---



---



---



---



---

Nombre:

---



---



---



---



---



---



---

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código:	MADO-70
		Versión:	01
		Página:	65 / 78
		Sección ISO:	8.3
		Fecha de emisión:	2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento:	Laboratorio de control y robótica
La impresión de este documento es una copia no controlada			

Nombre:

---



---



---



---



---



---



---



---



---



---

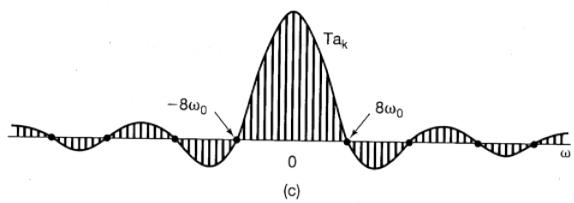
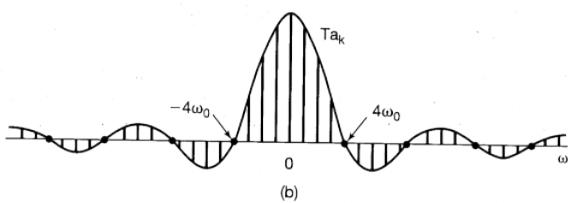
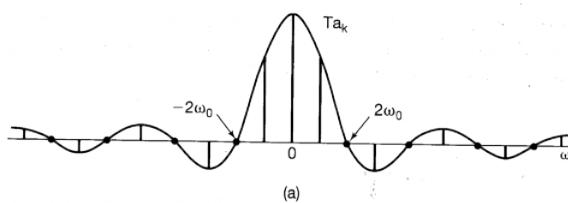


---

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código: MADO-70
		Versión: 01
		Página: 66 / 78
		Sección ISO: 8.3
		Fecha de emisión: 2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica
		La impresión de este documento es una copia no controlada

# Práctica N° 5

## Transformada de Fourier



Apellidos y nombres:			
Grupo:		Profesor:	Calificación:
Brigada:			
Semestre:		Fecha de ejecución:	

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código: MADO-70
		Versión: 01
		Página: 67 / 78
		Sección ISO: 8.3
		Fecha de emisión: 2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica
		La impresión de este documento es una copia no controlada

## Objetivos

- ☒ El alumno entenderá el concepto de transformada de Fourier así como de sus propiedades.
- ☒ El alumno conocerá las aplicaciones más comunes de la transformada de Fourier en la ingeniería.
- ☒ El alumno aprenderá a emplear la transformada de Fourier para resolver problemas comunes en el análisis de sistemas.

## Recursos

1. Software
  - a) Matlab-Simulink
  - b) Instalar los programas que se encuentran en la siguiente liga: <https://drive.google.com/drive/folders/1cK3pN8RRkEfzRCV68et-8NSf5TxTd67j?usp=sharing>
2. Equipos, instrumentos, herramientas y accesorios
  - a) Computadora con 2GB RAM min.

## Seguridad en la ejecución de la actividad

Peligro o fuente de energía		Riesgo asociado	Medidas de control	Verificación
1 <sup>ro</sup>	Voltaje alterno 	Electrocución 	Identificar los puntos energizados antes de realizar la actividad y evitar contacto	<input type="checkbox"/>
Apellidos y nombres:				

## Fundamento teórico

En análisis de Fourier permite determinar la amplitud y la fase de cada una de las componentes de frecuencia que tiene una señal. Las series de Fourier son útiles para el estudio de señales periódicas, en ocasiones las señales de análisis no cumplen esta característica, por dicha razón es importante el desarrollo de una herramienta matemática que facilite el análisis de este tipo de señales.

La transformada de Fourier es una herramienta matemática que lleva una función, sea periódica o no, del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia. Así mismo, la transformada de Fourier hace corresponder a una función  $F$  con valores complejos y definidos en la recta, otra función  $f$  definida de la siguiente manera

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (32)$$

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código: Versión: Página: Sección ISO: Fecha de emisión:	MADO-70 01 68 / 78 8.3 2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

donde  $\omega$  es la frecuencia y  $t$  el tiempo. De igual manera que la transformada de Laplace, la transformada de Fourier presenta propiedades matemáticas intrínsecas de la transformación, dichas propiedades son

- Linealidad.
- Desplazamiento en el tiempo.

$$\mathfrak{F}\{f(t - t_0)\} = e^{-j\omega t_0} F(\omega) \quad (33)$$

- Desplazamiento en la frecuencia

$$\mathfrak{F}\{e^{j\omega_0 t} f(t)\} = F(\omega - \omega_0) \quad (34)$$

- Escalamiento

$$\mathfrak{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (35)$$

Pero, ¿Para qué aplicación tiene la transformada de Fourier?, en la rama de la física se emplea en :

- Analizar el contenido frecuencial de las señales.
- Determinar como cambia la amplitud y la fase de señales senoidales al ser fuentes excitadoras de sistemas lineales e invariantes en el tiempo (SLI).
- Generar ondas de corriente y voltaje por medio de superposición.
- Analizar el contenido armónico de una señal.
- Reforzar señales.

De acuerdo a lo anterior, las principales ramas de la ingeniería en donde se emplean transformada de Fourier para resolver problemas son

- Comunicaciones
- Ingeniería eléctrica.
- Ingeniería en control.
- Ingeniería mecánica.
- Procesamiento digital de imágenes y sonido.

El poder extraordinario y la flexibilidad de las series y transformadas de Fourier se ponen de manifiesto en la gran cantidad de aplicaciones que se tienen ya sea en el ramo de las matemáticas o de la ingeniería.

 <b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código: MADO-70 Versión: 01 Página: 69 / 78 Sección ISO: 8.3 Fecha de emisión: 2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería	Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica
La impresión de este documento es una copia no controlada	



Figura 28. Experimento 1

## Desarrollo de la actividad

1. Ejecute el programa proporcionado llamado *Base\_armonicos.vi*, una vez ejecutado se abrirá una pantalla principal como la que se muestra en la Figura 28
2. El programa proporcionado consta de cinco señales senoidales a las cuales se les puede modificar la amplitud, la frecuencia y la fase.
3. Como primer paso, coloque la señal **señal senoidal 1** con una amplitud de cinco y una frecuencia de 250[Hz] y una fase de 0. ¿Qué sucede en la gráfica adjunta?

---



---



---



---



---



---



---

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código: MADO-70
		Versión: 01
		Página: 70 / 78
		Sección ISO: 8.3
		Fecha de emisión: 2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica
		La impresión de este documento es una copia no controlada

4. Modifique la fase, ¿Qué puede notar en la gráfica?, modifique la amplitud y posteriormente la frecuencia, ¿qué observa con lo anterior?, ¿qué puede concluir con base en el comportamiento de la gráfica?.

---



---



---



---



---



---



---

5. Ahora presione el botón con la leyenda *Agregar senoidal dos*, ¿Qué observa en la gráfica adjunta?

---



---



---



---



---



---



---

6. ¿Qué sucede con el número de componentes en la transformada de Fourier?

---



---



---



---



---



---



---

7. Compruebe su respuesta anterior aumentando la suma de señales senoidales presionando el botón *Agregar senoidal 3*. ¿Qué podría concluir?, ¿qué sucede al agregar más componentes senoidales?, ¿qué puede concluir

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código:	MADO-70
		Versión:	01
		Página:	71 / 78
		Sección ISO:	8.3
		Fecha de emisión:	2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

de este ejercicio?

---

---

---

---

---

8. Como ejercicio adicional, ¿que sucedería si las funciones sumadas no fueran senoidales?, ¿Aún sería cierta su conclusión anterior?, de no ser así ¿Que puede agregar para completar su resultado?

---

---

---

---

---

6

- Ahora considere el programa proporcionado llamado *Música.vi*, dicho programa posee el panel frontal mostrado en la Figura 29
  - Este ejercicio emplea como salida la tarjeta de sonido de la computadora. Coloque la primera señal senoidal a una frecuencia de  $311,127[Hz]$ , la segunda señal senoidal a una frecuencia de  $493,88[Hz]$ , la tercera señal a  $261,626$ , la cuarta a  $987,767[Hz]$  y la quinta a  $739,989[Hz]$ . Con los controles mostrados en la Figura 30

<sup>6</sup>Pruébe con señales fundamentales como escalón unitario o rampa

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código: MADO-70 Versión: 01 Página: 72 / 78 Sección ISO: 8.3 Fecha de emisión: 2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica
La impresión de este documento es una copia no controlada		

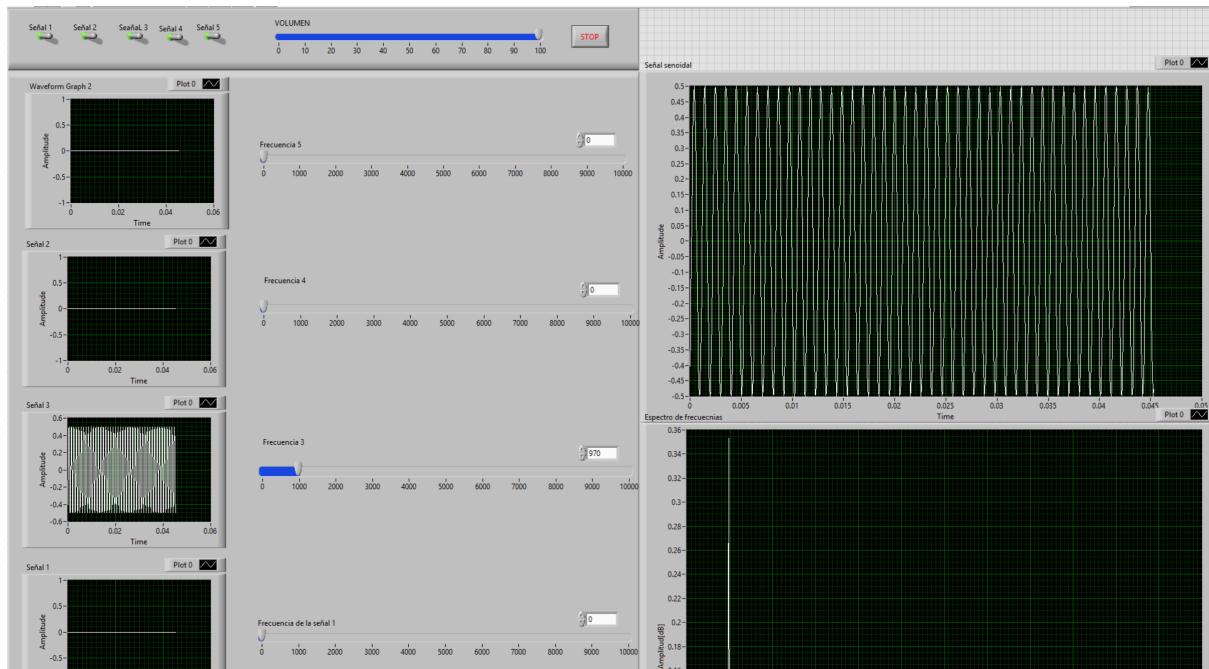


Figura 29. Experimento 2



Figura 30. Selección de señal

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código: MADO-70
		Versión: 01
		Página: 73 / 78
		Sección ISO: 8.3
		Fecha de emisión: 2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica
		La impresión de este documento es una copia no controlada

11. Quite una a una las señales, lo que observa ¿es lo que esperaba?,¿por qué?.

---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---

12. Ahora coloque el cable de sonido a la salida del conector de audífonos de su computadora y dicho cable colóquelo en el modulo elvys. Seleccione el espectro de frecuencia y repita el proceso del paso anterior. ¿Ambas gráficas corresponden?. Varíe la frecuencia de cada una de las señales y observe su comportamiento en el instrumento de medición. ¿Qué puede concluir?

---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---

13. Ahora, considere el sistema, masa-resorte-amortiguador mostrado en la Figura 31 caracterizado por la siguiente ecuación diferencial

$$M \frac{d^2}{dt^2}y(t) + D \frac{d}{dt}y(t) + Ky(t) = x(t) \quad (36)$$

14. Encuentre la función de transferencia. ¿De que manera se relaciona la transformada de Laplace con la

 <b>Manual de prácticas del</b> <b>Laboratorio de</b> <b>Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código: MADO-70 Versión: 01 Página: 74 / 78 Sección ISO: 8.3 Fecha de emisión: 2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería	Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica
La impresión de este documento es una copia no controlada	

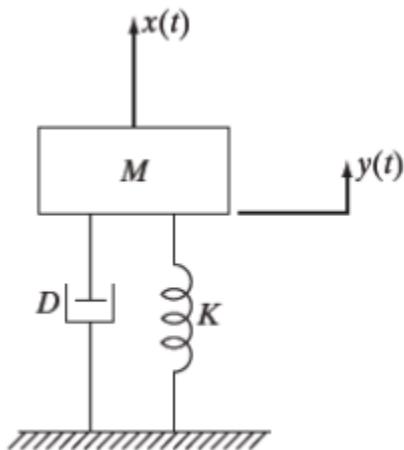


Figura 31. Masa-resorte-amortiguador

Transformada de Fourier? ¿Cuál es la principal diferencia entre ambas?<sup>7</sup>.

---



---



---



---



---



---



---

15. Obtenga la gráfica de la transformada de Fourier de la función de transferencia.<sup>7</sup>.
16. Se sabe que la respuesta de un sistema mediante la integral de convolución de

$$x(t) = u(t) - u(t - 1) \quad (37)$$

$$h(t) = u(t - 1) - u(t - 2) \quad (38)$$

se encuentra determinada por la siguiente expresión

$$y(t) = h(t) * x(t) = r(t - 1) - 2r(t - 2) + r(t - 3) \quad (39)$$

<sup>7</sup>Recuerde que dicha gráfica se caracteriza por  $|H(\omega)|$  vs  $\omega$

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código:	MADO-70
		Versión:	01
		Página:	75 / 78
		Sección ISO:	8.3
		Fecha de emisión:	2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento:	Laboratorio de control y robótica
La impresión de este documento es una copia no controlada			

utilice la propiedad de la transformada de Fourier para determinar la salida del sistema y compruebe que es la misma que la obtenida en la ecuación anterior.

---



---



---



---



---



---



---



---



---

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código:	MADO-70
		Versión:	01
		Página:	76 / 78
		Sección ISO:	8.3
		Fecha de emisión:	2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento:	Laboratorio de control y robótica
La impresión de este documento es una copia no controlada			

## OBSERVACIONES Y CONCLUSIONES

Nombre:

---



---



---



---



---



---



---



---

Nombre:

---



---



---



---



---



---



---



---

Nombre:

---



---



---



---



---



---



---



---

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código:	MADO-70
		Versión:	01
		Página:	77 / 78
		Sección ISO:	8.3
		Fecha de emisión:	2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento:	Laboratorio de control y robótica
La impresión de este documento es una copia no controlada			

Nombre:

---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Análisis de Sistemas y Señales</b>	Código: MADO-70
		Versión: 01
		Página: 78 / 78
		Sección ISO: 8.3
		Fecha de emisión: 2 de febrero 2018
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de control y robótica
		La impresión de este documento es una copia no controlada

## Referencias

- [1] Signals and systems. <http://signalsandsystems.wikidot.com/>. Accessed: 2017-07-24. (Not cited.)
- [2] Luis Chaparro. *Signals and Systems using MATLAB*. Academic Press, 2010. (Not cited.)
- [3] Erik Cheever. Linear physical systems analysis. <http://lpsa.swarthmore.edu/index.html>. Accessed: 2017-03-24. (Not cited.)
- [4] Mata Gloria, Sánchez Víctor, and Gómez Juan. *Análisis de Sistemas y Señales con cómputo avanzado*. F.I. UNAM, 2001. (Not cited.)
- [5] Katsuhiko Ogata and Yanjuan Yang. *Modern control engineering*, volume 4. Prentice hall India, 2002. (Not cited.)
- [6] Alan V Oppenheim, Alan S Willsky, and S Hamid Nawab. *Señales y sistemas*. Pearson Educación, 1998. (Not cited.)
- [7] Alex Palamides and Anastasia Veloni. *Signals and systems laboratory with MATLAB*. CRC press, 2010. (Not cited.)
- [8] Thomas F. Weiss. *INTRODUCTION TO MATLAB — Fall 1999*. MIT. (Not cited.)