

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	1/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de Circuitos Eléctricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

# Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos

Elaborado por:	Revisado por:	Autorizado por:	Vigente desde:
<b>Ing. María del Rosario Vázquez Fuentes Ing. Julia Vázquez Fuentes</b>	<b>Ing. Víctor Sánchez Esquivel M.I. Antonio Salvá Calleja</b>	<b>Dr. Paul Rolando Maya Ortiz</b>	<b>28 de enero de 2019</b>

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	2/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de circuitos electricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

# Análisis Sinusoidal Permanente de Circuitos Lineales

**N° de práctica: 01**

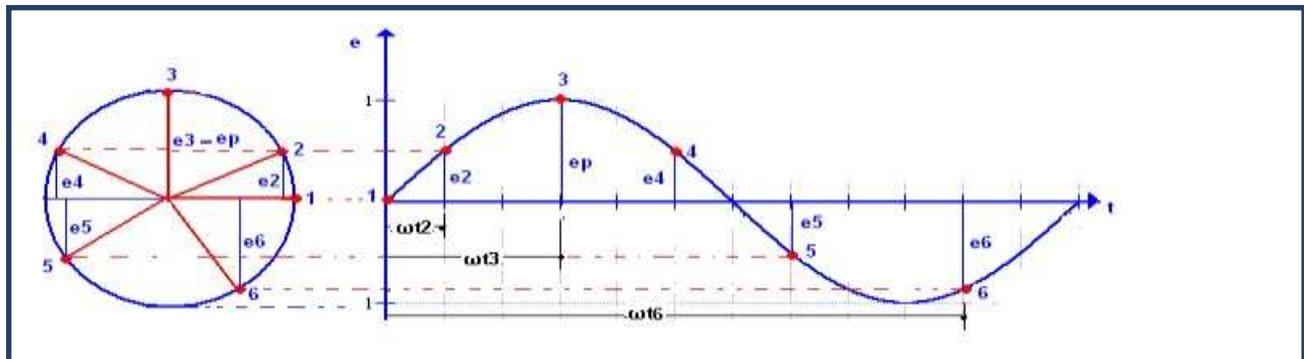
Nombre completo del alumno		Firma
N° de brigada:	Fecha de elaboración:	Grupo:

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	3/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de circuitos electricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

## PRÁCTICA 1

### Análisis del estado sinusoidal permanente de circuitos lineales

Víctor Manuel Sánchez Esquivel/Antonio Salvá Calleja



	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	4/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de circuitos electricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

## Objetivo de aprendizaje

Realizar una introducción en el estudio de *la respuesta en frecuencia* de un sistema lineal e invariante en el tiempo.

Verificar la forma de la respuesta permanente de una red eléctrica lineal e invariante en el tiempo, cuando la forma de la onda de la señal de entrada es sinusoidal de frecuencia angular  $\omega$ .

Determinar el valor de variables eléctricas que constituyen una red eléctrica, a partir de la respuesta sinusoidal permanente.

Inferir el desfase entre el voltaje y la corriente eléctrica en un resistor, en un inductor y en un capacitor.

## Introducción teórica

En un sistema continuo, lineal, invariante en el tiempo y estable (SCLIE), cuando la entrada es una señal sinusoidal de amplitud  $A_m$  y frecuencia (angular)  $\omega$ , su salida presenta, después que ha transcurrido el tiempo suficiente para que la componente transitoria se haya extinguido, una señal de la misma frecuencia  $\omega$ , pero con distintas magnitud y fase con respecto a la señal de entrada, esta respuesta recibe el nombre de *respuesta sinusoidal en estado permanente*. En la figura 1 se ilustra el concepto anterior para un SCLIE con función de transferencia  $H(s)$ , denotándose a la entrada  $x(t)$ , a la salida permanente  $y_p(t)$ , a la frecuencia de la señal sinusoidal implicada  $\omega$  y a la amplitud de la señal de entrada  $A_m$ . En la figura 1 se aprecia que la amplitud de la señal de salida permanente es el producto de la amplitud de la señal de entrada multiplicada por la magnitud del complejo  $H(j\omega)$ , y que el corrimiento de la fase presente en la salida es el argumento del complejo de  $H(j\omega)$ .



Figura 1. Relación de la entrada sinusoidal y la salida permanente de un SCLIE.

La respuesta permanente de un circuito eléctrico pasivo, lineal e invariante en el tiempo debida a una entrada sinusoidal, como la que se muestra en la figura 1, se puede expresar como

$$y_p(t) = A_m |H(j\omega)| \text{sen}(\omega t + \angle H(j\omega)) \quad (1)$$

Ejemplo. Suponga que en el circuito eléctrico RC de primer orden, que se muestra en la figura 2, la señal de entrada es

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	5/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de circuitos electricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

$$v_e(t) = 10 \text{ sen}(3000 \pi t) [V] \quad (2)$$

Con los valores de la capacitancia y la resistencia  $C = 0.1 \mu F$  y  $R = 1000 \Omega$ , respectivamente.

Determine la señal  $v_o(t)$  en estado permanente, denotada como  $v_p(t)$ .

Solución.

En la ecuación (2), se observa que la amplitud de la señal sinusoidal de la entrada es:

$$A_m = 10 [V] \text{ y } \omega = 3000 \pi \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

Recordando que la función de transferencia de un SCLI denotada como  $H(s)$ , está dada por

$$H(s) = \frac{\mathcal{L}\{y_{zs}(t)\}}{\mathcal{L}\{x(t)\}} = \frac{Y_{zs}(s)}{X(s)} \quad (3)$$

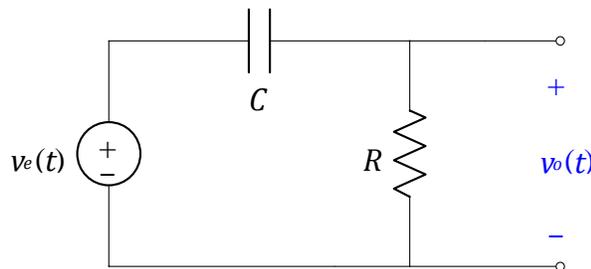


Figura 2. Circuito de primer orden excitado por una señal sinusoidal.

Lo que implica que las condiciones iniciales son nulas tanto para  $y(t)$  como para  $x(t)$ .

La función de transferencia del circuito eléctrico de la figura 2 es

$$H(s) = \frac{s}{s + \frac{1}{RC}} \quad (4)$$

Considerando los valores de la capacitancia y la resistencia, se tiene

$$H(j\omega) = \frac{j\omega}{j\omega + 10000} \quad (5)$$

Como,  $\omega = 3000 \pi \left[ \frac{\text{rad}}{\text{seg}} \right]$  con la ecuación (1) y aplicando conceptos elementales de aritmética de números complejos, se observa que la respuesta permanente  $v_p(t)$  del circuito de la figura 2 es

$$v_p(t) = 6.8587 \text{ sen}(3000 \pi t + 46.70^\circ) [V]$$

A continuación, aplicando la transformada de Laplace, se presenta una forma (entre otras) de determinar las expresiones de la figura 1 empleadas para la obtención de la respuesta sinusoidal de estado permanente de un SCLIE.

**Respuesta sinusoidal permanente**

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	6/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de circuitos electricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

En general, un SCLI de orden puede modelarse mediante una ecuación diferencial lineal, ordinaria y de coeficientes constantes. Si la entrada al sistema es una señal que se denota por  $x(t)$  y la salida como  $y(t)$ , la ecuación diferencial que representa o modela al sistema es

$$a_N \frac{d^N y(t)}{dt^N} + a_{N-1} \frac{d^{N-1} y(t)}{dt^{N-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_M \frac{d^M x(t)}{dt^M} + b_{M-1} \frac{d^{M-1} x(t)}{dt^{M-1}} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t) \quad (6)$$

Donde los coeficientes  $a_i$  para  $i = 0, 1, \dots, N$  y  $b_i$  para  $i = 0, 1, \dots, M$ , dependen de valores asociados con los elementos físicos que constituyen el sistema. Para un sistema realizable (*en el que la variable independiente es el tiempo*),  $M$  siempre es menor o igual a  $N$ . Recordando que la transformada de Laplace de la derivada  $n$ -ésima de una función  $f(t)$  está dada por

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n y}{dt^n}\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - s^{n-2} f^{(1)}(0^-) - \dots - f^{(n-1)}(0^-) \quad (7)$$

donde  $F(s)$  es la transformada de Laplace de  $f(t)$  y  $f^{(k-1)}(0^-)$  es la  $(k-1)$ -ésima derivada de  $f(t)$  evaluada en  $t = 0^-$ .

Aplicando la transformada de Laplace a ambos miembros de la ecuación (6) y considerando la ecuación (7), la transformada de Laplace de la función de la salida  $y(t)$  es <sup>1</sup>

$$Y(s) = \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \dots + a_1 s + a_0} X(s) + \frac{P_{N-1}(s)}{a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

8)

Donde  $P_{N-1}$  es un polinomio de grado  $N-1$ , cuyos coeficientes dependen de los que están presentes en la ecuación (6) y de los valores iniciales de las funciones  $y(t)$  y  $x(t)$  y sus derivadas de hasta orden  $N-1$  y  $M-1$  respectivamente.

Ahora bien, considerando la ecuación (3), se reconoce en la ecuación (8) que el factor que multiplica a  $X(s)$  es la función de transferencia del sistema, que aquí se denota como  $H(s)$ , y además, teniendo en cuenta que la entrada es una señal sinusoidal de amplitud  $A_m$  y frecuencia  $\omega$ ,  $Y(s)$  puede expresarse de la siguiente manera

$$Y(s) = H(s) A_m \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} + \frac{P_{N-1}(s)}{a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

(9)

El primer sumando del miembro derecho de la ecuación (9), se puede expresar como

<sup>1</sup> Es una práctica común, normalizar el denominador de la función de transferencia de tal forma que el coeficiente  $a_N$  sea igual a uno.

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	7/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de circuitos electricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

$$H(s) A_m \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{C}{s - j\omega} + \frac{C^*}{s + j\omega} + G(s)$$

(10)

donde  $G(s)$  está conformado por la suma de las fracciones parciales del desarrollo del primer elemento del miembro derecho de la ecuación (9), debidas al denominador de  $H(s)$ . Los valores de  $C$  y su complejo conjugado  $C^*$  son

$$C = \frac{A_m H(j\omega)}{2j}$$

(11)

$$C^* = \frac{A_m H(-j\omega)}{-2j}$$

En el mismo orden de ideas, de la ecuación (8) es evidente que <sup>2</sup>

$$y(t) = y_{zs}(t) + y_{zi}(t)$$

(12)

Considerando la ecuación (11) y la identidad de Euler se puede visualizar que la respuesta permanente, es

$$y_p(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = A_m M(\omega) \text{sen}(\omega t + \phi(\omega))$$

(13)

donde  $M(\omega) = |H(j\omega)|$  y  $\phi(\omega) = \angle H(j\omega)$

Los términos de los sumandos de la ecuación (9) presentan en su denominador el polinomio que define los polos de la función de transferencia de  $H(s)$ . Si el sistema es estable, la función  $y_{zi}(t)$  tendera a cero en un tiempo que depende de los valores explícitos asociados con los elementos que integran el sistema; por lo que en este caso se dice que es un componente transitorio de la salida del sistema y que una vez que declina, prevalece como salida únicamente  $y_p(t)$  que se denomina *respuesta sinusoidal permanente*.

De esta forma, para una red eléctrica estable, lineal e invariante en el tiempo, su respuesta permanente cuando la entrada  $x(t)$  es una sinusoidal de la forma

$$x(t) = A_m \text{sen}(\omega t) \quad (14)$$

Presenta en el estado permanente una salida descrita por la ecuación (13).

**La respuesta en frecuencia de un circuito RL pasa bajas de primer orden**

La ecuación diferencial que modela el circuito eléctrico RL de la figura 3 es

<sup>2</sup> zero state, zs y zero input, zi por sus siglas en inglés; literalmente *estado cero* y *entrada cero*.

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	8/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de circuitos electricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

$$\frac{L}{R} \frac{dv_o(t)}{dt} + \frac{r_L + R}{R} v_o(t) = v_i(t) \quad (15)$$

Aplicando la transformada de Laplace y considerando las condiciones iniciales nulas, la función de transferencia resulta

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{\frac{L}{R}s + \frac{r_L + R}{R}} \quad (16)$$

De acuerdo a lo que se explicó en párrafos anteriores, cuando la entrada al circuito eléctrico de la figura 3, es la descrita por la ecuación (17), la respuesta permanente  $v_p(t)$  tiene la forma representada por la ecuación (18)

$$v_i(t) = V_m \text{sen}(\omega t) \quad (17)$$

$$v_p(t) = \frac{(R/L) V_m}{\sqrt{\left(\frac{r_L + R}{L}\right)^2 + \omega^2}} \text{sen}(\omega t + \phi) \quad (18)$$

donde

$$\phi = -\arctan\left(\frac{\omega L}{r_L + R}\right) \quad (19)$$

### La respuesta en frecuencia de un circuito RC pasa altas de primer orden

La ecuación diferencial que modela el circuito eléctrico RC de la figura 4 es

$$\frac{dv_o(t)}{dt} + \frac{1}{RC} v_o(t) = \frac{dv_i(t)}{dt} \quad (20)$$

Aplicando la transformada de Laplace y considerando las condiciones iniciales nulas, la función de transferencia resulta

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{s}{s + \frac{1}{RC}} \quad (21)$$

de acuerdo a lo que se explicó en párrafos anteriores, cuando la entrada al circuito eléctrico de la figura 4, es la descrita por la ecuación (17), la respuesta permanente  $v_p(t)$  tiene la forma representada por la ecuación (22)

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	9/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de circuitos electricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

$$v_p(t) = \frac{\omega V_m}{\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2 + \omega^2}} \text{sen}(\omega t + \phi) \quad (22)$$

Donde

$$\phi = 90^\circ - \arctan(\omega RC) \quad (23)$$

### La respuesta en frecuencia de un circuito RLC serie, pasa banda de segundo orden

El circuito eléctrico de la figura 5, tiene la siguiente ecuación diferencial como un modelo que lo describe

$$\frac{d^2 v_o(t)}{dt^2} + \frac{r_L + R}{L} \frac{dv_o(t)}{dt} + \frac{1}{LC} v_o(t) = \frac{R}{L} \frac{dv_i(t)}{dt} \quad (24)$$

La función de transferencia se encuentra con la transformada de Laplace de la ecuación diferencial anterior y considerando las condiciones iniciales nulas, así

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{(R/L)s}{s^2 + \frac{r_L + R}{L}s + \frac{1}{LC}} \quad (25)$$

la respuesta permanente debida a la entrada sinusoidal  $v_i(t) = V_m \text{sen}(\omega t)$  está dada por la siguiente expresión

$$v_p(t) = \frac{(R\omega/L) V_m}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{r_L + R}{L}\omega\right)^2}} \text{sen}(\omega t + \phi) \quad (26)$$

donde

$$\phi = 90^\circ - \arctan\left(\frac{(r_L + R)\omega}{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)L}\right) \quad (27)$$

En la ecuación (26), se advierte que cuando  $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , valor de la frecuencia que se denota  $\omega = \omega_0$  y recibe el nombre de *frecuencia de resonancia*, la amplitud de  $v_p(t)$  es máxima y corresponde al valor de

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	10/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de circuitos electricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

$$v_p(t) \Big|_{\text{máxima}} = v_p(t) \Big|_{\omega=\omega_o} = \frac{RV_m}{r_L + R} \quad (28)$$

Asimismo, para valores de la frecuencia  $\omega < \omega_o$  y  $\omega > \omega_o$ , la amplitud de  $v_p(t)$  es menor que  $v_p(t) \Big|_{\text{máxima}}$ .

En la figura 6, se presenta la respuesta en frecuencia del circuito eléctrico RLC que se estudia, vista en un osciloscopio, donde se puede verificar la aseveración anterior.

Igualmente, de la ecuación (27) se puede concluir que para  $\omega < \omega_o$ , el ángulo  $\varphi$  es positivo lo que implica que la señal de salida adelanta a la señal de entrada y para  $\omega > \omega_o$  el ángulo  $\varphi$  es negativo lo que conlleva a establecer que la señal de salida está atrasada con respecto a la señal de entrada. En el límite, estos adelanto y atraso corresponden a  $90^\circ$  ( $\pi/2$  radianes) cuando  $\omega \rightarrow 0$  y  $-90^\circ$  ( $-\pi/2$  radianes) cuando  $\omega \rightarrow \infty$ , respectivamente.

## Desarrollo

### Experimento 1

El circuito eléctrico que se muestra en la figura 3.

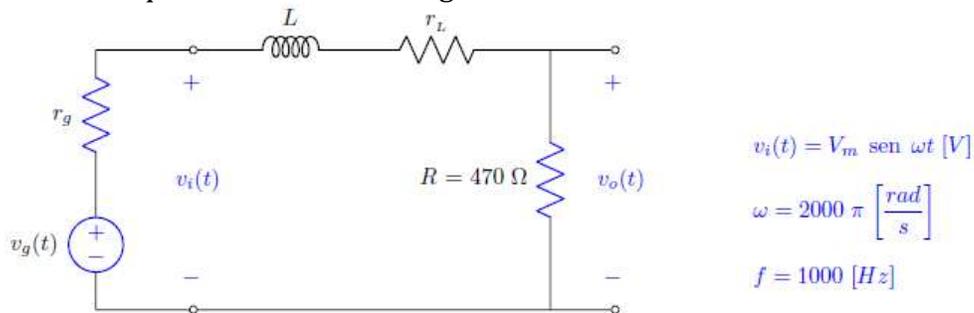


Figura 3. Circuito eléctrico RL.

Obtenga los elementos eléctricos y los instrumentos que va a utilizar.

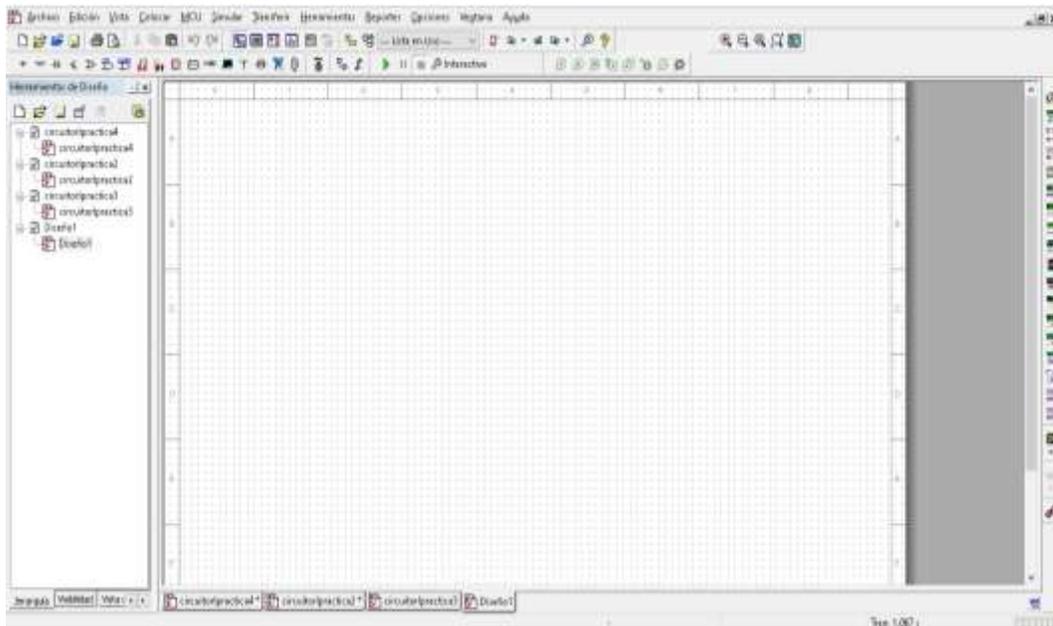
### Seleccionar los elementos eléctricos y los instrumentos de medición para armar el circuito.

En el Multisim, Dibuje el circuito con los valores indicados, Considere los valores de las resistencia interna del generador  $r_g = 50 \text{ } [\Omega]$ , la resistencia interna del inductor  $r_L = 50 \text{ } [\Omega]$ .

La pantalla de inicio de Multisim aparecerá de la siguiente manera, en la ventana de trabajo, donde se colocan los elementos que se les pide, en la parte superior se encontrara la barra de herramientas, donde podrán elegir

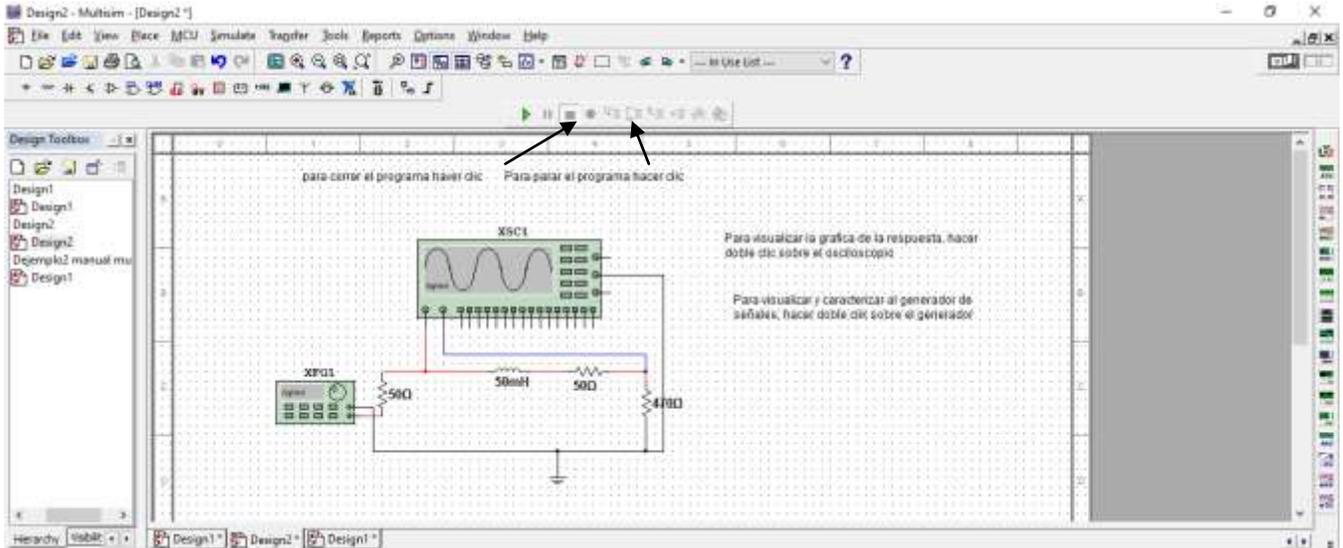
	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	11/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de circuitos electricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

los elementos eléctricos, en esa barra podrán encontrar el símbolo de tierra física, ahí se encuentran las fuentes que se necesitan, al lado de este estará el símbolo de una resistencia, en esta parte estarán los elementos, como capacitores, inductores, capacitores etc. Del lado derecho se encuentran los instrumentos, para realizar las mediciones y los generadores de funciones que se utilizan para obtener las señales indicadas por las fuentes.



A continuación se muestra el circuito armado en Multisim

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	12/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de circuitos electricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			



Para el armado de este, se utilizará a el generador de funciones Agilent, el cual es muy parecido a los que se tienen en el laboratorio (este se hace con el fin de que el alumno se familiarice con los instrumentos de laboratorio)

Es importante aclarar que se debe de colocar la tierra física en cada circuito, porque si no nos marcara un error, en la parte superior encontrara el encendido y apagado de la corrida del circuito, si el circuito se encuentra “corriendo” no se permite hacer cambios.

- Verifique que el voltaje de la salida  $v_o(t)$  está atrasado con respecto al voltaje  $v_i(t)$ .
- Mida el ángulo de atraso  $\phi$  entre el voltaje de salida  $v_o(t)$  y el voltaje  $v_i(t)$ .
- Con los valores de la frecuencia angular  $\omega$ , y de la resistencia e induc tancia  $r_L$  y  $L$  de la bobina que se le proporcionó y el valor de la resistencia  $R$ , verifique la siguiente ecuación.

$$\phi = -\arctan\left(\frac{\omega L}{r_L + R}\right)$$

- Si hay discrepancias entre el valor teórico del ángulo  $\phi$  y su valor medido experimentalmente, argumente las posibles causas de las diferencias encontradas.
- De las observaciones y mediciones realizadas. ¿Qué puede argumentar sobre el desfase entre la corriente eléctrica y el voltaje en un resistor y en un inductor?

## Experimento 2

En el circuito eléctrico que se muestra en la figura 4

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	13/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de circuitos electricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

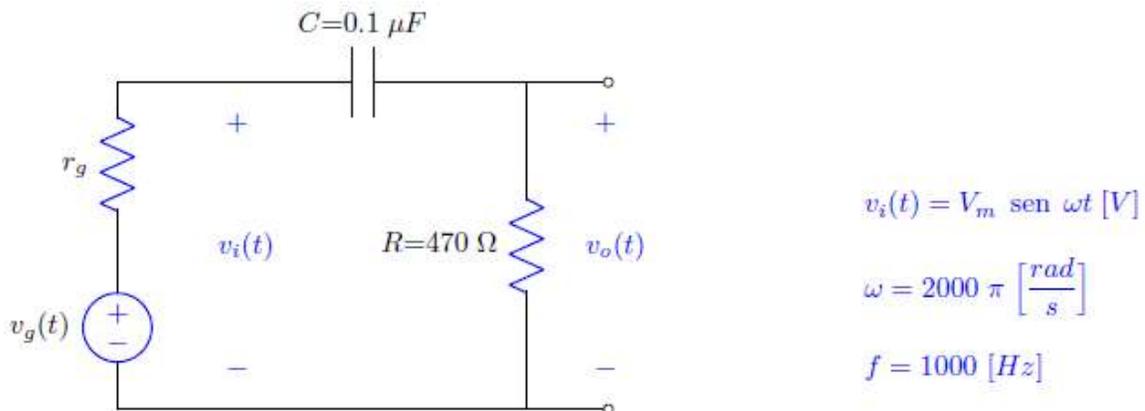
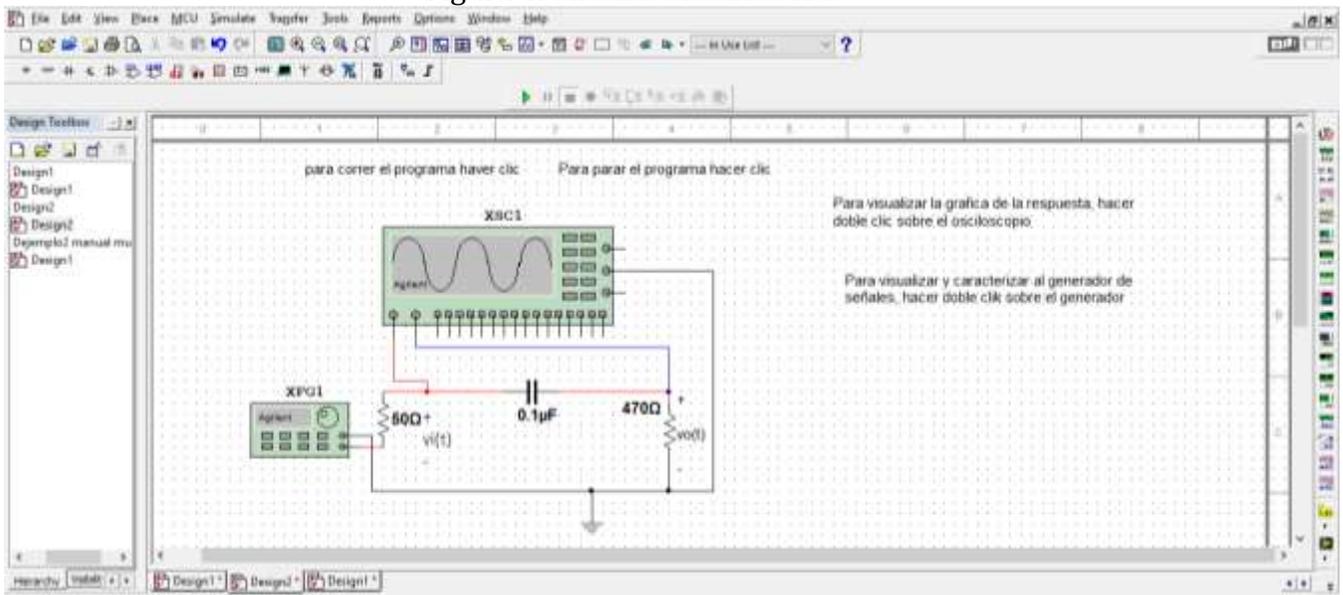


Figura 4. Circuito eléctrico RC.



- Verifique que el voltaje de la salida  $v_o(t)$  está adelantado con respecto al voltaje de  $v_i(t)$
- Mida el ángulo de adelanto  $\phi$  entre el voltaje de salida  $v_o(t)$  y el voltaje  $v_i(t)$
- Con los valores de la frecuencia angular  $\omega$ , la capacitancia  $C$  y la resistencia  $R$ , verifique la siguiente ecuación.

$$\phi = 90^\circ - \arctan(\omega CR)$$

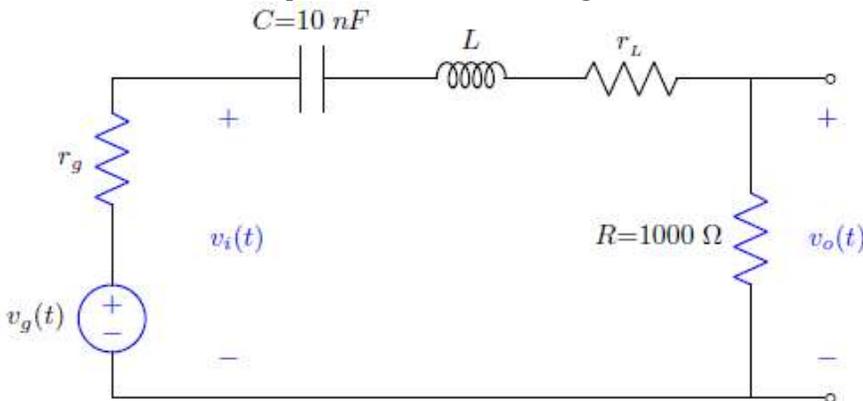
- Si hay discrepancias entre el valor teórico del ángulo  $\phi$  y su valor medido experimentalmente, argumente las posibles causas de las diferencias encontradas

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	14/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de circuitos electricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

e) De las observaciones y mediciones realizadas. ¿Qué puede argumentar sobre el desfase entre la corriente eléctrica y el voltaje en un capacitor?

### Experimento 3

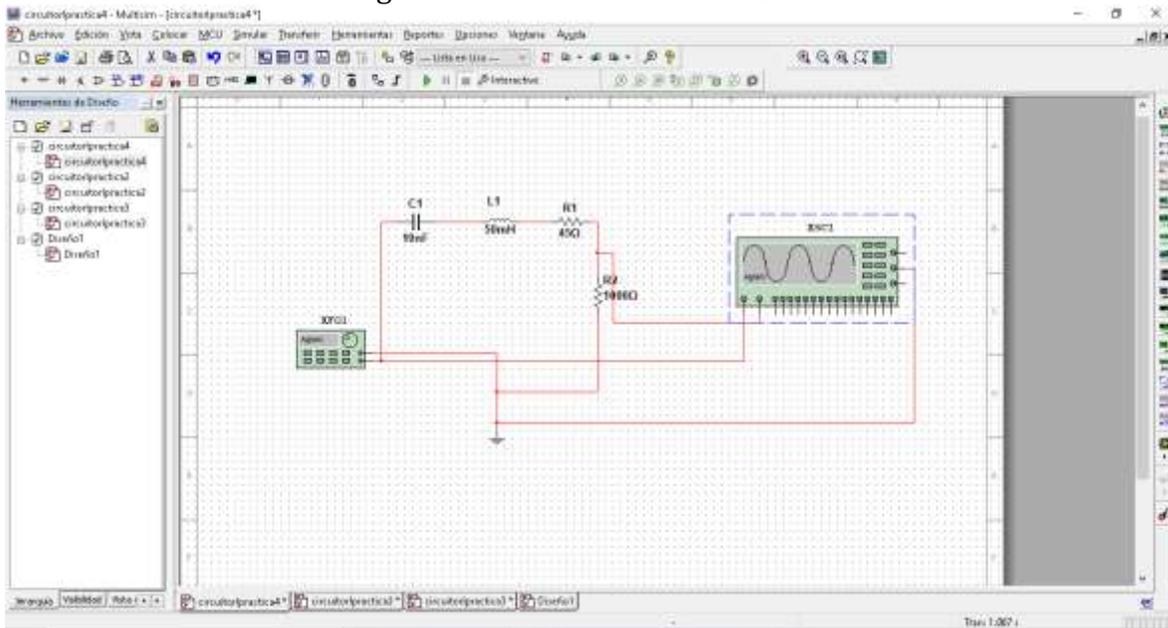
En el circuito eléctrico que se muestra en la figura 5.



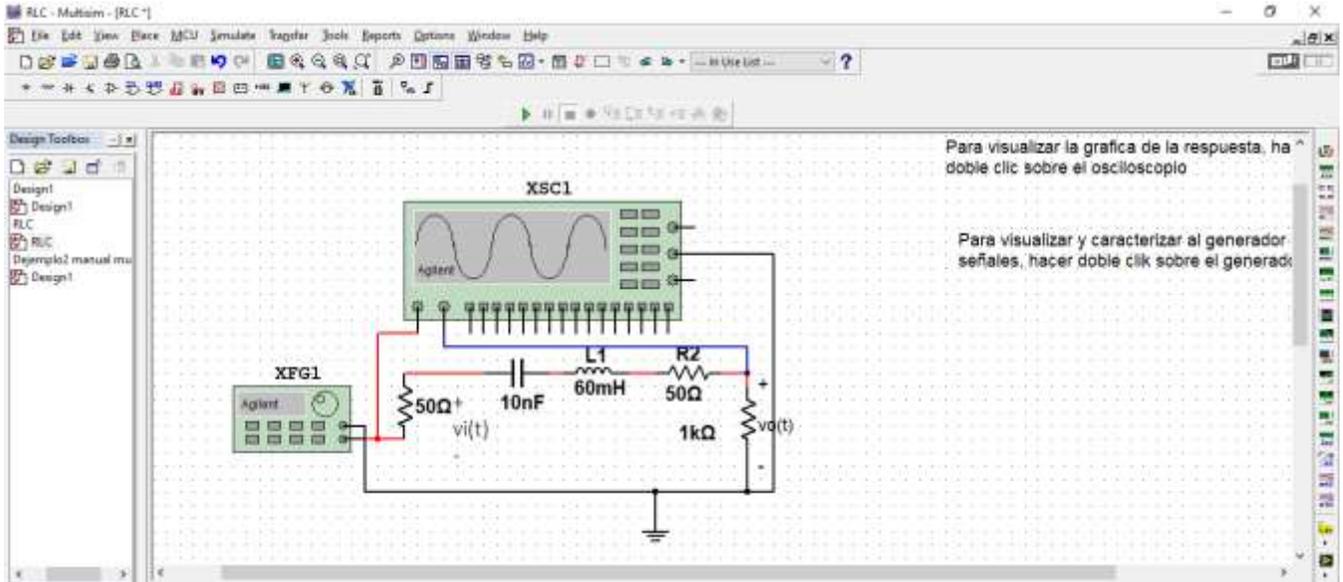
$$v_i(t) = V_m \text{ sen } \omega_p t \text{ [V]}$$

$$f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} \text{ [Hz]}$$

Figura 5. Circuito eléctrico RLC serie.



	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	15/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de circuitos electricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			



- a. Configure lo necesario en el generador de funciones para que  $f_p$  sea:

$$f_p = \frac{0.9}{2\pi\sqrt{LC}}$$

donde  $L$  y  $C$  son los valores de la inductancia y la capacitancia de los componentes eléctricos en el circuito.

- b. Varié la frecuencia del generador y encuentre la frecuencia para la cual  $v_o(t)$  tiene máxima amplitud, a esta frecuencia se le denomina  $f_o$ , y acorde con lo explicado en la seccion , es

$$f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Si hay discrepancia entre el valor teórico de  $f_o$  y su valor experimental, explique cuáles pueden ser las razones de esto.

- c. Verifique que para frecuencias diferentes de  $f_o$  la amplitud de  $v_o(t)$  es menor que la propia cuando  $f = f_o$
- d. Verifique que el ángulo  $\varphi$  es positivo y menor que  $90^\circ(\pi/2$  radianes) cuando  $f < f_o$ .
- e. Verifique que el ángulo  $\varphi$  es negativo y menor que  $-90^\circ(-\pi/2$  radianes) cuando  $f > f_o$ .

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	16/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de circuitos electricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

f. Refiera una aplicación práctica, para un circuito eléctrico con las características observadas.

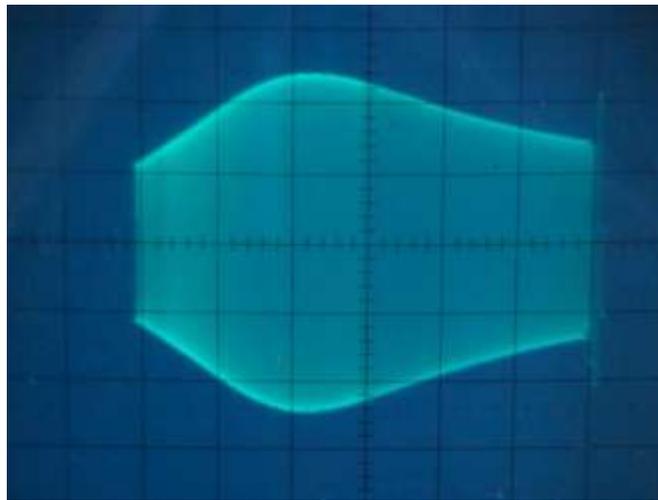


Figura 6. Respuesta en frecuencia del circuito eléctrico de la figura 5

### Equipo necesario

Laboratorio virtual; Computadora con el paquete de simulación de circuitos eléctricos  
Multisim  
Equipo necesario laboratorio real  
1 Generador de funciones  
1 Osciloscopio  
1 Solenoide

### Material necesario

1 Resistor de  $470 \Omega$ , 0.5 watt  
1 Resistor de  $1 \text{ k}\Omega$ , 0.5 watt  
1 Capacitor de  $0.1 \mu\text{F}$   
1 Capacitor de  $0.01 \mu\text{F}$

### Cuestionario previo

1. Demuestre la ecuación (15).
2. Demuestre la ecuación (16).
3. Demuestre las ecuaciones (18) y (19).

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	17/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de circuitos electricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

4. Demuestre la ecuación (20).
5. Demuestre la ecuación (21).
6. Demuestre las ecuaciones (22) y (23).
7. Demuestre la ecuación (24).
8. Demuestre la ecuación (25).
9. Demuestre las ecuaciones (26) y (27).
10. Determine el valor de la frecuencia  $\omega$  para la cual la amplitud de  $v_p(t)$ , ecuación (26), del circuito eléctrico RLC serie de la figura 5 es máxima.

#### Bibliografía

Desoer, C. A. and Kuh, E.S. *Basic Circuit Theory*. New York: McGraw-Hill Company, 1969.

Dorf, R. C., Svoboda, J. A. *Circuitos Eléctricos*. México, D. F.: Alfaomega Grupo Editor, S. A. de C. V., 2011.

Hayt, W. H., Kemmerly, J. E. *Análisis de circuitos eléctricos en ingeniería*. México: Mc Graw Hill, 2007.

Johnson, D. E., Hilburn, J. L., Johnson, J. R. *Basic Electric Circuit Analysis*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1986.

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	18/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de circuitos electricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

# Análisis Sinusoidal Permanente de Circuitos Trifásico Balanceados y Desbalanceados

**N° de práctica: 02**

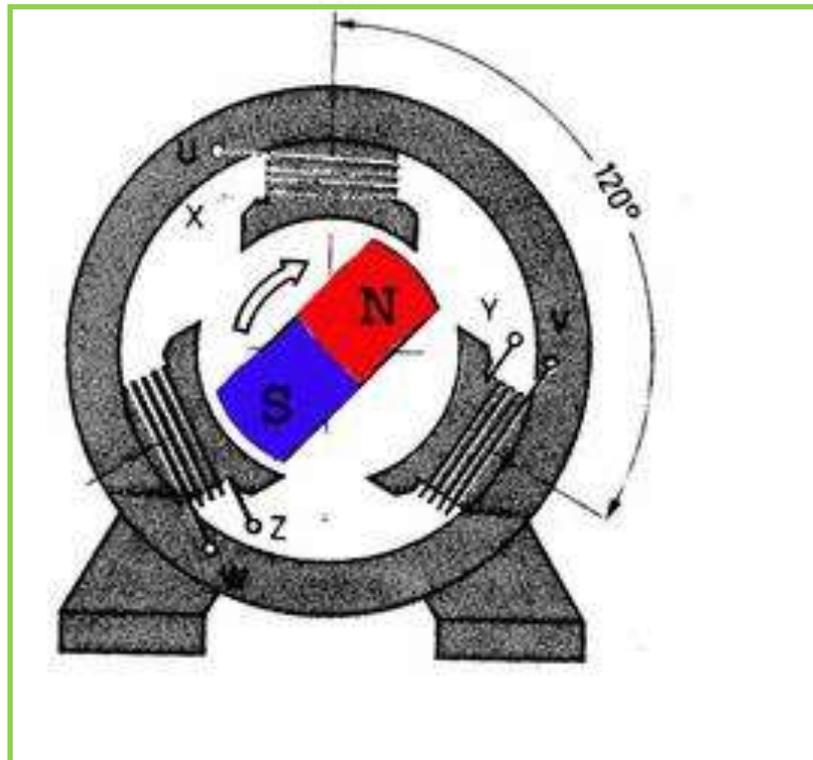
Nombre completo del alumno		Firma
N° de brigada:	Fecha de elaboración:	Grupo:

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	19/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería	Área/Departamento: Laboratorio de circuitos electricos		
La impresión de este documento es una copia no controlada			

## PRÁCTICA 2

### *Análisis sinusoidal permanente de circuitos trifásicos balanceados y desbalanceados*

Víctor Manuel Sánchez Esquivel/Antonio Salvá Calleja



	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	20/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de circuitos electricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

## Objetivos de aprendizaje

Verificar experimentalmente, para un sistema de tres fases o trifásico:

La relación entre los voltajes de línea y los voltajes de fase.

La relación entre las corrientes eléctricas de línea y las corrientes eléctricas de fase.

Llevar a cabo el análisis de circuitos trifásicos balanceados y desbalanceados.

Para lograr estos objetivos, se emplea un dispositivo electrónico denominado *Simulador Trifásico Balanceado* (STB). El STB genera tres señales sinusoidales desfasadas  $120^\circ$  entre ellas. La amplitud de tales señales es de pocos volts y una frecuencia sensiblemente mayor a  $60 [Hz]$ .

## Introducción teórica

El simulador trifásico balanceado, es un dispositivo electrónico constituido por un *oscilador* y un banco de *filtros pasa todo*, con los cuales se generan tres voltajes desfasados  $120^\circ$  tal y como los presentaría un generador trifásico, pero con un *voltaje de fase* pequeño de amplitud  $8.0 [V]$  y una frecuencia de  $950 [Hz]$ , aproximadamente.

En la figura 3.1 se muestra una representación como bloque del STB, en el que es de notar que los voltajes correspondientes a las salidas *a*, *b* y *c*, son *tensiones* con respecto a la neutra *n*. Se denominan *voltajes* o *tensiones de fase*.

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	21/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de circuitos electricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

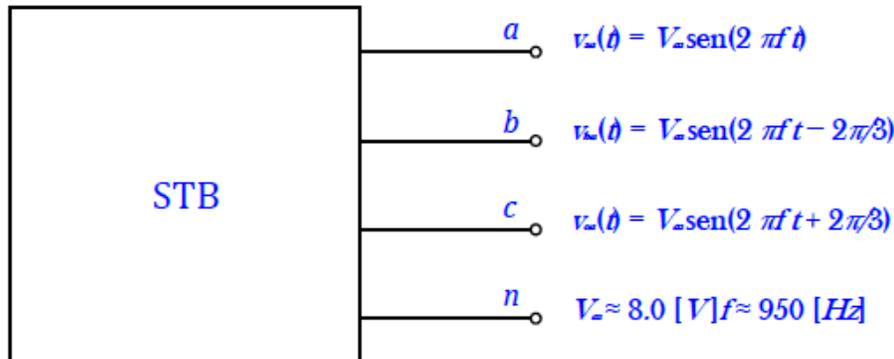


Figura 3.1. Simulador Trifásico Balanceado.

En la figura 3.2 se observa, por medio de *fasores*<sup>3</sup> la correspondencia entre los voltajes o tensiones de fase y los denominados *voltajes o tensiones de línea*. La correlación entre ellos se determina a continuación.

Si el sistema trifásico es de *secuencia de fase positiva* o *abc*, esto es, que los voltajes de fase suceden en el siguiente orden  $V_{an}, V_{bn}, V_{cn}, V_{an}, V_{bn}, \dots$ ; la relación entre ellos y los voltajes de línea  $V_{ab}, V_{bc}$  y  $V_{ca}$  se puede determinar de la siguiente manera.

Si  $V_{an} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ$ ,  $V_{bn} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \angle -120^\circ$  y  $V_{cn} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \angle 120^\circ$ , dado que

$$V_{ab} = V_{an} - V_{bn} = V_{an} + V_{bn}$$

entonces

$$V_{ab} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ + \frac{V_m}{\sqrt{2}} \angle 60^\circ = \frac{V_m}{\sqrt{2}} [\cos(0^\circ) + j \sin(0^\circ) + \cos(60^\circ) + j \sin(60^\circ)]$$

$$V_{ab} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \left[ 1 + j0 + \frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right] = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \left[ \frac{3}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right] = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \sqrt{3} \angle 30^\circ = \sqrt{3} V_{an} \angle 30^\circ$$

<sup>3</sup> Fasor: es un segmento de recta dirigido que gira alrededor del origen, a una velocidad constante, y cuya proyección sobre una dirección de referencia genera una función sinusoidal.

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	22/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de circuitos electricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

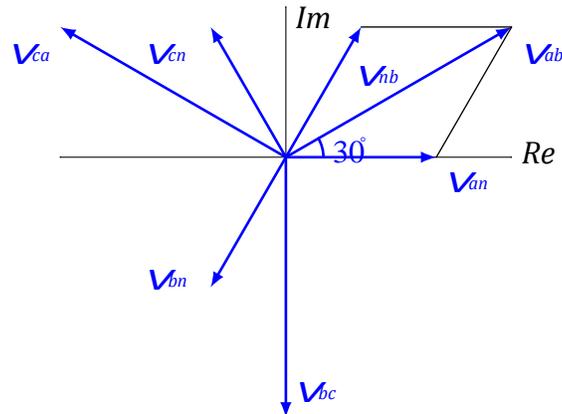


Figura 3.2. Diagrama fasorial de voltajes de línea y voltajes de fase.

Este resultado se puede apreciar gráficamente en la figura 3.2.

Procediendo de manera similar, se tiene

$$V_{bc} = \sqrt{3} V_{bn} \angle 30^\circ \quad V_{ca} = \sqrt{3} V_{cn} \angle 30^\circ$$

Asimismo, para determinar la correspondencia entre las *corrientes de línea* y las *corrientes de fase*, se recurre a la red eléctrica de la figura 3.3 (*conexión delta*).

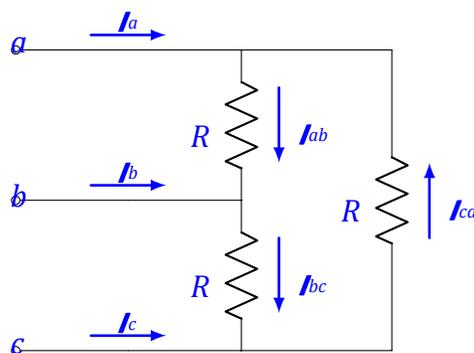


Figura 3.3. Corrientes de línea y corrientes de fase

Si las corrientes eléctricas de fase son  $I_{ab} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ$ ,  $I_{bc} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \angle -120^\circ$  e  $I_{ca} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \angle 120^\circ$

de la ley de corrientes de Kirchhoff (LCK), se tiene que la corriente de línea  $I_{es}$

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	23/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de circuitos electricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

$$I_a = I_{ab} - I_{ca} = I_{ab} + I_{ac}$$

entonces

$$I_a = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ + \frac{I_m}{\sqrt{2}} \angle -60^\circ = \frac{I_m}{\sqrt{2}} [\cos(0^\circ) + j \sin(0^\circ) + \cos(-60^\circ) + j \sin(-60^\circ)]$$

$$I_a = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \left[ 1 + j0 + \frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right] = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \left[ \frac{3}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right] = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \sqrt{3} \angle -30^\circ = \sqrt{3} I_{an} \angle -30^\circ$$

Procediendo de igual manera, las otras corrientes delinea son

$$I_b = \sqrt{3} I_{bn} \angle -90^\circ \quad I_c = \sqrt{3} I_{cn} \angle -150^\circ$$

En la figura 3.4 se muestran los fasores correspondientes a las corrientes delinea y las corrientes de fase para un sistema trifásico de secuencia de fase positiva.

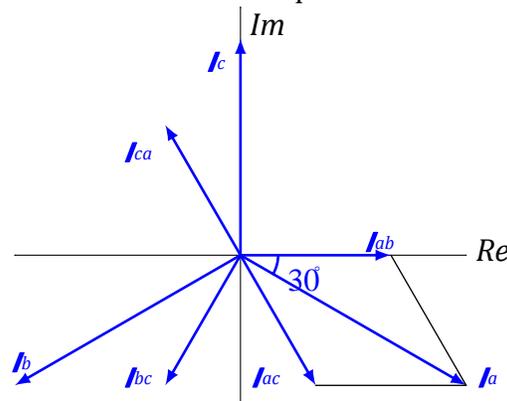


Figura 3.4. Diagrama fasorial de corrientes delinea y corrientes entre líneas

Cabe señalar que si las impedancias de una carga balanceada no son resistivas puras, las corrientes de fase y por consiguiente las corrientes delinea también son balanceadas, pero con un desplazamiento angular de atraso cuando la *reactancia*<sup>4</sup> es inductiva o un desplazamiento angular de adelanto si la reactancia es capacitiva.

En otro orden de ideas, es importante señalar que cuando la carga trifásica es balanceada no es necesario analizar todo el circuito trifásico, basta considerar una sola fase, ya que las corrientes de las otras fases tienen la misma magnitud pero con un desfase de  $\pm 120^\circ$ , respectivamente. El circuito eléctrico asociado a una sola fase recibe el nombre de *diagrama unifilar*.

<sup>4</sup> Reactancia: la parte imaginaria de la impedancia.

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	24/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de circuitos electricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

En la figura 3.5, se muestra un *diagrama trifilar* y su diagrama unifilar asociado, en donde la fase de referencia es la correspondiente a  $V_m$ . Si la carga trifásica balanceada está conectada en estrella, su impedancia  $Z$  en el diagrama unifilar es la propia de cada rama de la estrella. Empero, si la carga trifásica balanceada está conectada en delta, su impedancia  $Z$  en el diagrama unifilar es un tercio de la propia de cada rama de la delta.

Reactancia: la parte imaginaria de la impedancia.

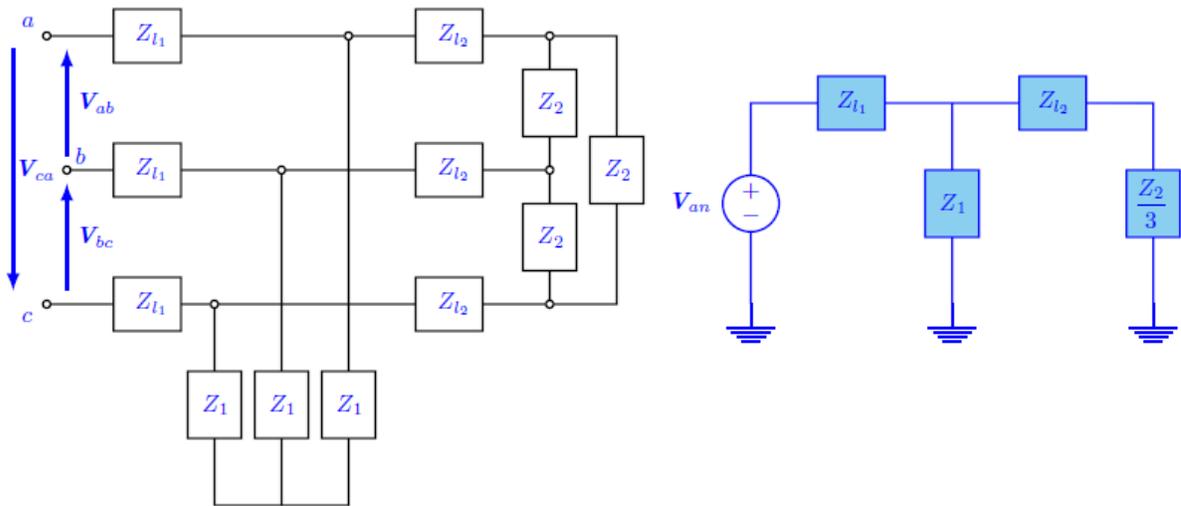


Figura 3.5. Diagrama trifilar y su diagrama unifilar asociado.

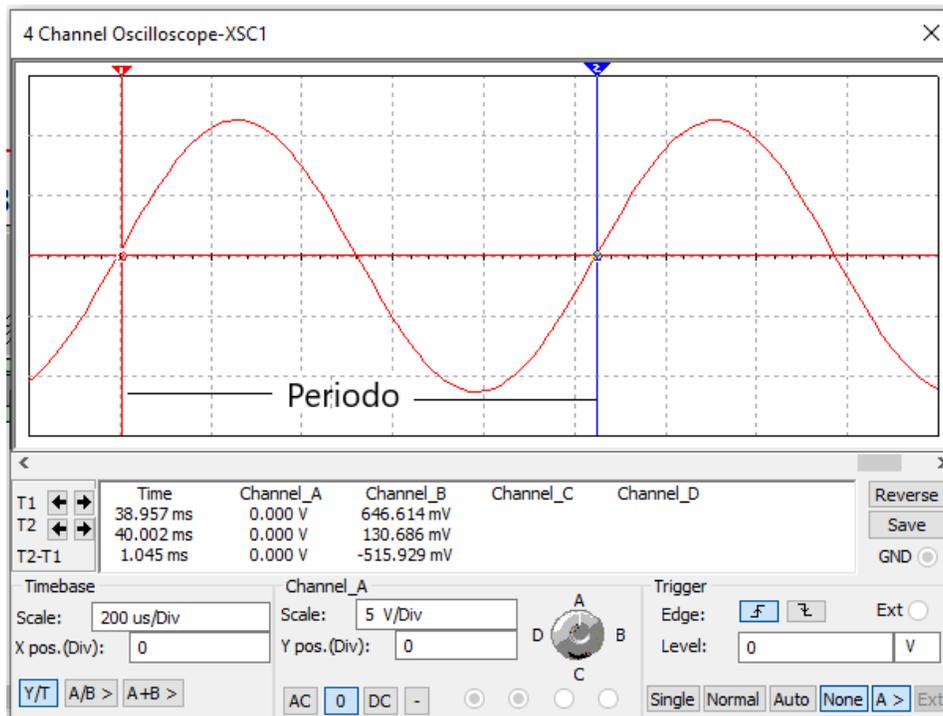
## Desarrollo

Conecte el Simulador Trifásico Balanceado y enciéndalo, observe en un osciloscopio las formas de onda de los voltajes en las terminales  $a$  y  $b$  debiendo existir un retraso de  $120^\circ$  de la salida en  $b$  con respecto a la salida en  $a$ , siendo las amplitudes correspondientes, iguales. Observe a continuación, los voltajes en las terminales  $a$  y  $c$  debiendo existir un adelanto de  $120^\circ$  de la salida en  $c$  con respecto a la salida en  $a$ , con las amplitudes de ambas salidas idénticas. Esta secuencia de voltajes o tensiones recibe el nombre de secuencia de fase positiva o  $abc$ . En caso de tener alguna disconformidad, solicite la ayuda de su profesor.

## Como calcular el ángulo de desfase entre señales

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	25/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de circuitos electricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

De la señal obtenida en el osciloscopio, obtener su periodo en el tiempo o en divisiones de la caratula del osciloscopio, cualquiera de los dos lecturas equivale a  $360^\circ$ , por ejemplo, en la grafica que se presenta, el periodo es de  $T = 1.045 \text{ ms}$  que es proporcional a  $360^\circ$



En la siguiente figura se tienen dos señales con el periodo de  $T = 1.045 \text{ ms}$  la diferencia de tiempo medida entre ellas es de  $352.951 \mu\text{s}$ . El ángulo se calcula de la siguiente manera



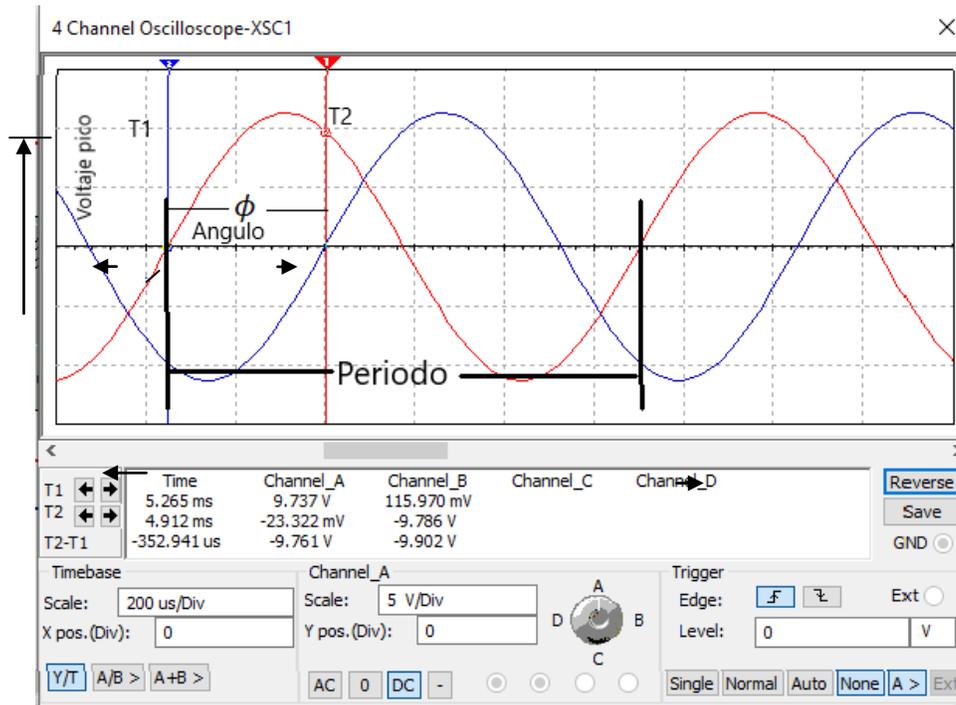
**Manual de prácticas del  
Laboratorio de Circuitos  
Eléctricos**

Código:	MADO-77
Versión:	01
Página	26/96
Sección ISO	8.3
Fecha de emisión	28 de enero de 2019

Facultad de Ingeniería

Área/Departamento:  
Laboratorio de circuitos electricos

La impresión de este documento es una copia no controlada



$$\begin{aligned} 1.045 \text{ ms} &\rightarrow 360^\circ \\ 0.352941 \text{ ms} &\rightarrow \phi \\ \therefore \phi &= \frac{(0.352941)(360^\circ)}{1.045} = 121.6^\circ \end{aligned}$$

## Experimento 1

En el circuito eléctrico que se muestra en la figura 3.5

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	27/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de circuitos electricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

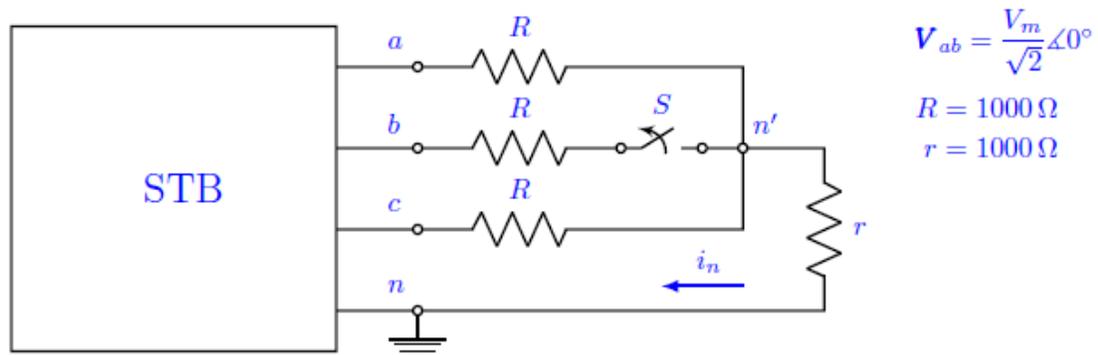
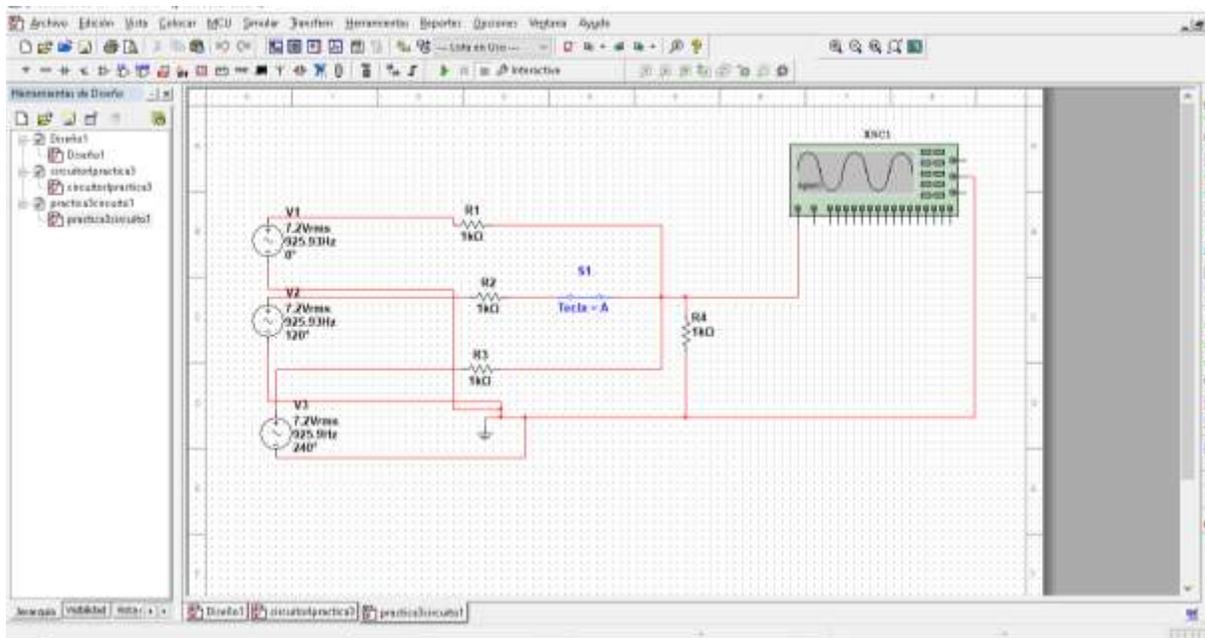


Figura 3.6. Circuito trifásico balanceado conectado en estrella.



Nota se utilizaron tres fuentes de alterna cada una desfasada 120 grados cada una

- Con el interruptor  $S$  cerrado, observe el voltaje correspondiente al resistor  $r$ .
- Con el interruptor  $S$  abierto, observe el voltaje correspondiente al resistor  $r$ .

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	28/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de circuitos electricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

- c) ¿Que concluye de los incisos a) y b) anteriores, con relación a la corriente  $i_n$  en el resistor  $r$ :
- d) Con el interruptor  $S$  cerrado, observe las formas de onda correspondientes a los voltajes  $V_{ab}$  y  $V_{n'b}$ . Para realizar esta observación, conecte la tierra del osciloscopio en la terminal  $b$  del STB y los canales  $A$  y  $B$  del osciloscopio en las terminales  $a$  y  $n'$  respectivamente. Desconecte la tierra del osciloscopio de la tierra del circuito eléctrico. Dibuje y acote los fasores correspondientes a  $V_{ab}$  y  $V_{bn'}$ .
- e) ¿Cuál es la razón de  $\frac{|V_{ab}|}{|V_{bn}|}$  ?

## Experimento 2

En el circuito eléctrico que se muestra en la figura 3.7.

- a) Conecte la tierra del osciloscopio al nodo  $c'$  y los canales  $A$  y  $B$  a la terminal  $c$  y al nodo  $a'$  respectivamente. Las formas de onda que se observan serán proporcionales a las corrientes eléctricas  $i_c$  e  $i_{a'c'}$ .
- b) Conocidos los valores de los resistores  $R$  y  $r$ , calcule la razón de  $\frac{|I_c|}{|I_{ca}|}$
- c) Dibuje y acote los fasores asociados a  $v_{ab}$ ,  $i_c$  e  $i_{c'a'}$ .

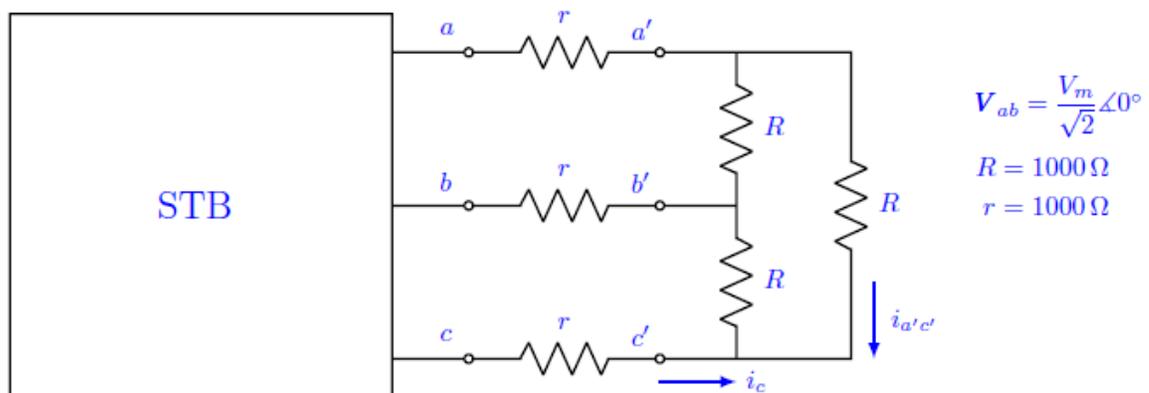
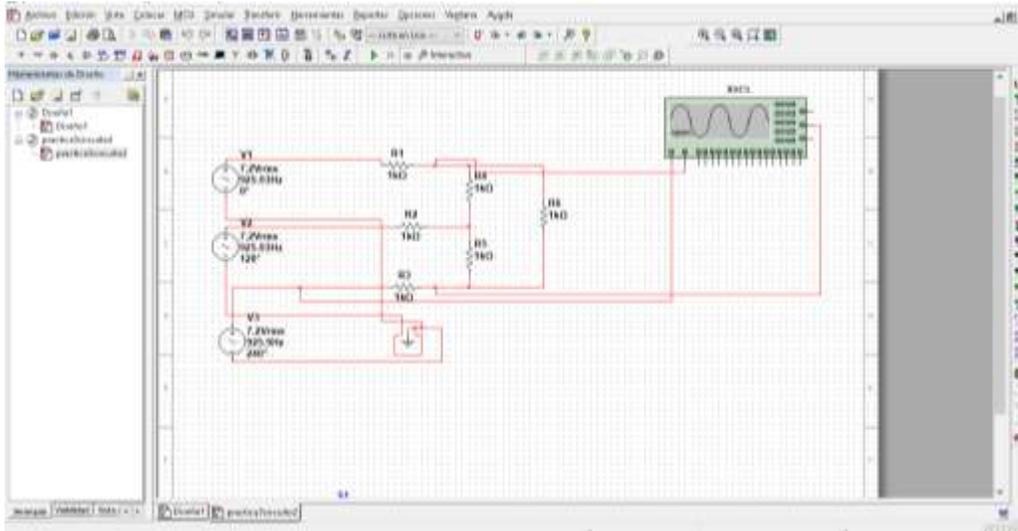


Figura 3.7. Circuito trifásico balanceado conectado en delta.

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	29/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de circuitos electricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			



### Experimento 3

En el circuito eléctrico que se muestra en la figura 3.8.

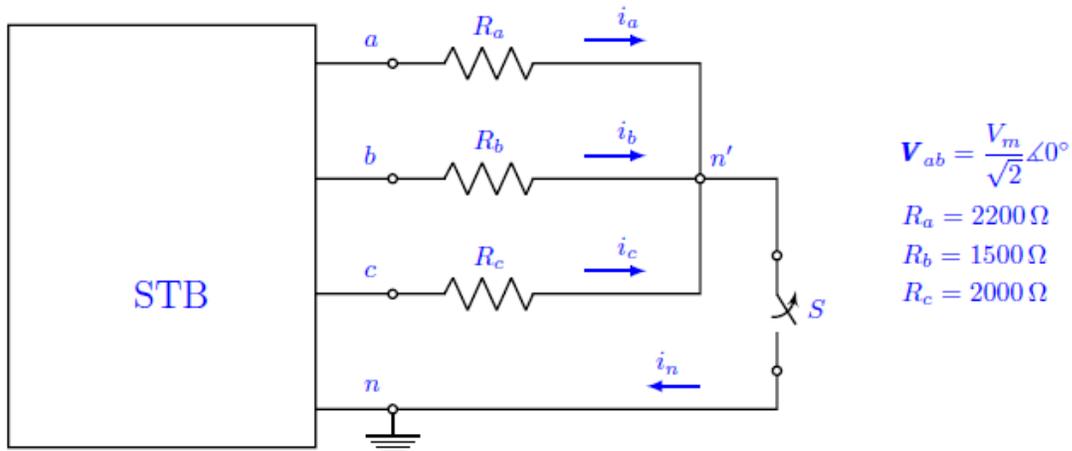
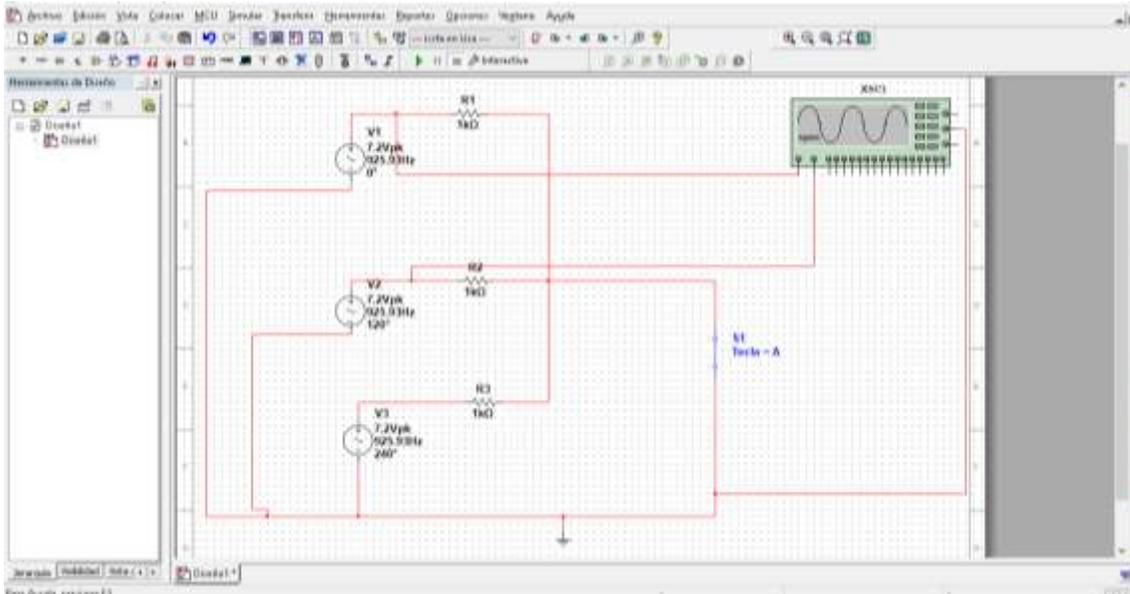


Figura 3.8. Circuito trifásico desbalanceado conectado en estrella.

Con el interruptor  $S$  cerrado, realice lo siguiente:

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	30/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de circuitos electricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			



- a) Observe en el osciloscopio los voltajes  $v_{an}$ ,  $v_{bn}$ ,  $v_{cn}$  y  $v_{n'n}$ . A partir de las observaciones anteriores, determine los siguientes fasores:

$$\mathbf{V}_{an}, \mathbf{V}_{bn}, \mathbf{V}_{cn}, \mathbf{V}_n, \mathbf{I}_a, \mathbf{I}_b \text{ e } \mathbf{I}_c$$

- b) Dibuje y acote los fasores asociados a:

$$v_{ab}, v_{an}, v_{bn}, v_{cn}, v_{n'n}, i_a, i_b \text{ e } i_c$$

- c) Compare sus resultados experimentales con sus cálculos teóricos. ¿Que concluye?

Con el interruptor  $S$  abierto, realice lo siguiente:

- d) Observe en el osciloscopio los voltajes  $v_{an}$  y  $v_{n'n}$ , a continuación  $v_{bn}$  y  $v_{n'n}$  y finalmente  $v_{cn}$  y  $v_{n'n}$ . A partir de las observaciones anteriores, determine

$$\mathbf{V}_{an}, \mathbf{V}_{bn}, \mathbf{V}_{cn}, \mathbf{V}_{n'n}, \mathbf{I}_a, \mathbf{I}_b \text{ e } \mathbf{I}_c$$

Lo anterior se puede realizar con la ayuda de las siguientes expresiones

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	31/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de circuitos electricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

$$I_a = \frac{V_{an} - V_{n'n}}{R_a}$$

$$I_b = \frac{V_{bn} - V_{n'n}}{R_b}$$

$$I_c = \frac{V_{cn} - V_{n'n}}{R_c}$$

- e) Dibuje y acote los fasores asociados a  $v_{ab}$ ,  $v_{an}$ ,  $v_{bn}$ ,  $v_{cn}$ ,  $i_a$ ,  $i_b$  e  $i_c$ .
- f) ¿Compare sus resultados experimentales con sus cálculos teóricos. ¿Que concluye?

### Equipo necesario

- 1 Simulador Trifásico Balanceado
- 1 Osciloscopio
- Computadora con software Multisim

### Material necesario

- 1 Resistor de 2.2 kΩ, 0.5 watt
- 6 Resistores de 1 kΩ, 0.5 watt

### Questionario previo

1. Demuestre la transformación de una carga trifásica conectada en estrella a una carga trifásica conectada en delta.
2. Demuestre la transformación de una carga trifásica conectada en delta a una carga trifásica conectada en estrella.
3. Encuentre los fasores  $I_a$ ,  $I_b$  e  $I_c$  asociados a las corrientes  $i_a$ ,  $i_b$  e  $i_c$  del experimento 3, con el interruptor  $S$  cerrado y con el interruptor  $S$  abierto.

Suponga  $V_{ab} = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ$  y  $f = 950$  [Hz].

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	32/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de circuitos electricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

## Bibliografía

- Desoer, C. A. and Kuh, E.S. *Basic Circuit Theory*. New York: McGraw-Hill Company, 1969.
- Dorf, R. C., Svoboda, J. A. *Circuitos Eléctricos*. México, D. F.: Alfaomega Grupo Editor, S. A. de C. V., 2011.
- Hayt, W. H., Kemmerly, J. E. *Análisis de circuitos eléctricos en ingeniería*. México: Mc Graw Hill, 2007.
- Johnson, D. E., Hilburn, J. L., Johnson, J. R. *Basic Electric Circuit Analysis*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1986.

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	33/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de circuitos electricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

# Corrección del Factor de Potencia en Sistemas Eléctricos

**N° de práctica: 03**

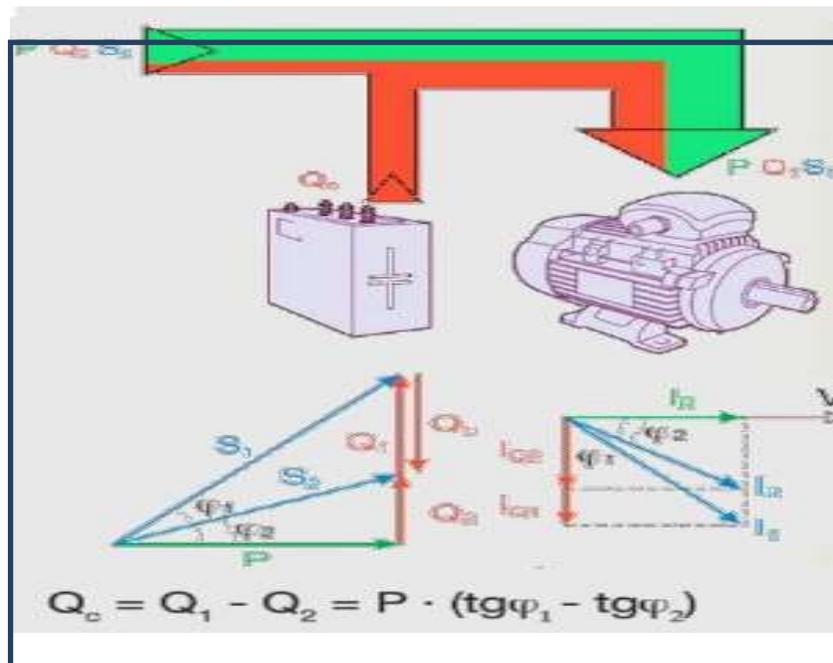
Nombre completo del alumno		Firma
N° de brigada:	Fecha de elaboración:	Grupo:

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	34/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería	Área/Departamento: Laboratorio de circuitos electricos		
La impresión de este documento es una copia no controlada			

## PRÁCTICA 3

### Corrección del factor de potencia

Víctor Manuel Sánchez Esquivel/Antonio Salvá Calleja



	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	35/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de circuitos electricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

## Objetivo de aprendizaje

Determinar el *factor de potencia* de una carga eléctrica monofásica y una carga eléctrica trifásica.

Llevar a cabo la corrección del factor de potencia de una carga eléctrica monofásica y de una carga eléctrica trifásica.

Comparar los resultados prácticos obtenidos con los cálculos teóricos realizados.

## Introducción teórica

La cantidad de energía o trabajo realizado en un intervalo de tiempo recibe el nombre de potencia. En una *red eléctrica de un puerto*<sup>5</sup>, la energía eléctrica por unidad de tiempo o *potencia* consta de dos componentes, a saber: *potencia promedio o activa* y *potencia reactiva*. La suma vectorial de ellas se designa como *potencia compleja* y la magnitud de ésta, *potencia aparente*. Su representación matemática es

$$(1) \quad S = P + jQ$$

aunque las unidades de  $S$ ,  $P$  y  $Q$  son dimensionalmente idénticas, las unidades de  $S$  son *volt-amperes*, [VA],  $P$  se mide en *watts*, [W] y  $Q$  en *volt-amperes reactivos*, [VAR].

En una red eléctrica la potencia promedio o activa que se consume, se transforma por completo en luz, en calor, en trabajo mecánico o en cualquier otra forma de energía no reversible. La potencia reactiva no se consume directamente sino que se almacena en forma de un campo eléctrico o un campo magnético en un breve intervalo de tiempo y regresa a la red eléctrica de suministro durante otro intervalo de tiempo semejante. Lo anterior implica que la corriente eléctrica en las líneas de transmisión y distribución, transformadores, motores de inducción y equipos de soldadura eléctrica entre otros, tiene una componente activa y otra reactiva

Considere que la red eléctrica de un puerto, en la figura 1, se encuentra en estado sinusoidal permanente

<sup>5</sup> Una red eléctrica de un puerto es cualquier red que no contiene fuentes independientes y de la cual sólo un par de terminales se emplean para aplicar una entrada y medir una respuesta.

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	36/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de circuitos electricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

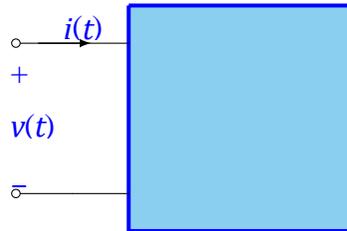


Figura 1. Red eléctrica de un puerto.

Si el voltaje,  $v(t)$  y la corriente eléctrica  $i(t)$  son, respectivamente

$$\begin{aligned}
 v(t) &= V_m \cos(\omega t + \theta) = R_e \left\{ \sqrt{2} V e^{j\omega t} \right\} & \text{donde} & \quad \mathbf{V} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} e^{j\theta} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \angle \theta \\
 i(t) &= I_m \cos(\omega t + \theta - \phi) = R_e \left\{ \sqrt{2} I e^{j\omega t} \right\} & \text{donde} & \quad \mathbf{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j(\theta - \phi)} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \angle \theta - \phi
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

La *potencia instantánea*, el producto del voltaje y la corriente eléctrica es

$$\begin{aligned}
 p(t) &= v(t)i(t) = V_m \cos(\omega t + \theta) I_m \cos(\omega t + \theta - \phi) \\
 p(t) &= \frac{V_m I_m}{2} \{ \cos(2\omega t + 2\theta - \phi) + \cos \phi \}
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

El valor medio de la potencia instantánea, que se denomina potencia promedio o activa,  $P$ , resulta

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{V_m I_m}{2} \cos \phi = \frac{V_m I_m}{2} Fp
 \tag{4}$$

En la expresión anterior, el factor  $Fp$  recibe el nombre de *factor de potencia*. Este, el factor de potencia, se define como la razón de la potencia promedio a la potencia aparente. Cuando la corriente se adelanta al voltaje, el factor de potencia se considera *de adelanto*. Cuando la corriente se atrasa al voltaje, el factor de potencia se dice que es *de atraso*.

De esta manera, dado que

$$\begin{aligned}
 S &= P + jQ = \mathbf{V}\mathbf{I}^* = |\mathbf{V}| |\mathbf{I}| \cos \phi + j |\mathbf{V}| |\mathbf{I}| \sin \phi \\
 S &= |\mathbf{V}| |\mathbf{I}| (\cos \phi + j \sin \phi) = |\mathbf{V}| |\mathbf{I}| e^{j\phi} = |\mathbf{V}| |\mathbf{I}| \angle \phi = \frac{V_m I_m}{2} \angle \phi
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

entonces

$$Fp = \frac{P}{|\mathbf{V}| |\mathbf{I}|} = \frac{P}{|S|}
 \tag{6}$$

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	37/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de circuitos electricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

Como la potencia se distribuye a un voltaje constante, la corriente eléctrica varía, su valor se determina a partir de la ecuación (4), esto es

$$I_m = \frac{2P}{V_m F_p} \quad (7)$$

Como se observa, la corriente es inversamente proporcional al factor de potencia. Mientras más pequeño es el factor de potencia, mayor es la cantidad de corriente que se necesita para satisfacer la potencia requerida. Por lo que la situación ideal requiere que el factor de potencia sea igual a la unidad. Si esto no se cumple, las pérdidas de potencia en las líneas de transmisión proporcionales al cuadrado de la corriente eléctrica aumentan. Es por esto, que las compañías generadoras de energía requieren que el factor de potencia sea igual a la unidad, para proporcionar una cantidad de potencia requerida con corrientes mínimas y por consiguiente con menor pérdida en las líneas de distribución.

Teniendo en cuenta que el ángulo  $\varphi$  de la ecuación (5) corresponde al argumento de la impedancia de la carga eléctrica<sup>6</sup>,  $Z$ . Cuando ésta es únicamente resistiva el factor de potencia es igual a la unidad,  $\varphi = 0^\circ$  y cuando es reactiva pura el factor de potencia es igual a cero,  $\varphi = \pm 90^\circ$ . En el caso general cuando la impedancia de carga es de la forma

$$Z(j\omega) = R + jX(j\omega)$$

el factor de potencia se puede variar, si se modifica la impedancia de la carga eléctrica. Lo anterior se logra al conectar en paralelo otra impedancia  $Z_m$ , como se muestra en la figura 2, que satisfaga las siguientes condiciones:

- $Z_m$  no debe consumir potencia activa.
- $Z_m$  con  $Z$  debe satisfacer el factor de potencia que se desea.

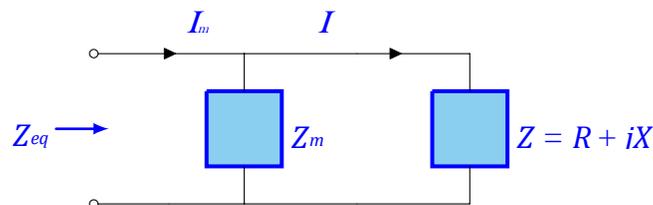


Figura 2. Circuito eléctrico para corregir el factor de potencia

La primera condición implica que  $Z_m$  sea únicamente reactiva, esto es

<sup>6</sup> La componente real de la impedancia recibe el nombre de *resistencia*, mientras que la componente imaginaria se denomina *reactancia*.

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	38/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de circuitos electricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

$$(8) \quad Z_m = jZ_m$$

La segunda condición requiere que

$$(9) \quad Fp_{deseado} = \cos \left[ \arctan \left( \frac{Im\{Z_{eq}\}}{Re\{Z_{eq}\}} \right) \right]$$

y dado que

$$Z_{eq} = \frac{ZZ_m}{Z + Z_m} = X_m \frac{RX_m + j(R^2 + XX_m + X^2)}{R^2 + (X + X_m)^2}$$

entonces, la reactancia que modifica el factor de potencia es

$$(10) \quad X_m = \frac{R^2 + X^2}{R \tan[\arccos(Fp_{deseado})] - X}$$

con  $\tan(\arccos(Fp)) > 0$  si el  $Fp$  es de atrasado y  $\tan(\arccos(Fp)) < 0$  si el  $Fp$  es de adelantado.

## Desarrollo

### Experimento 1

En la primera parte de la práctica se lleva a cabo la corrección del factor de potencia del circuito eléctrico que se presenta en la figura 3.

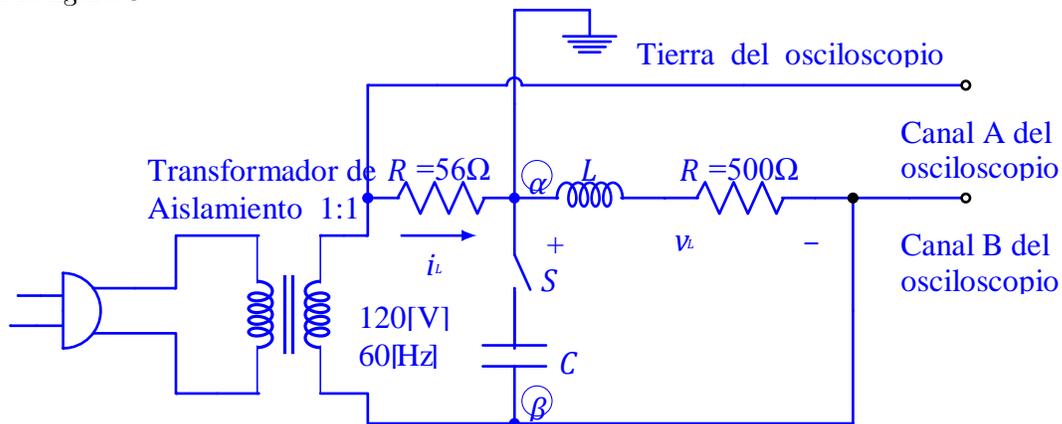


Figura 3. Circuito eléctrico de una sola fase.

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	39/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de circuitos electricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

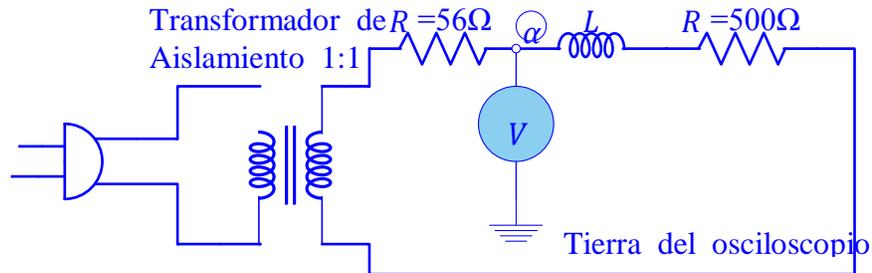
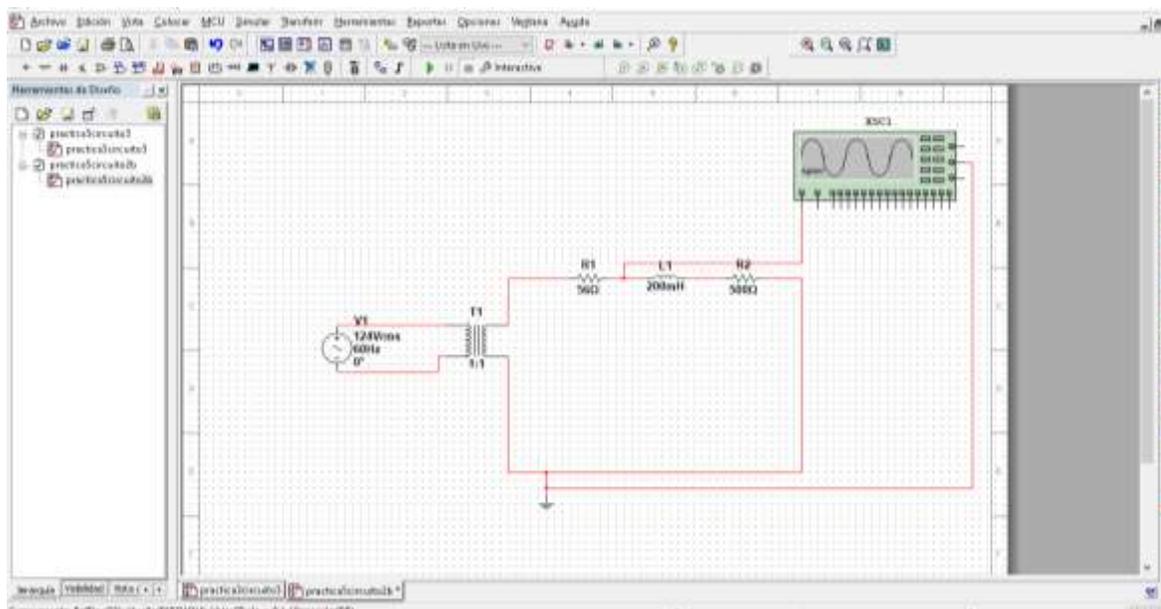
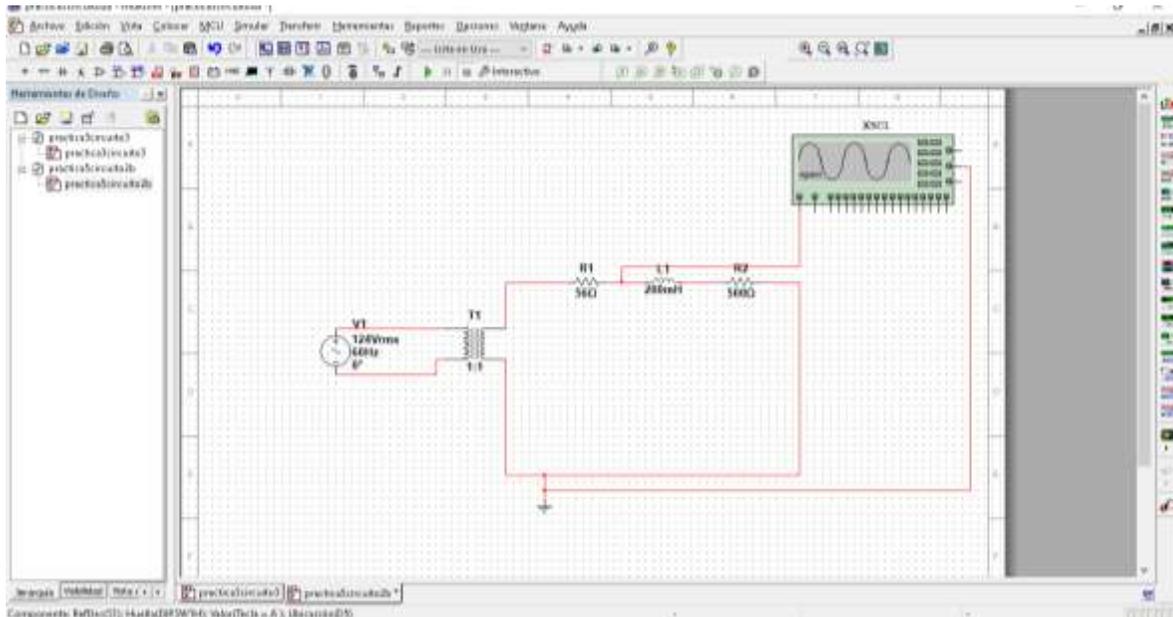


Figura 4. Circuito eléctrico de verificación del transformador.



	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	40/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de circuitos electricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			



Para poder realizar esta simulación, es indispensable investigar, cual es el valor de la inductancia balastra

### Para el circuito físico

Antes de conectar la tierra del osciloscopio en el nodo  $\textcircled{a}$ , verifique en que posición de la clavija hay la menor diferencia de potencial, ésta será la posición correcta, para realizar el experimento. Vea la figura 4. Si no hace lo indicado, puede ocurrir una descarga eléctrica al conectar la tierra del osciloscopio al nodo  $\textcircled{a}$ .

El desfase entre la corriente eléctrica  $i_L$  y el voltaje  $v_L$  de la carga resistiva-inductiva, dado que en el osciloscopio no es posible medir la corriente en forma directa; en el circuito eléctrico de la figura 3, se puede determinar a partir de las formas de onda que se observan en el osciloscopio. La señal en el canal  $A$  es proporcional a la corriente  $i_L$  y en el canal  $B$  la señal corresponde al voltaje  $v_L$  pero invertida  $180^\circ$ .

A continuación, proceda a conectar las puntas con atenuación del osciloscopio como se observa en la figura 3.

En caso de que no disponga de puntas con atenuación, con la finalidad de proteger el osciloscopio, es necesario realizar dos divisores de voltaje mediante resistencias para hacer las mediciones correspondientes. En la figura 5, se muestra el circuito eléctrico de una fase de la figura 1 con los divisores de voltaje mencionados. Debe ser palmario que los valores de los voltajes que se observan en el osciloscopio, están atenuados once veces.

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	41/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de circuitos electricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

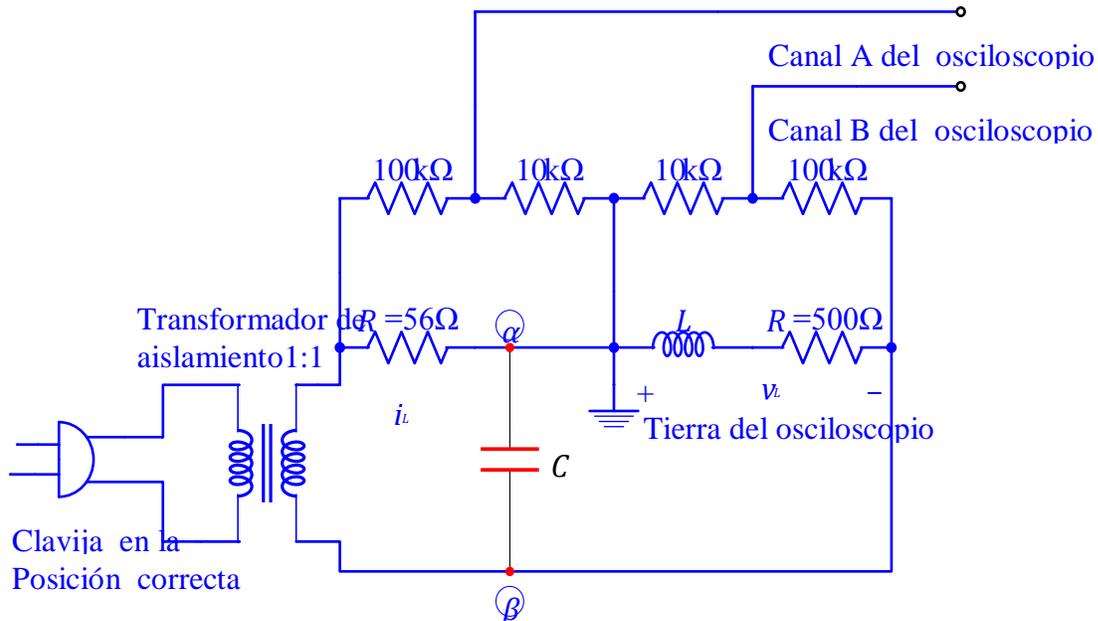
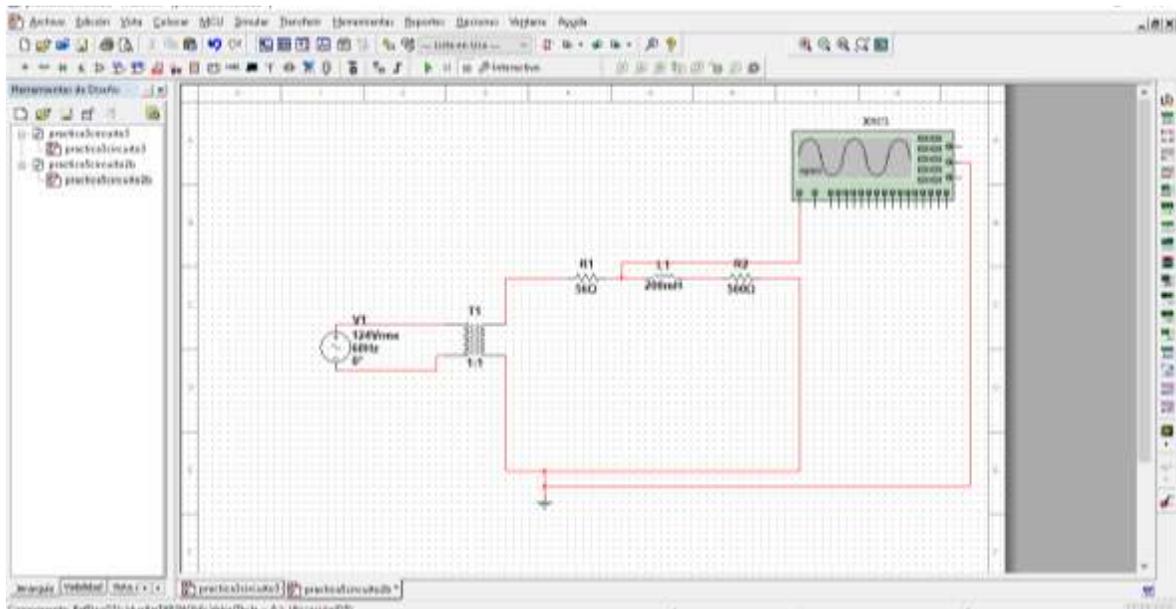


Figura 5. Circuito eléctrico para la modificación del factor de potencia.



	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	42/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de circuitos electricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

Mida el ángulo de desfase entre el voltaje  $v_L$  y la corriente eléctrica  $i_L$ . A partir de las mediciones realizadas, determine:

1. El factor de potencia de la carga eléctrico.
2. El triangulo de potencias.
3. El valor de la capacitancia que se requiere para modificar el factor de potencia a la unidad.

A continuación, conecte un capacitor cuyo valor de capacitancia sea el más próximo al calculado, entre los nodos  $\alpha$  y  $\beta$ . Observe el efecto en el osciloscopio.

4. ¿Qué sucede? Explique.  
Repita lo anterior para diferentes valores de la capacitancia y conteste las siguientes preguntas.
5. ¿Qué ocurre cuando el valor de la capacitancia es menor que el calculado?
6. ¿Y cuándo es mayor?

## Experimento 2

(este experimento es difícil de simular, ya que no tenemos la impedancia del motor).

En la segunda parte de la práctica se modifica el factor de potencia del motor de inducción que se utilizó en la práctica de *Medición de potencia en sistemas eléctricos*.

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	43/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de circuitos electricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

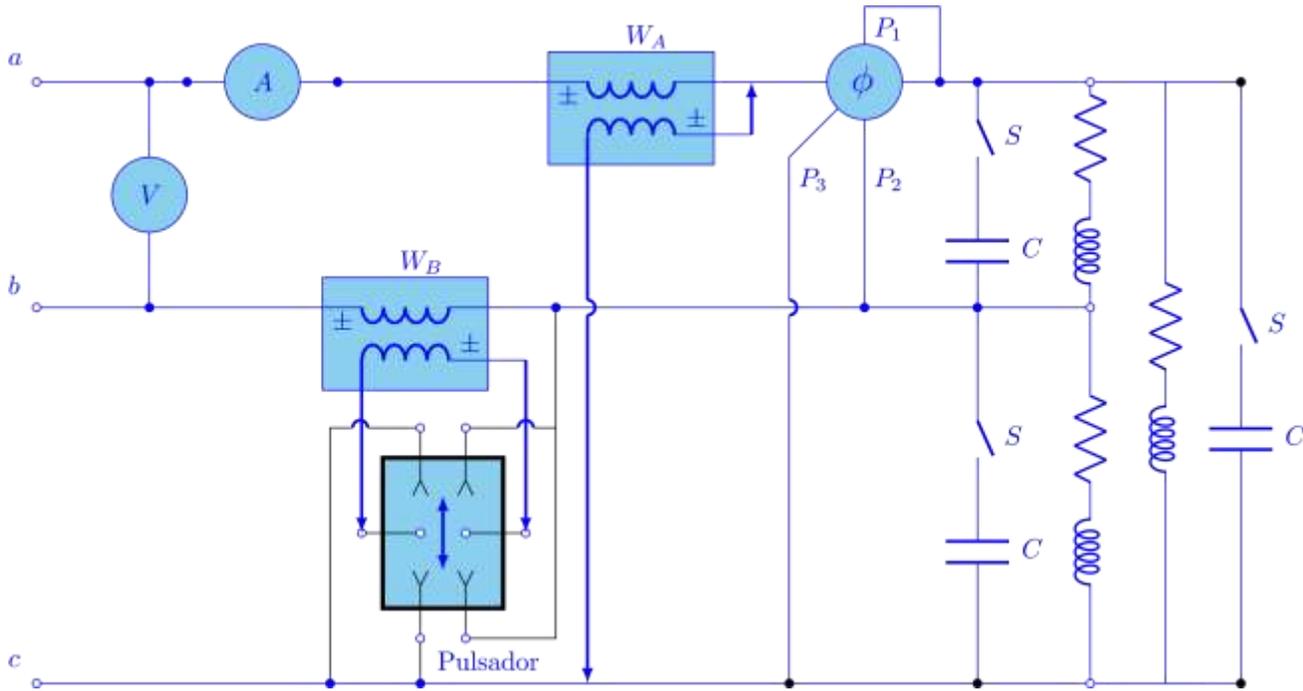


Figura 6. Circuito trifásico del motor de inducción y banco de capacitores.

Construya el circuito eléctrico de la figura 6, con los interruptores  $S$  abiertos.

El pulsador, presente en la figura, permite conectar la bobina de tensión del wattmetro  $B$ , con la polaridad adecuada. Recuerde que el valor medido, en la práctica de *Medición de potencia en sistemas eléctricos*, es negativo.

Con la ecuación (11), determine el valor del ángulo  $\phi$ .

$$\phi = \arccos \frac{P_{3\phi}}{\sqrt{3} |V_L| |I_L|} \quad (11)$$

1. ¿El valor calculado de  $\phi$ , es el indicado por el fatcometro? En caso de haber discrepancias, mencione las posibles causas.

Cierre simultáneamente los interruptores  $S$  y verifique que el wattmetro  $B$  marca un valor adecuado, de no ser así, cambie el pulsador a la otra posición.

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	44/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de circuitos electricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

Mida el nuevo ángulo de desfase. Con este valor y la ecuación (12), se puede calcular la potencia total suministrada por los capacitores.

$$(12) \quad Q_{3\phi} = P_{3\phi} (\tan\phi_1 - \tan\phi_2)$$

donde  $\phi$  es el ángulo de desfase original y  $\phi_2$  es el nuevo ángulo de desfase.

2. ¿Cuál es la potencia reactiva suministrada por los capacitores en cada fase?
3. Determine el valor de la capacitancia que se requiere para suministrar la potencia reactiva que se calculó en la pregunta anterior.<sup>7</sup> ¿Qué concluye?

<sup>1</sup> Considere la ecuación (10).

## Equipo necesario

- 2 Wattmetros
- 1 Voltímetro
- 1 Amperímetro
- 1 Pulsador
- 1 Motor de inducción
- 1 Banco de capacitores
- 1 Osciloscopio
- 1 Transformador de relación 1 : 1
- 1 Resistor de 500  $\Omega$ , 25 watts

## Material necesario

- Resistor de 56  $\Omega$ , 10 watt
- Resistores de 10 k $\Omega$ , 0.5 watt
- 2 Resistores de 100 k $\Omega$ , 0.5 watt
- 1 Reactor de 20 watts para lámpara fluorescente

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	45/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de circuitos electricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

## Cuestionario previo

1. ¿Qué se entiende por modificación del factor de potencia y qué ventajas representa?
2. Si en un determinado circuito eléctrico con carga eléctrica predominantemente resistiva-inductiva, a ésta se le conecta un capacitor en serie. ¿El factor de potencia, se modifica?
3. ¿Es posible modificar el factor de potencia de una carga eléctrica arbitraria conectando en paralelo una resistencia?
4. ¿Qué ventajas o desventajas presenta la situación anterior?
5. Encuentre una expresión en función de los fasores  $V_L$  e  $I_L$  del circuito de una fase de la figura 3, antes de conectar el capacitor, para determinar el valor de la capacitancia del capacitor,  $C$ , que hace al factor de potencia unitario.
6. Demuestre la ecuación (10).
7. Demuestre la ecuación (12).

## Bibliografía

- Desoer, C. A. and Kuh, E.S. *Basic Circuit Theory*. New York: McGraw-Hill Company, 1969.
- Johnson, D. E., Hilburn, J. L., Johnson, J. R. *Basic Electric Circuit Analysis*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1986.
- Dorf, R. C., Svoboda, J. A. *Circuitos Eléctricos*. México, D. F.: Alfaomega Grupo Editor, S. A. de C. V., 2011.
- Hayt, W. H., Kemmerly, J. E. *Análisis de circuitos eléctricos en ingeniería* México: Mc Graw Hill, 2007. Sears, F. W. *Fundamentos de Física II. Electricidad y Magnetismo*. Madrid, España: Aguilar, S. A. de Ediciones, 1970

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos.</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	46/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de Circuitos Eléctricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

# Escalamiento de Impedancia y de Frecuencia

**N° de práctica: 04**

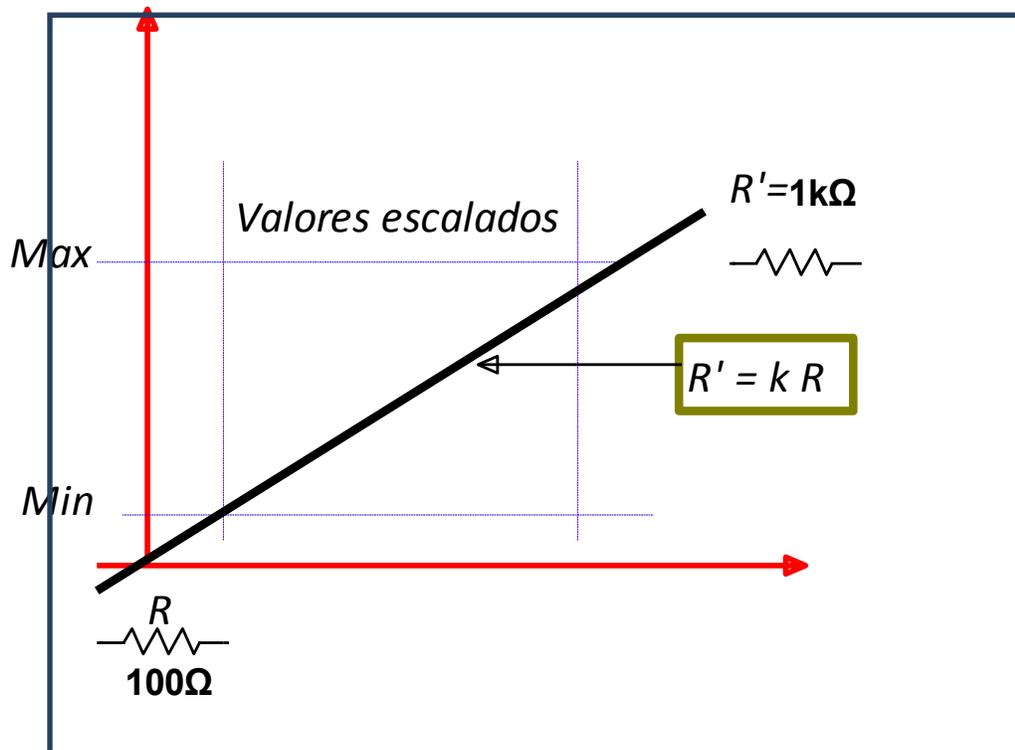
Nombre completo del alumno		Firma
N° de brigada:	Fecha de elaboración:	Grupo:

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos.</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	47/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de Circuitos Eléctricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

# Práctica 4

## Escalamiento de Impedancia y de Frecuencia

Víctor Manuel Sánchez Esquivel/Antonio Salvá Calleja



	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos.</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	48/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de Circuitos Eléctricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

## Objetivo de aprendizaje

Introducción a los teoremas de escalamiento de *impedancia* y de *frecuencia*.

Familiarizar al estudiante con la aplicación en la práctica de dichos teoremas.

Estimar la importancia de tales teoremas en el diseño y síntesis de los sistemas o filtros eléctricos

## Introducción teórica

### Escalamiento de impedancia

Considere una red eléctrica plana, constituida por elementos lineales e invariantes en el tiempo, cuya entrada es el voltaje de la fuente independiente de voltaje  $v_s(t)$  y la salida es el voltaje  $v_0(t)$ , correspondiente a una rama arbitraria de la misma red, como se observa en la figura 1.

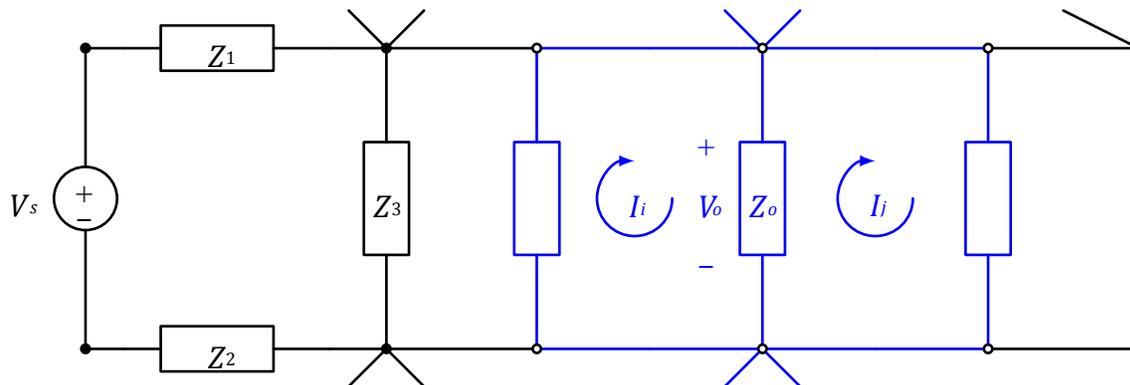


Figura 1. Red eléctrica plana con elementos lineales e invariantes en el tiempo.

El voltaje  $V_0$  de la rama eléctrica con impedancia  $Z_0$ , está dado por

$$V_0 = Z_0 (I_i - I_j)$$

La ecuación de mallas de la red eléctrica es

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos.</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	49/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de Circuitos Eléctricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

$$\begin{bmatrix} Z_{11}(j\omega) & Z_{12}(j\omega) & \cdots & Z_{1m}(j\omega) \\ Z_{21}(j\omega) & Z_{22}(j\omega) & \cdots & Z_{2m}(j\omega) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ Z_{m1}(j\omega) & Z_{m2}(j\omega) & \cdots & Z_{mm}(j\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_s \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

(2)

Resolviendo para  $I_i$  e  $I_j$

$$\mathbf{I}_j = \frac{\begin{vmatrix} Z_{11} & \cdots & Z_{1(j-1)} & \mathbf{V}_s & Z_{1(j+1)} & \cdots & Z_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_{m1} & \cdots & Z_{m(j-1)} & 0 & Z_{m(j+1)} & \cdots & Z_{mm} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & Z_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_{m1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & Z_{mm} \end{vmatrix}}$$

(3)

$$\mathbf{I}_j = \frac{\begin{vmatrix} Z_{11} & \cdots & Z_{1(j-1)} & \mathbf{V}_s & Z_{1(j+1)} & \cdots & Z_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_{m1} & \cdots & Z_{m(j-1)} & 0 & Z_{m(j+1)} & \cdots & Z_{mm} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & Z_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_{m1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & Z_{mm} \end{vmatrix}}$$

(4)

Si se define

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos.</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	50/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de Circuitos Eléctricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

$$\Delta = \begin{vmatrix} Z_{11} & \cdots & Z_{1m} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ Z_{m1} & \cdots & Z_{mm} \end{vmatrix} \quad (5)$$

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} Z_{21} & \cdots & Z_{2(i-1)} & Z_{2(i+1)} & \cdots & Z_{2m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_{m1} & \cdots & Z_{m(i-1)} & Z_{m(i+1)} & \cdots & Z_{mm} \end{vmatrix} \quad (6)$$

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} Z_{21} & \cdots & Z_{2(j-1)} & Z_{2(j+1)} & \cdots & Z_{2m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_{m1} & \cdots & Z_{m(j-1)} & Z_{m(j+1)} & \cdots & Z_{mm} \end{vmatrix} \quad (7)$$

Considerando las ecuaciones (1), (3), (4), (5), (6) y (7) se tiene

$$V_o = Z_o \frac{(\Delta_i - \Delta_j)}{\Delta} V_s$$

(8)

por lo que la función de transferencia resulta

$$\frac{V_o}{V_s} = Z_o \frac{(\Delta_i - \Delta_j)}{\Delta}$$

(9)

Si todas las impedancias que constituyen la red eléctrica se multiplican por un factor  $k$ , de la ecuación (9), se tiene

$$\frac{V'_o}{V_s} = k Z_o \frac{(\Delta'_i - \Delta'_j)}{\Delta'} \quad (10)$$

donde por álgebra de determinantes

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos.</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	51/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de Circuitos Eléctricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

$$\begin{aligned}
 \Delta'_i &= k^{m-1} \Delta_i \\
 \Delta'_j &= k^{m-1} \Delta_j \\
 \Delta' &= k^m \Delta
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Sustituyendo la ecuación (11) en la ecuación (10)

$$\frac{V'_o}{V_s} = k Z_o \frac{k^{m-1} (\Delta_i - \Delta_j)}{k^m \Delta} = \frac{V_o}{V_s}
 \tag{12}$$

De la expresión anterior se concluye lo siguiente:

Si en una red eléctrica se multiplican todas las impedancias por una misma constante,  $k$ , la función de transferencia (si ésta es la razón de un voltaje de salida y un voltaje de entrada) no se altera.

En función de los elementos que conforman la red eléctrica:

Si en una red eléctrica todas las resistencias e inductancias que la constituyen se multiplican por una constante  $k$  y las capacitancias de la misma red se dividen por la constante  $k$ , la función de transferencia (si ésta es la razón de un voltaje de salida y un voltaje de entrada) no se altera.

### Escalamiento de frecuencia

La respuesta de estado sinusoidal permanente de un sistema lineal, invariante en el tiempo y estable debida a una entrada de la forma  $x(t) = \text{sen}(\omega t)$  está dada por

$$y(t) = |H(j\omega)| \text{sen}(\omega t + \angle H(j\omega))
 \tag{13}$$

donde  $H(j\omega)$  es la función de transferencia de la red eléctrica  $H(s)$  evaluada en el eje imaginario del plano complejo, es decir

$$H(s) \Big|_{s=j\omega} = H(j\omega) = |H(j\omega)| \angle H(j\omega)$$

En una red eléctrica dada de  $b$  ramas, la función de transferencia depende de la frecuencia angular y de los valores de los componentes eléctricos que la conforman, esto es

$$H(j\omega) = f(R_1, \dots, R_b, j\omega L_1, \dots, j\omega L_b, j\omega C_1, \dots, j\omega C_b)$$

Para una frecuencia angular  $\omega_1$ , se tiene

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos.</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	52/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de Circuitos Eléctricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

$$H(j\omega_1) = f(R_1, \dots, R_b, j\omega_1 L_1, \dots, j\omega_1 L_b, j\omega_1 C_1, \dots, j\omega_1 C_b) \quad (14)$$

Para una frecuencia angular  $\omega_2$  y suponiendo que las inductancias y las capacitancias de cada rama de la red se pueden modificar

$$H(j\omega_2) = f(R_1, \dots, R_b, j\omega_2 L'_1, \dots, j\omega_2 L'_b, j\omega_2 C'_1, \dots, j\omega_2 C'_b) \quad (15)$$

Ahora, si se desea que las respuestas en frecuencia, dadas por las ecuaciones (14) y (15), presenten las mismas características, se requiere

$$\omega_1 L_n = \omega_2 L'_n \quad \text{para } n = 1, \dots, b \quad (16)$$

y

$$\omega_1 C_n = \omega_2 C'_n \quad \text{Para } n = 1, \dots, b \quad (17)$$

Por consiguiente, los nuevos valores de los elementos inductivos y capacitivos para que se cumpla lo dicho en el párrafo anterior son

$$L'_n = \frac{\omega_1}{\omega_2} L_n \quad \text{Para } n = 1, \dots, b \quad (18)$$

$$C'_n = \frac{\omega_1}{\omega_2} C_n \quad \text{Para } n = 1, \dots, b \quad (19)$$

por lo que se infiere: si se desea que la respuesta sinusoidal permanente de una red eléctrica a una cierta frecuencia angular  $\omega_2$  presente las mismas características de magnitud y fase que se tienen para una frecuencia  $\omega_1$ , los inductores y los capacitores que constituyen la red eléctrica deben modificarse de acuerdo a las ecuaciones (18) y (19).

## Desarrollo

### Experimento 1

Construya el circuito eléctrico que se muestra en la figura 2.

Si  $v_s(t) = A_m \text{sen}(1000\pi t)$  [V]

a) ¿Cuál es la magnitud de  $|H(j 100 \pi)| = \frac{|V_o|}{|V_s|}$ ?

b) Mida el ángulo de desfase entre  $V_o$  y  $V_s$ , es decir,  $\angle H(j 1000\pi) = \angle V_o - \angle V_s$ .

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos.</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	53/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de Circuitos Eléctricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

c) Si se desea que las resistencias de circuito eléctrico de la figura 2 tengan un valor de  $10k\Omega$ . Determine el valor que

deben tener las capacitancias para que la función de transferencia no se modifique

$$C_1 = \quad C_2 =$$

Verifique su respuesta experimentalmente.

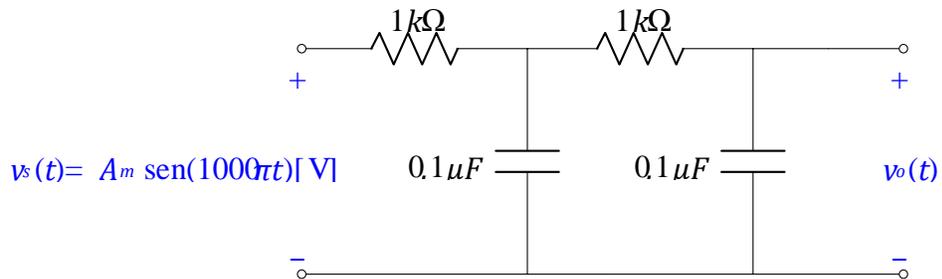
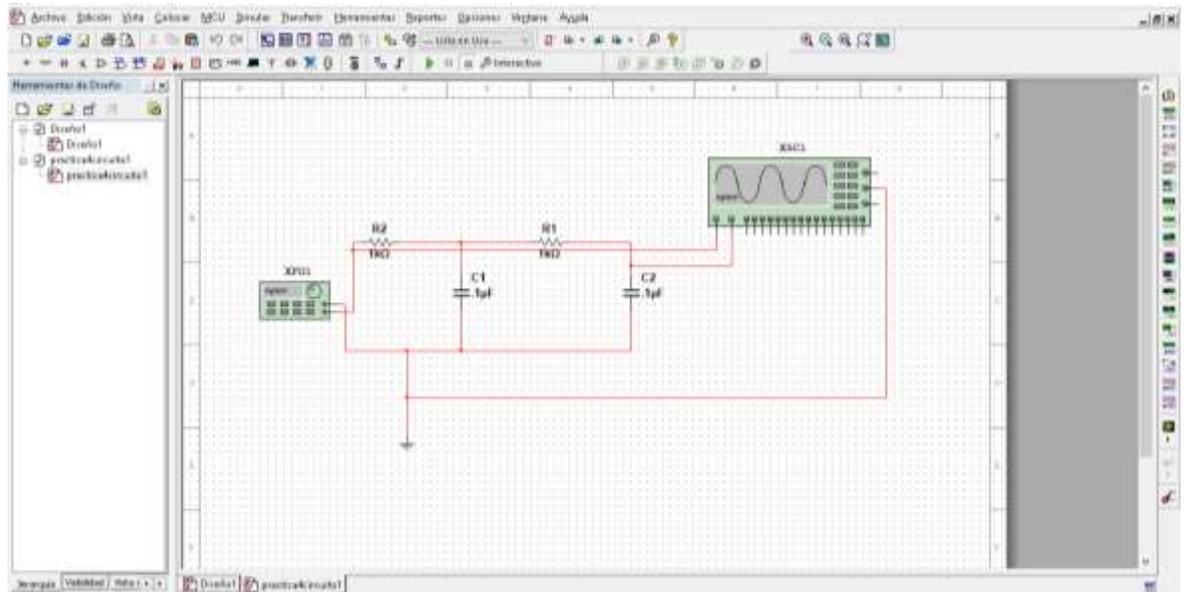


Figura 2. Circuito eléctrico de segundo orden.



## Experimento 2

Construya el circuito eléctrico que se muestra en la figura 3.

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos.</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	54/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de Circuitos Eléctricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

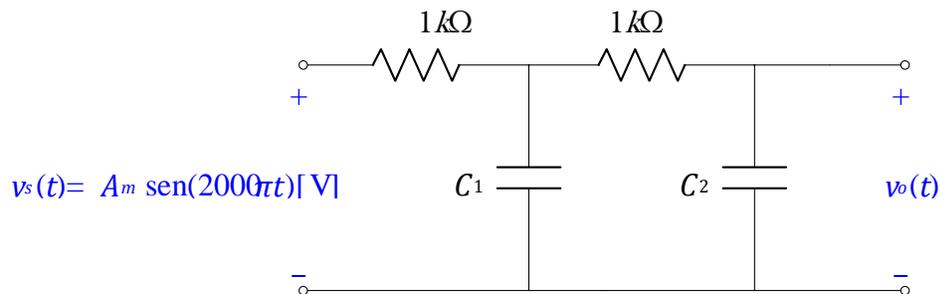
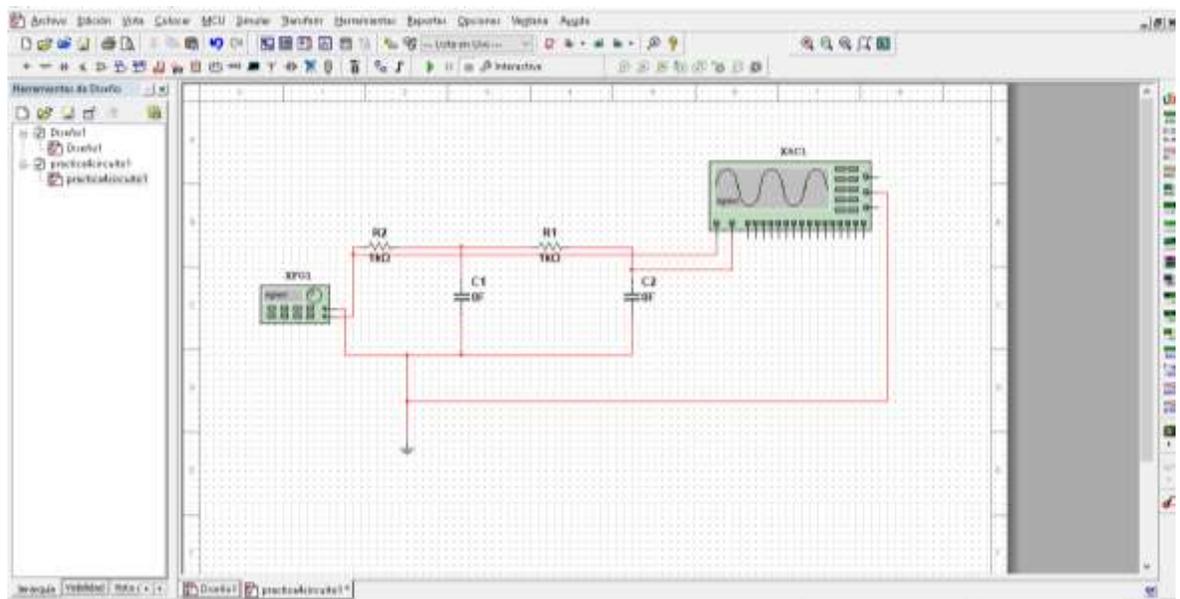


Figura 3. Circuito eléctrico de segundo orden.



- a) Determine los valores de las capacitancias de  $C_1$  y  $C_2$  para que cuando  $v_s(t) = A_m \text{sen}(2000\pi t) [V]$ , la Magnitud de  $|H(j2000\pi)| = \frac{|V_o|}{|V_s|}$  y el ángulo de desfase  $\angle H(j2000\pi) = \angle V_o - \angle V_s$  sean iguales a los que se

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos.</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	55/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de Circuitos Eléctricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

tienen en el experimento.

$$C_1 = \quad C_2 =$$

Verifique su respuesta experimentalmente.

### Experimento 3

Construya el circuito eléctrico que se muestra en la figura 4. donde

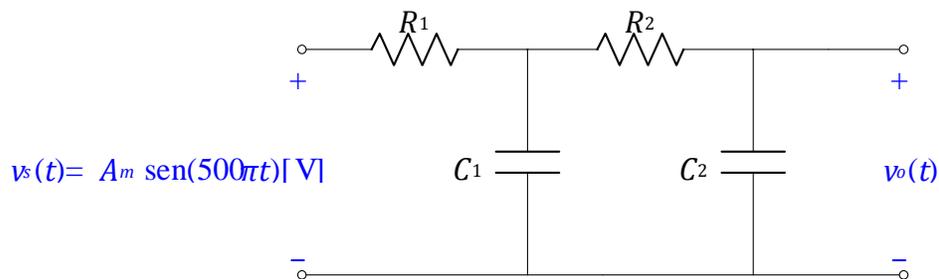
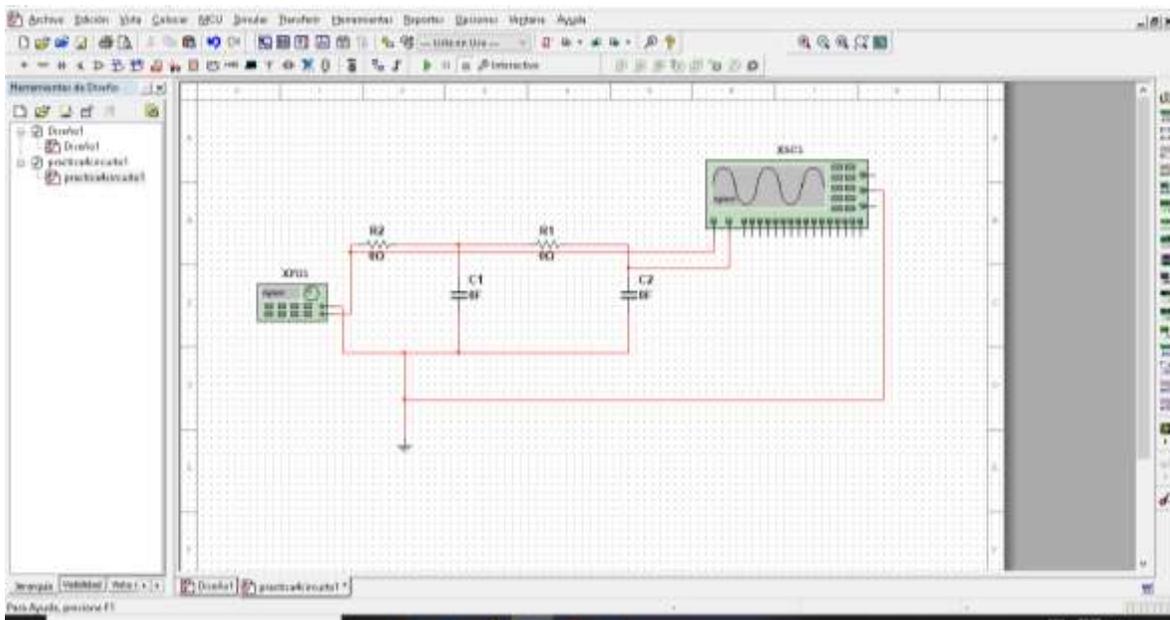


Figura 4. Circuito eléctrico de segundo orden.



$$v_o(t) = A_m |H(j 500\pi)| \text{ sen}(500\pi t + \angle H(j 500\pi)) [V].$$

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos.</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	56/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de Circuitos Eléctricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

a) Si  $C_1 = C_2 = 0.02 \mu F$  ¿Cuales son los valores de las resistencias  $R_1$  y  $R_2$  para que  $|H(j 500\pi)|$  y  $\angle H(j 500\pi)$  sean idénticos a los que se tienen en el experimento .

$$R_1 = \quad R_2 =$$

Verifique su respuesta experimentalmente.

## Equipo necesario

- 1 Generador de funciones
- 1 Osciloscopio

## Material necesario

- 2 Resistores de  $1k\Omega, 0.5$  watt
- 2 Resistores de  $10k\Omega, 0.5$  watt
- 4 capacitores de  $0.01\mu F$
- 4 Capacitores de  $0.1\mu F$

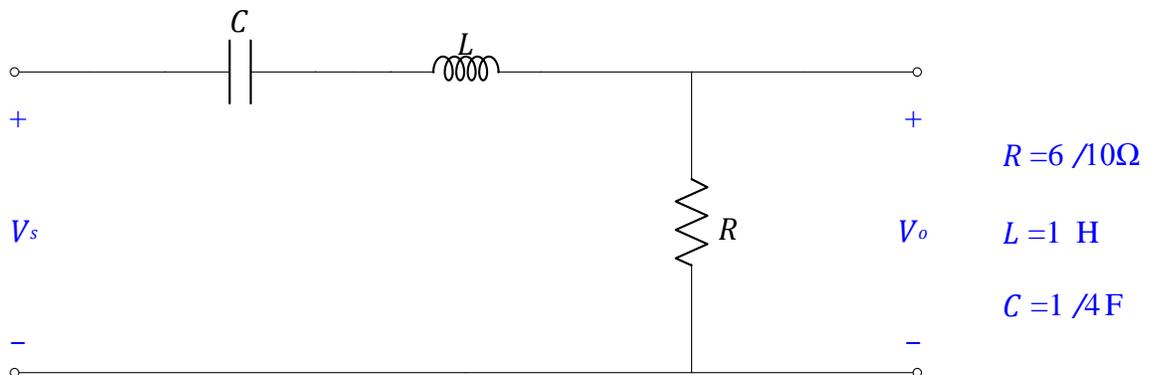


Figura 5 .Filtro eléctrico pasa banda.

## Cuestionario previo

1. Demuestre la ecuación (13).

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos.</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	57/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de Circuitos Eléctricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

2. Demuestre que si la función de transferencia de una red eléctrica es la razón de una corriente de rama y una corriente de una fuente independiente de entrada, al multiplicar todas las resistencias y las inductancias por una constante  $k$  y al dividir todas las capacitancias por la misma constante, tal función de transferencia no se modifica.
3. ¿Qué sucede si la salida es una corriente eléctrica y la entrada es un voltaje?
4. En la figura 5, se presenta un filtro paa banda, con frecuencia central  $f_o = \frac{1}{\pi}$  [Hz]

Si se desea que el filtro eléctrico presente las mismas características de magnitud y fase a la frecuencia central de  $f_o = \frac{10}{\pi}$  [KHz] y con  $C = 10 \mu F$ . Determine los nuevos valores de  $R$  y  $L$  que se deben emplear.

## Bibliografía

- Desoer, C. A. and Kuh, E.S. *Basic Circuit Theory*. New York: McGraw-Hill Company, 1969.
- Dorf, R. C., Svoboda, J. A. *Circuitos Eléctricos*. México, D. F.: Alfaomega Grupo Editor, S. A. de C. V., 2011.
- Hayt, W. H., Kemmerly, J. E. *Análisis de circuitos eléctricos en ingeniería*. México: Mc Graw Hill, 2007.
- Sears, F. W. *Fundamentos de Física II. Electricidad y Magnetismo*. Madrid, España: Aguilar, S. A. de Ediciones, 1970.
- Johnson, D. E., Hilburn, J. L., Johnson, J. R. *Basic Electric Circuit Analysis*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1986.

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos.</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	58/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de Circuitos Eléctricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

# Teoremas de Redes

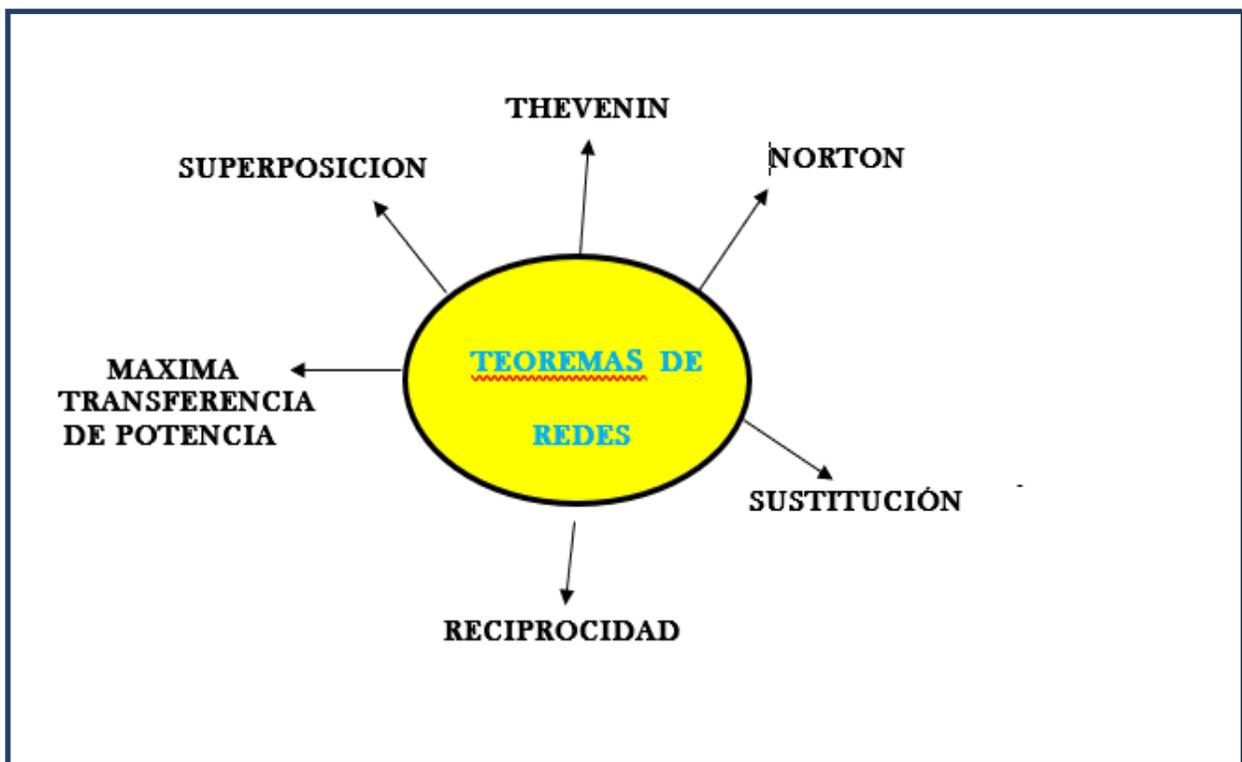
**N° de práctica: 05**

Nombre completo del alumno		Firma
N° de brigada:	Fecha de elaboración:	Grupo:

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos.</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	59/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de Circuitos Eléctricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

## Práctica 5

### TEOREMAS DE REDES ELECTRICAS



	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos.</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	60/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de Circuitos Eléctricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

## Objetivo de aprendizaje

Constatar experimentalmente los Teoremas de *Sustitución*, de *Tellegen*, de *Superposición*, de *Thevenin y Norton* y de *Reciprocidad*.

Familiarizar al estudiante con la naturaleza de tales teoremas, y así ser capaz de *comprender* y *entender* su potencial para determinar la solución de problemas teóricos y prácticos o simplificar el estudio, análisis y síntesis de redes eléctricas complejas

## Teorema de Sustitución

El teorema es de carácter general y se puede aplicar a redes eléctricas lineales o no lineales, variantes o invariantes en el tiempo. Su aplicación se restringe a redes eléctricas de parámetros concentrados o sea que satisfagan las leyes de Kirchhoff y que además sean determinísticas, es decir, que no exista incertidumbre acerca de los voltajes y las corrientes eléctricas de rama.

El teorema asevera que si en una rama  $k$  arbitraria, no acoplada a ninguna otra rama, circula una corriente eléctrica  $j_k$  y en sus terminales hay un voltaje  $v_k$ , dicha rama puede sustituirse por una fuente independiente *ideal* de corriente de valor  $j_k$  o por una fuente independiente *ideal* de voltaje de valor  $v_k$ .

Si la red eléctrica modificada tiene solución única para *todas* las corrientes eléctricas y voltajes de rama, dichas corrientes y voltajes son idénticos a los de la red eléctrica original.

## Prueba del teorema

Considere una rama  $k$ , arbitraria, que no está acoplada a ninguna otra rama de la red eléctrica. Sean  $J_k$  la corriente que circula por ella y  $V_k$  el voltaje presente entre sus terminales. Suponga que dicha rama es común a las mallas  $\alpha$  y  $\beta$ , como se observa en la figura 1.



**Manual de prácticas del  
Laboratorio de Circuitos  
Eléctricos.**

Código:	MADO-77
Versión:	01
Página	61/96
Sección ISO	8.3
Fecha de emisión	28 de enero de 2019

Facultad de Ingeniería

Área/Departamento:  
Laboratorio de Circuitos Eléctricos

La impresión de este documento es una copia no controlada

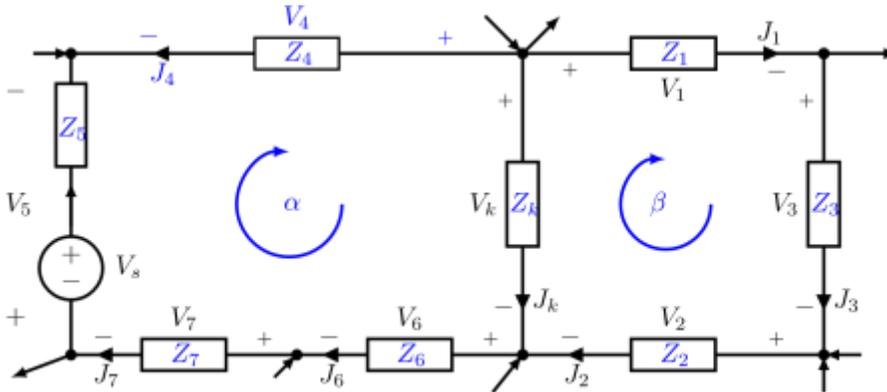


Figura 1. Sección arbitraria de una red eléctrica.

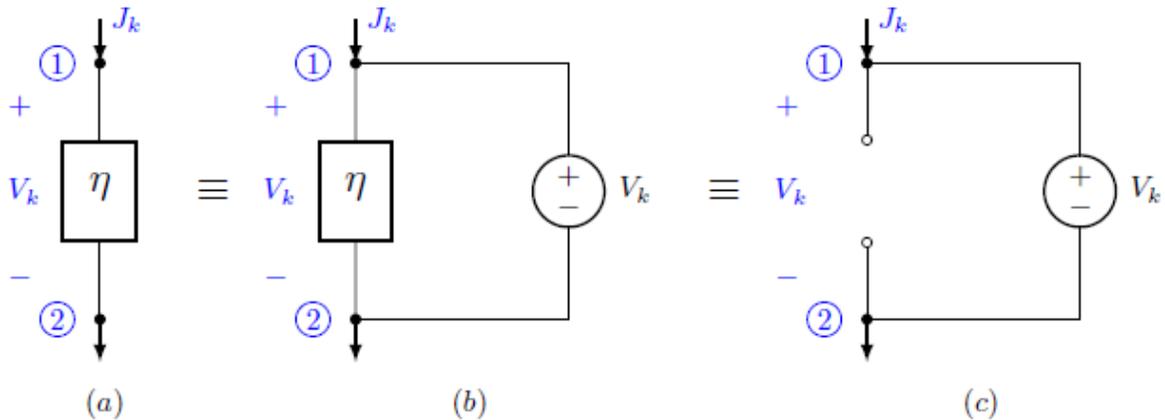
Para la malla  $\alpha$ , de la segunda ley de Kirchhoff, se tiene

$$V_k = V_4 - V_5 - V_6 - V_7$$

Asimismo, para la malla  $\beta$ , se cumple

$$V_k = V_1 + V_2 + V_3$$

Si la rama  $k$  se modifica poniendo en paralelo una fuente independiente *ideal* de voltaje de valor  $V_k$ , como se muestra en la figura 2, las ecuaciones (1) y (2) no se modifican.



	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos.</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	62/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de Circuitos Eléctricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

Figura 2. (a) Red eléctrica arbitraria. (b) Fuente independiente *ideal* de voltaje en paralelo con una red eléctrica arbitraria  $\eta$ . (c) Red eléctrica equivalente.

La red eléctrica de la figura 2(a) es equivalente a la red eléctrica de la figura 2(c). Lo anterior se demuestra al aplicar la primera ley de Kirchoff a los nodos ① y ② en cada una de las redes eléctricas de la figura. Como consecuencia de lo anterior, si la red eléctrica  $\eta$  entre los nodos ① y ② se sustituye por una fuente independiente *ideal* de voltaje de valor  $V_k$  las leyes de Kirchoff de la red eléctrica original no se alteran.

La prueba del teorema, cuando la sustitución se lleva a cabo por una fuente independiente *ideal* de corriente es completamente similar

## Desarrollo

### Experimento 1

Construya el circuito eléctrico que se muestra en la figura 3

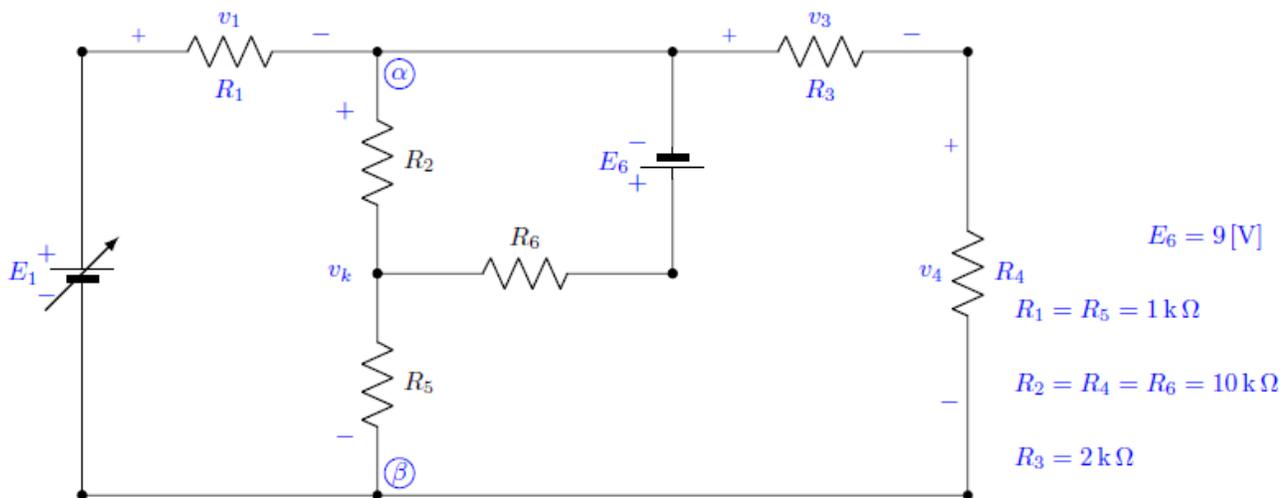
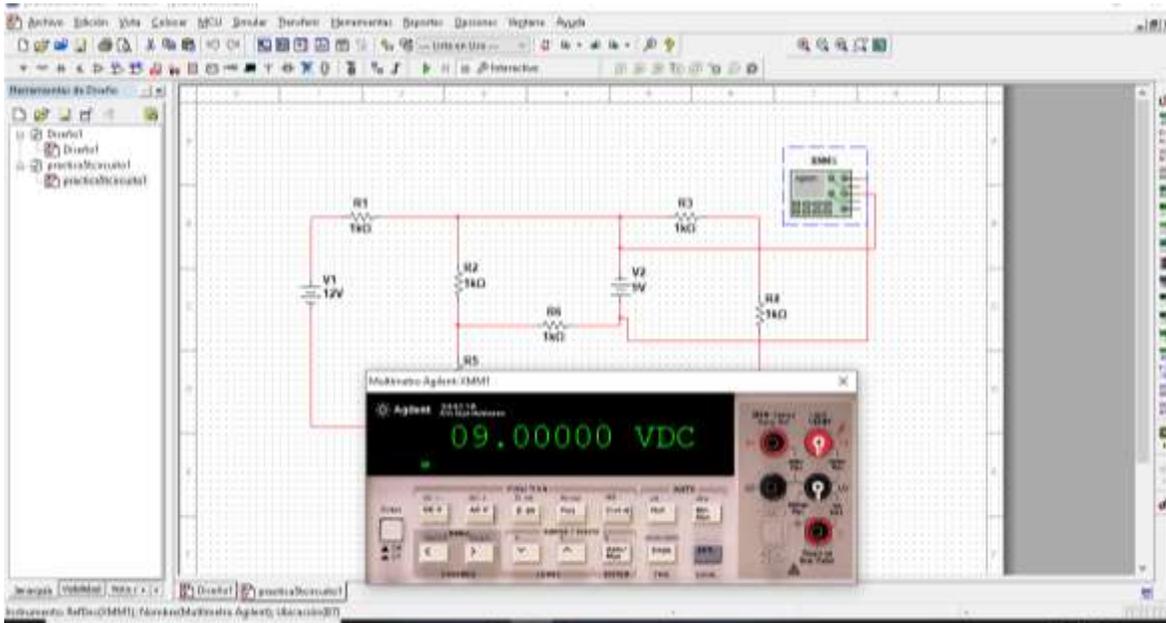


Figura 3. Circuito eléctrico de tres mallas y seis ramas.

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos.</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	63/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de Circuitos Eléctricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			



En MULTISIM armar el circuito que se presenta, para el valor de una las fuentes, será el valor de una pila cuadrada de

9 [V], y la fuente variable se ajustara como se indica en el inciso b

- a) Mida el voltaje de la otra pila.
- b) Ajuste  $E_1$  hasta que  $v_k = v_{\alpha\beta}$  sea igual al voltaje de la pila medido antes. Una vez que se logra lo anterior, no varíe el valor de  $E_1$  en lo sucesivo.
- c) Mida los voltajes  $v_1$ ,  $v_k$ ,  $v_3$  y  $v_4$ .
  - d) Compare los valores calculados, en el cuestionario previo, de  $v_1$ ,  $v_k$ ,  $v_3$  y  $v_4$  con los valores medidos en el inciso anterior. En caso de que haya disconformidades, explique las causas posibles.

## Experimento 2

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos.</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	64/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de Circuitos Eléctricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

En el circuito eléctrico de la figura 3.

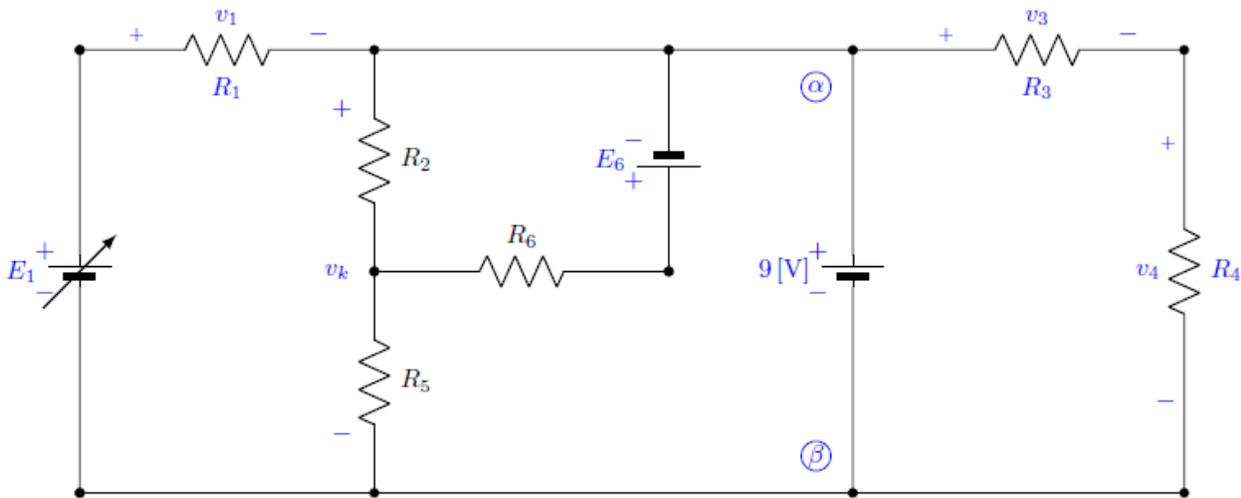
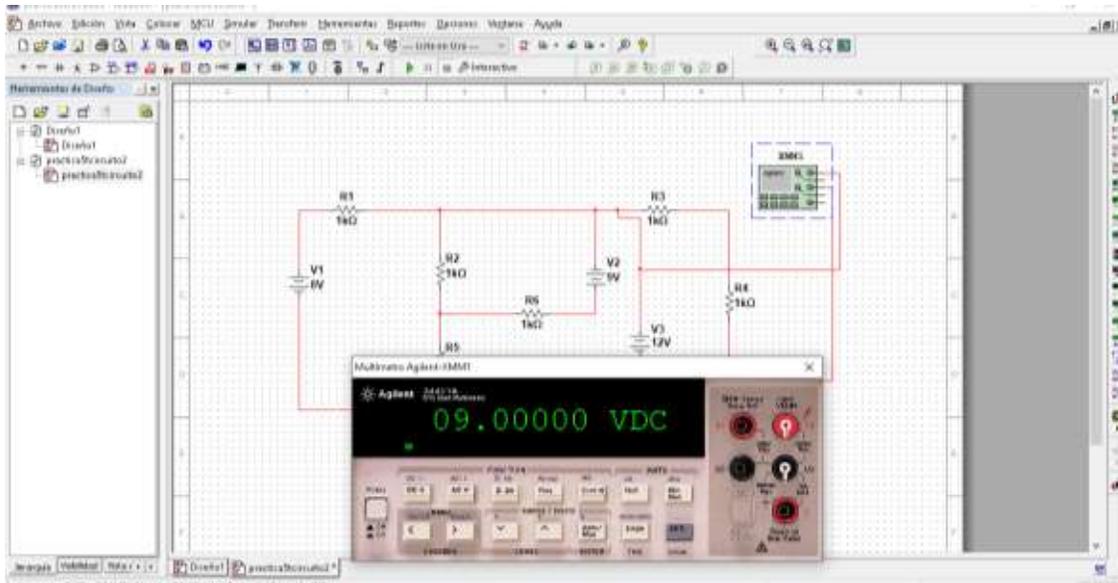
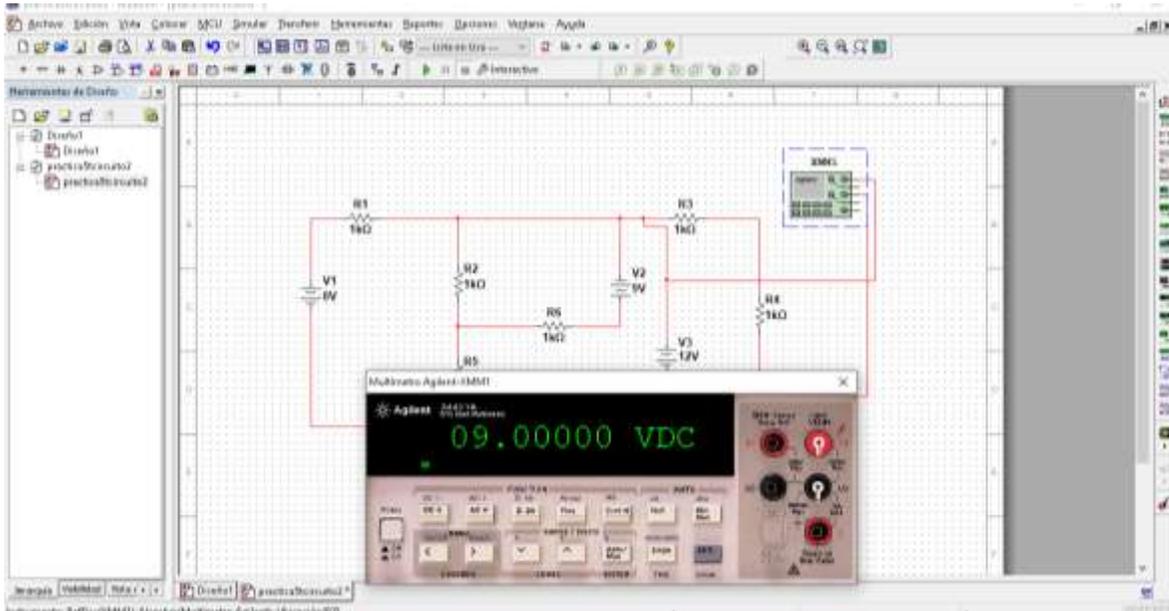


Figura 4. Circuito eléctrico para verificar el Teorema de Sustitución



	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos.</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	65/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de Circuitos Eléctricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			



- Conecte otra pila entre los nodos  $\alpha$  y  $\beta$ , tal como se observa en la figura 4.
- Mida los voltajes  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$  y  $v_4$ .
- Compare los valores medidos en el inciso anterior con los del inciso c) del experimento
- ¿Qué concluye?

### Experimento 3

- Desconecte las componentes eléctricas entre los nodos  $\alpha$  y  $\beta$  del circuito eléctrico de la figura 4, de forma tal que el circuito eléctrico resultante sea el que se muestra en la figura 5
- Repita los incisos b), c) y d) de experimento

### Equipo necesario

- 1 Fuente de alimentación
- 1 Multímetro

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos.</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	66/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería	Área/Departamento: Laboratorio de Circuitos Eléctricos		
La impresión de este documento es una copia no controlada			

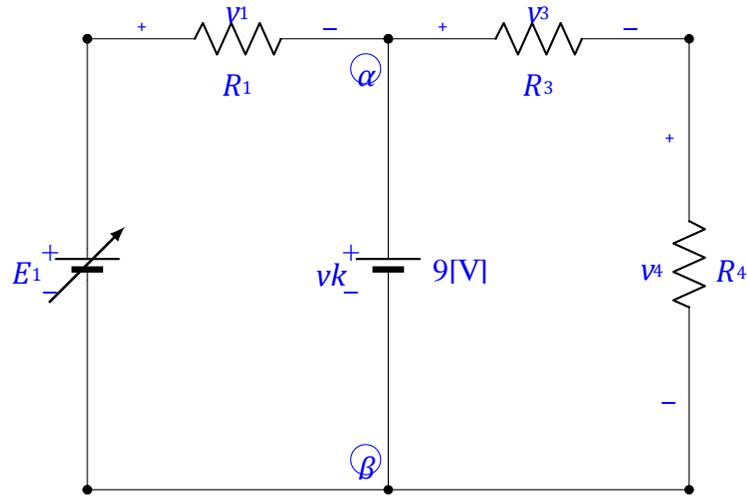
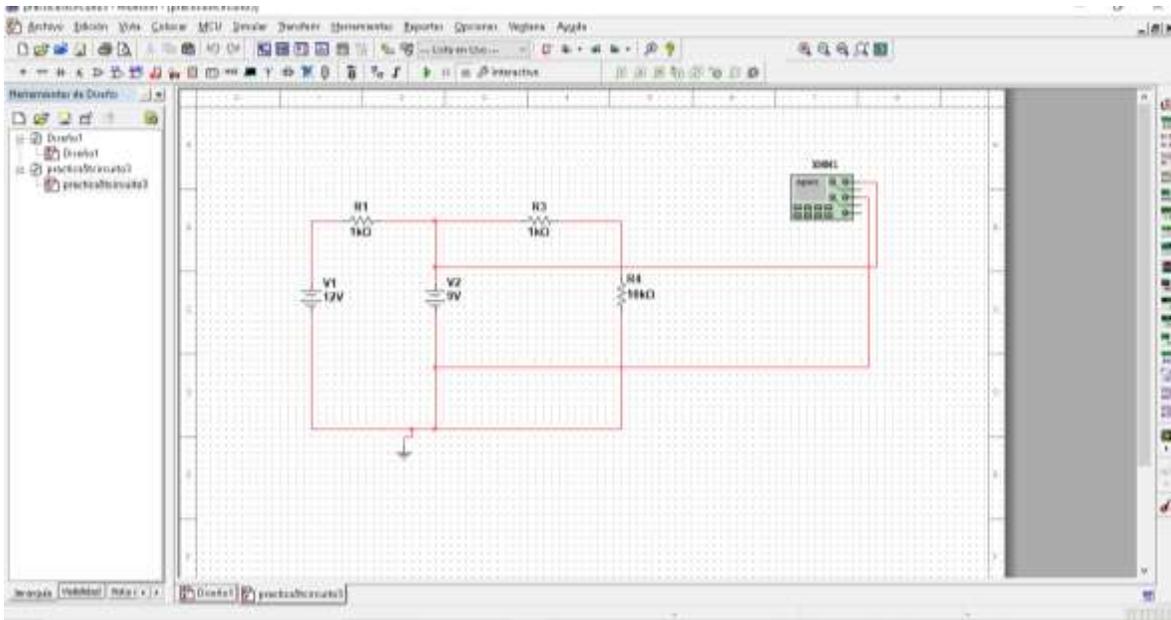


Figura 5. Circuito eléctrico en el que se ha aplicado el Teorema de Sustitución.



	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos.</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	67/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de Circuitos Eléctricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

## Material necesario

4 Resistores de  $1k\Omega$ , 0.5 watt  
 3 Resistores de  $10k\Omega$ , 0.5 watt  
 2 Pilas de 9 [V]

## Cuestionario previo

1. Determine los voltajes  $v_1$ ,  $v_k$ ,  $v_3$  y  $v_4$  del circuito eléctrico de la figura 3; considere  $E_1 = 12[V]$ .
2. Determine los voltajes  $v_1$ ,  $v_k$ ,  $v_3$  y  $v_4$  del circuito eléctrico de la figura 4.
3. Determine los voltajes  $v_1$ ,  $v_k$ ,  $v_3$  y  $v_4$  del circuito eléctrico de la figura 5.
4. ¿Qué se puede concluir?

## Teorema de Tellegen

El teorema de Tellegen en una red eléctrica de  $b$  ramas y  $l$  mallas se cumple

$$\sum_{k=1}^b j_k v_k = 0$$

Donde  $j_k$  y  $v_k$  se representan, respectivamente, la corriente eléctrica y el voltaje de la  $k$ -enésima rama de la red eléctrica

Este teorema está íntimamente relacionado con el principio de la conservación de la energía. Puesto que el producto de  $j_k v_k$  representa la energía por unidad de tiempo que se suministra o se consume en la  $k$ -ésima rama; la ecuación (3) establece que la potencia que se suministra a una red eléctrica es igual a la potencia que se consume en dicha red.

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos.</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	68/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de Circuitos Eléctricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

Este teorema es de carácter general y se puede aplicar a una red eléctrica lineal o no lineal, variante o invariante en el tiempo, la única restricción es que se deben satisfacer las leyes de Kichhoff, es decir la red eléctrica debe ser de parámetros concentrados y determinística.

## Prueba del teorema

Considere una red eléctrica de  $b$  ramas y  $n$  nodos, lo que implica, en consecuencia, que el número de mallas<sup>8</sup> es

$l = b - (n - 1)$  sin considerar la malla externa. A la malla externa se le asigna el número  $l + 1$ . Sean  $I_\alpha$  e  $I_\beta$  las corrientes de malla de las mallas  $\alpha$  y  $\beta$ , respectivamente. Suponga que la rama  $k$  es común a las mallas  $\alpha$  y  $\beta$  como muestra la figura 6 y a través de ella circula la corriente  $j_k$  cuando el voltaje es  $v_k = v_{\alpha\beta}$

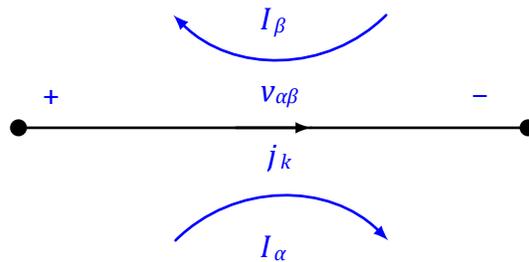


Figura 6. Rama arbitraria  $k$ , común a las mallas  $\alpha$  y  $\beta$ .

Entonces

(4)

$$j_k v_k = (I_\alpha - I_\beta)v_{\alpha\beta}$$

Que también se puede escribir como

(5)

$$j_k v_k = (I_\beta - I_\alpha)v_{\beta\alpha}$$

Sumando las ecuaciones (4) y (5)

$$j_k v_k = \frac{1}{2} [(I_\alpha - I_\beta)v_{\alpha\beta} + (I_\beta - I_\alpha)v_{\beta\alpha}] +$$

<sup>8</sup> Definición de *malla*: trayectoria cerrada que no contiene ninguna rama en su interior. Malla externa: trayectoria cerrada que contiene todas las ramas.

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos.</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	69/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de Circuitos Eléctricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

al considerar las  $b$  ramas y las  $l+1$  mallas de la red eléctrica

$$\sum_{k=1}^b j_k v_k = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{l+1} \sum_{\beta=1}^{l+1} (I_{\alpha} - I_{\beta}) v_{\alpha\beta} \quad (6)$$

Se debe advertir, que si no hay una rama que sea común a las mallas  $\alpha$  y  $\beta$ , entonces  $v_{\alpha\beta} = 0$ .

La ecuación (6) se puede escribir de la siguiente manera

$$\sum_{k=1}^b j_k v_k = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{l+1} I_{\alpha} \left( \sum_{\beta=1}^{l+1} v_{\alpha\beta} \right) - \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^{l+1} I_{\beta} \left( \sum_{\alpha=1}^{l+1} v_{\alpha\beta} \right)$$

(7)

Donde para cada  $\alpha$ ,  $\sum_{\beta=1}^{l+1} v_{\alpha\beta}$  es la suma de todos los voltajes de rama de la malla  $\alpha$  y, para cada  $\beta$ ,

$\sum_{\alpha=1}^{l+1} v_{\alpha\beta}$  es la

suma de todos los voltajes de rama de la malla  $\beta$ . Dado que se ha supuesto que se satisfacen las leyes de Kirchhoff, de la segunda ley, cada una de estas sumas es igual a cero y por consiguiente

$$\sum_{k=1}^b j_k v_k = 0$$

## Desarrollo

### Experimento 1

Construya el circuito eléctrico que se muestra en la figura 7.



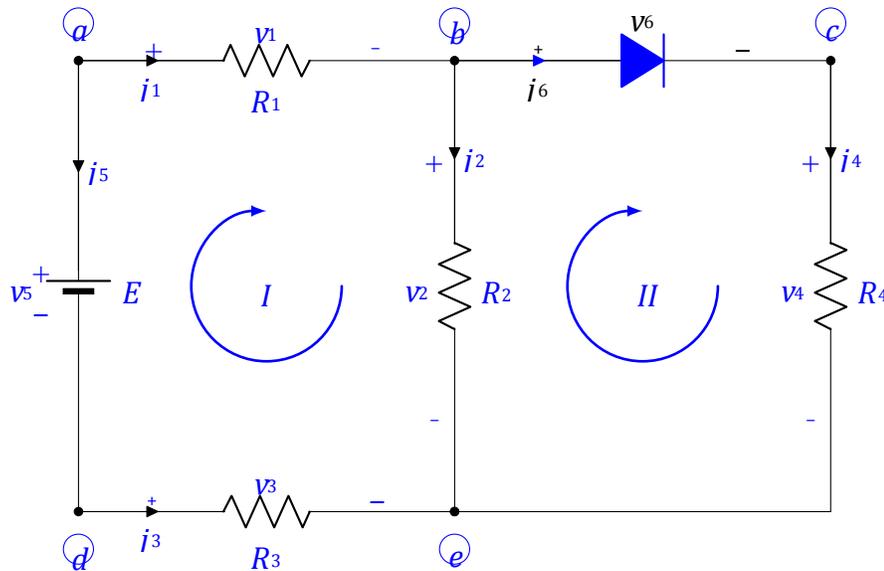
**Manual de prácticas del  
Laboratorio de Circuitos  
Eléctricos.**

Código:	MADO-77
Versión:	01
Página	70/96
Sección ISO	8.3
Fecha de emisión	28 de enero de 2019

Facultad de Ingeniería

Área/Departamento:  
Laboratorio de Circuitos Eléctricos

La impresión de este documento es una copia no controlada

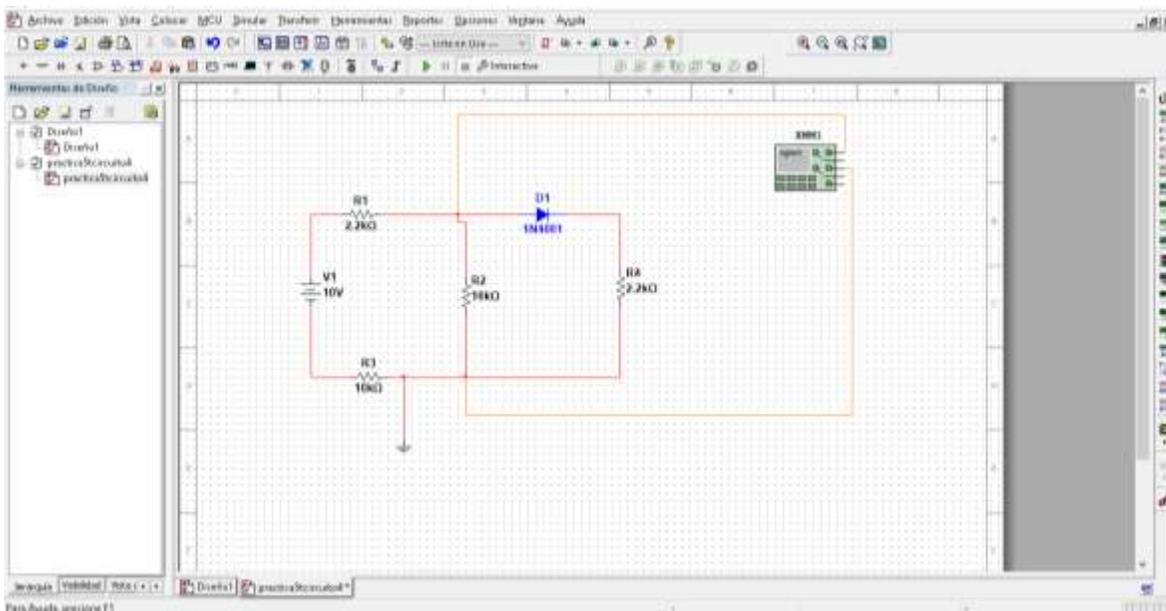


$$E = 10[V]$$

$$R_1 = R_4 = 2.2\text{k}\Omega$$

$$R_2 = R_3 = 10\text{ k}\Omega$$

Figura 7. Circuito eléctrico de seis ramas y dos mallas, sin considerar la malla externa, con un elemento no lineal, el diodo.

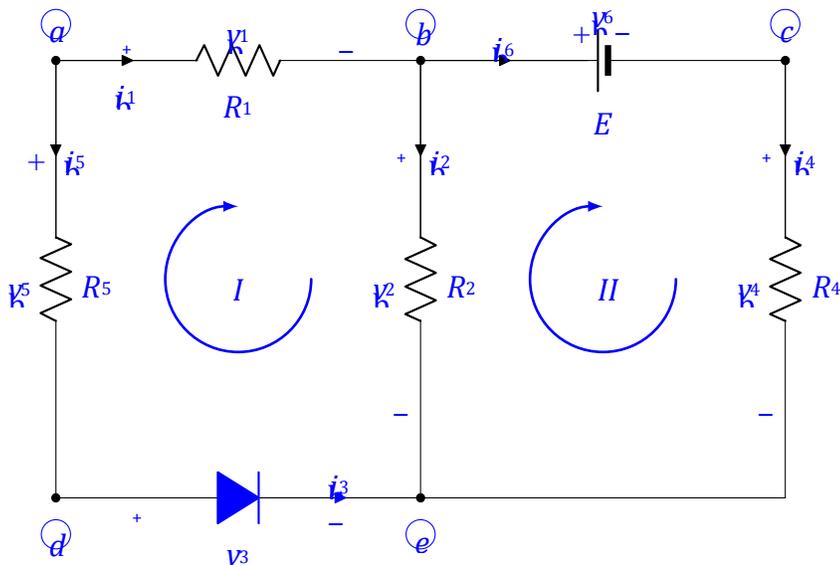


	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos.</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	71/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de Circuitos Eléctricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

- a) Mida los voltajes  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$ ,  $v_4$ ,  $v_5$  y  $v_6$ .
- b) A partir de sus mediciones, determine las corrientes eléctricas  $j_1$ ,  $j_2$ ,  $j_3$ ,  $j_4$ ,  $j_5$  y  $j_6$ . Para llevar a cabo lo anterior, es necesario conocer el valor exacto de las resistencias; mídalas con el multímetro.
- c) Verifique la primera ley de Kirchhoff en los nodos (b) y (e) del circuito eléctrico.
- d) Confirme la segunda ley de Kirchhoff en las mallas I y II del circuito eléctrico.

## Experimento 2

Construya el circuito eléctrico que se muestra en la figura 8



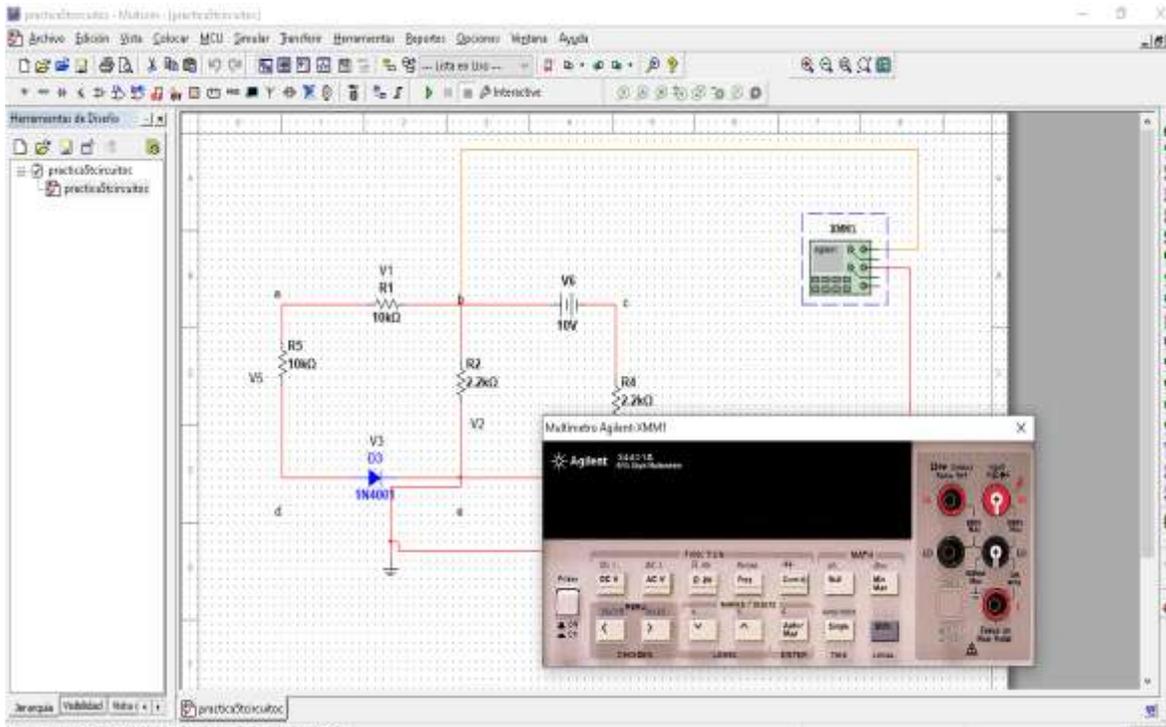
$$E = 10[V]$$

$$R_1 = R_5 = 10\text{ k}\Omega$$

$$R_2 = R_4 = 2,2\text{ k}\Omega$$

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos.</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	72/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de Circuitos Eléctricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

Figura 8. Circuito eléctrico de seis ramas y dos mallas, sin considerar la malla externa, con un elemento no lineal, el diodo.



- Mida los voltajes  $\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3, \hat{v}_4, \hat{v}_5$  y  $\hat{v}_6$ .
- A partir de sus mediciones, determine las corrientes  $\hat{j}_1, \hat{j}_2, \hat{j}_3, \hat{j}_4, \hat{j}_5$  y  $\hat{j}_6$ .
- Repita los incisos *c*) y *d*) del experimento
- Con los datos obtenidos en los experimentos y , constate que se satisfacen las siguientes relaciones

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos.</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	73/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de Circuitos Eléctricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

$$\sum_{k=1}^6 j_k v_k = 0$$

$$\sum_{k=1}^6 \hat{j}_k v_k = 0$$

$$\sum_{k=1}^6 j_k \hat{v}_k = 0$$

$$\sum_{k=1}^6 \hat{j}_k \hat{v}_k = 0$$

e) ¿Qué se puede concluir?

### Equipo necesario

- 1 Fuente de alimentación
- 1 Multímetro

### Material necesario

- 2 Resistores de 2.2kΩ, 0.5 watt
- 2 Resistores de 10kΩ, 0.5 watt
- 1 Diodo 1N4001 o equivalente

### Cuestionario previo

1. Para el circuito eléctrico de la figura 9, desarrolle las ecuaciones (6) y (7)

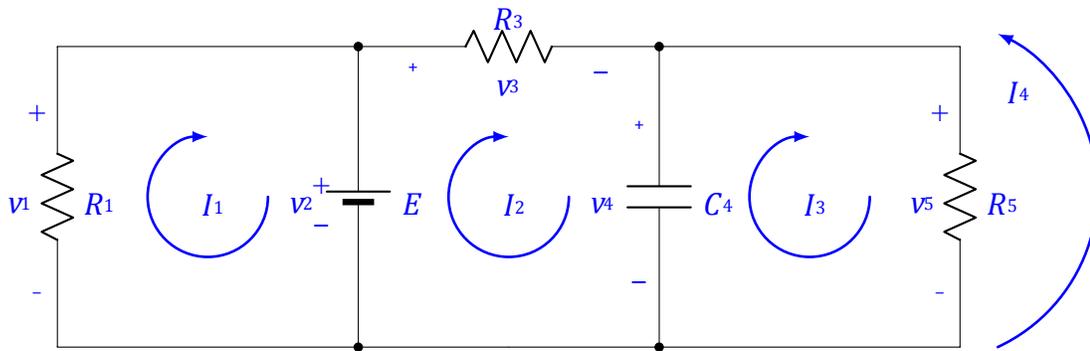


Figura 9. Circuito eléctrico de tres nodos y cinco ramas.

## Teorema de Superposición

Este teorema se aplica únicamente a redes eléctricas *lineales*, variantes o invariantes en el tiempo, de parámetros concentrados. El teorema señala que *la respuesta de estado cero* de una red eléctrica

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos.</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	74/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de Circuitos Eléctricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

debido a varias fuentes independientes de entrada actuando simultáneamente, es igual a la suma de *las respuestas de estado cero* debidas a cada una de las fuentes independientes de entrada actuando por separado

### Prueba del teorema

La respuesta de estado cero  $y_{zs}(t)$ , de una red eléctrica cuyo modelo en variables de estado es

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}(t) &= \underline{A}(t) \underline{x}(t) + \underline{B}(t) \underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) &= \underline{C}(t) \underline{x}(t) + \underline{D}(t) \underline{u}(t)\end{aligned}\quad (8)$$

Está dada por la siguiente expresión

$$\underline{y}_{zs}(t) = \int_0^t \underline{C}(t) \underline{\Phi}(t, \sigma) \underline{B}(\sigma) \underline{u}(\sigma) d\sigma + \underline{D}(t) \underline{u}(t) \quad (9)$$

Donde  $\underline{u}(t)$  es el vector de entrada, de dimensión  $(r \times 1)$ , de la forma  $\underline{u}(t)^T = [u_1(t) \ u_2(t) \ \dots \ u_r(t)]$  y que se puede

Escribir como

$$\underline{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u_2(t) \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r \underline{u}_i(t) \quad (10)$$

y  $\underline{\Phi}(t, \sigma)$  es *la matriz de transición de estados*, de dimensión  $(n \times n)$ , y que se puede encontrar a partir de la siguiente

Relación

$$\underline{\Phi}(t, t_0) = \underline{I} + \int_{t_0}^t \underline{A}(\sigma) d\sigma + \int_{t_0}^t \underline{A}(\sigma) \int_{t_0}^{\sigma} \underline{A}(\sigma_1) d\sigma_1 d\sigma + \dots + \int_{t_0}^t \underline{A}(\sigma) \int_{t_0}^{\sigma} \underline{A}(\sigma_1) \dots \int_{t_0}^{\sigma_{k-2}} \underline{A}(\sigma_{k-1}) d\sigma_{k-1} \dots d\sigma_1 d\sigma + \dots \quad (11)$$

La  $i$  – ésima respuesta de estado cero  $y_{zsi}(t)$  causada por la  $i$  – ésima fuente independiente de entrada, está dada por

$$\underline{y}_{zsi}(t) = \int_0^t \underline{C}(t) \underline{\Phi}(t, \sigma) \underline{B}(\sigma) \underline{u}_i(t) d\sigma + \underline{D}(t) \underline{u}_i(t) \quad (12)$$

Comparando las ecuaciones (9) y (12) y teniendo en cuenta a la (10), se tiene

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos.</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	75/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de Circuitos Eléctricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

$$\underline{y_{zs}}(t) = \sum_{i=1}^r \underline{y_{zs_i}}(t) \quad (13)$$

Comprobándose así la validez del teorema

## Desarrollo

### Experimento 1

Construya el circuito eléctrico que se muestra en la figura 10.

- a) Mida el voltaje entre los nodos  $\alpha$  y  $\beta$ , es decir  $v_{\alpha\beta}$ .

Sustituya la pila de la izquierda por un corto circuito. Vea la figura 11.

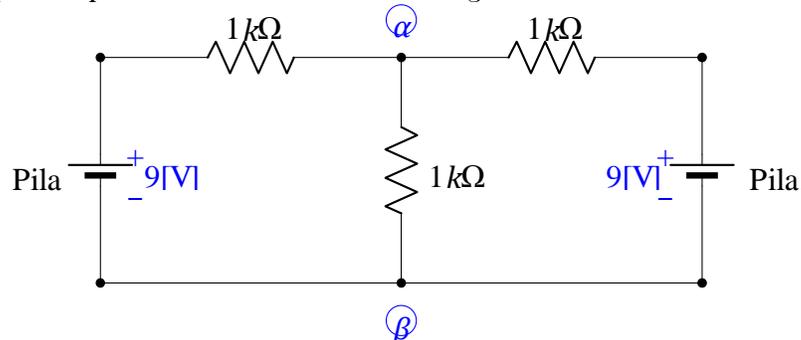


Figura 10. Circuito eléctrico lineal para verificar el teorema de superposición.

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos.</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	76/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de Circuitos Eléctricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

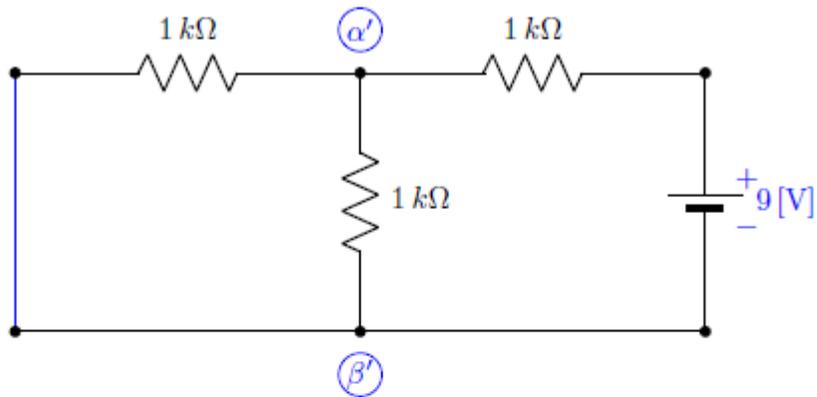


Figura 11. Circuito eléctrico lineal para verificar el teorema de superposición.

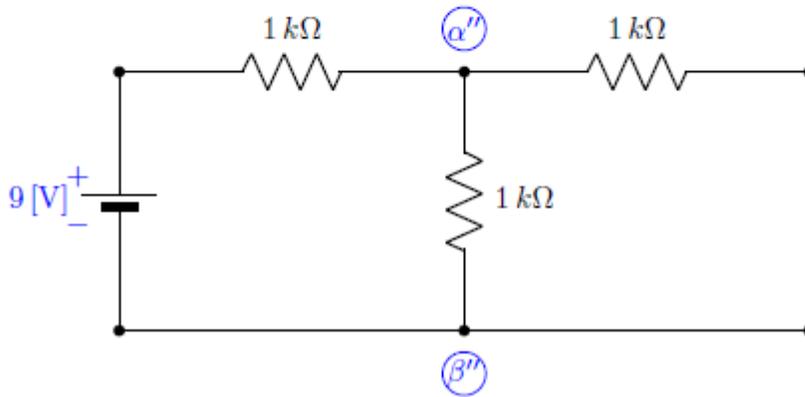


Figura 12. Circuito eléctrico lineal para verificar el teorema de superposición.



## Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos.

Código:	MADO-77
Versión:	01
Página	77/96
Sección ISO	8.3
Fecha de emisión	28 de enero de 2019

Facultad de Ingeniería

Área/Departamento:  
Laboratorio de Circuitos Eléctricos

La impresión de este documento es una copia no controlada

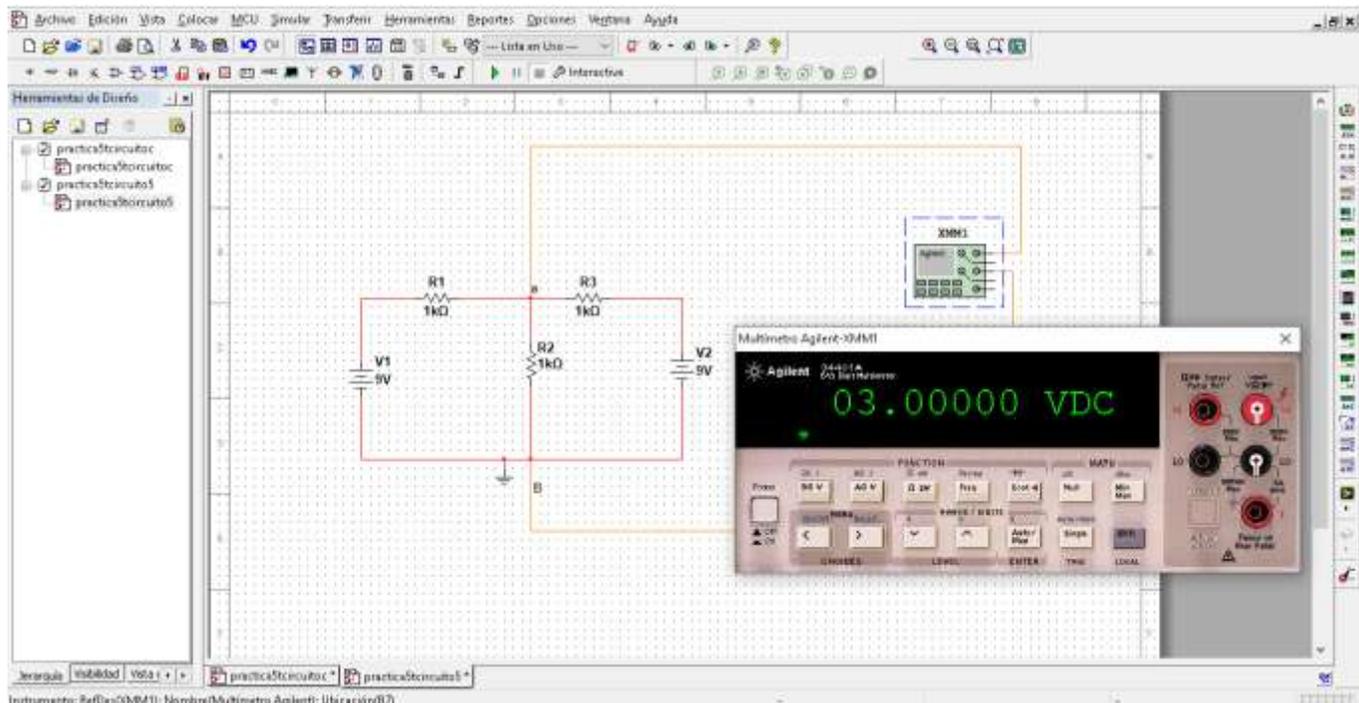
b) Mida el voltaje entre los nodos  $\alpha'$  y  $\beta'$ , es decir  $v_{\alpha'\beta'}$ .

Vuelva a conectar la pila de 9[V] y ahora sustituya la otra pila por un corto circuito. Vea la figura 12.

c) Mida el voltaje entre los nodos  $\alpha''$  y  $\beta''$ , es decir  $v_{\alpha''\beta''}$ .

d) Compruebe que  $v_{\alpha\beta} = v_{\alpha'\beta'} + v_{\alpha''\beta''}$  con ayuda de las lecturas obtenidas en los incisos a), b) y c) del experimento.

e) En caso de presentarse discrepancias, ¿qué puede usted argüir?





# Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos.

Código:

MADO-77

Versión:

01

Página

78/96

Sección ISO

8.3

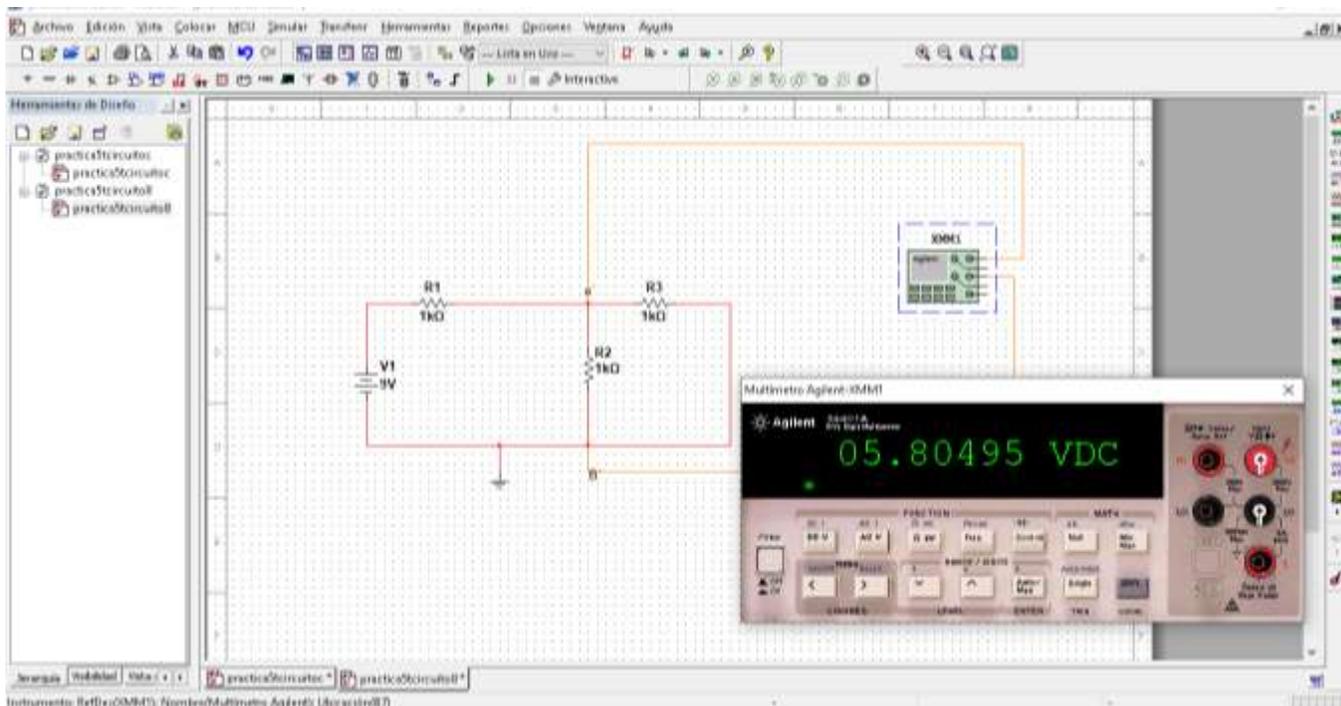
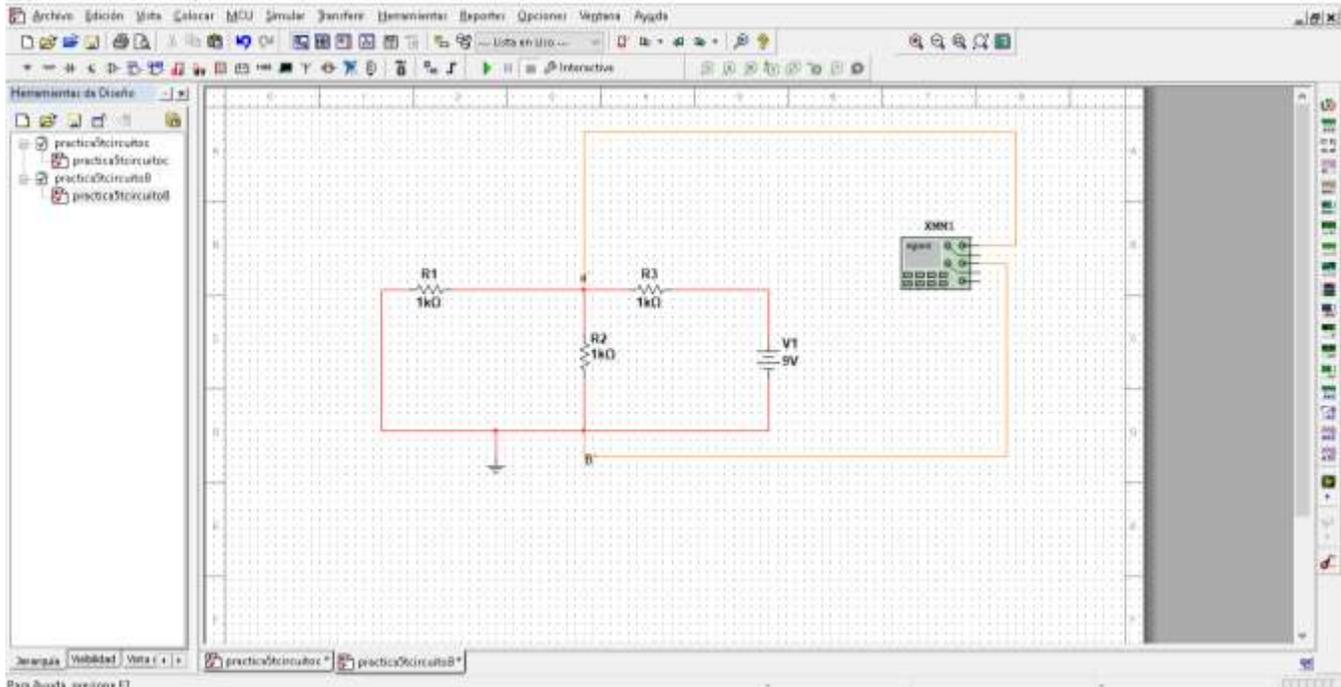
Fecha de emisión

28 de enero de 2019

Facultad de Ingeniería

Área/Departamento:  
Laboratorio de Circuitos Eléctricos

La impresión de este documento es una copia no controlada



	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos.</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	79/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de Circuitos Eléctricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

## Experimento 2

Construya el circuito eléctrico que se muestra en la figura 13 y repita los incisos del experimento

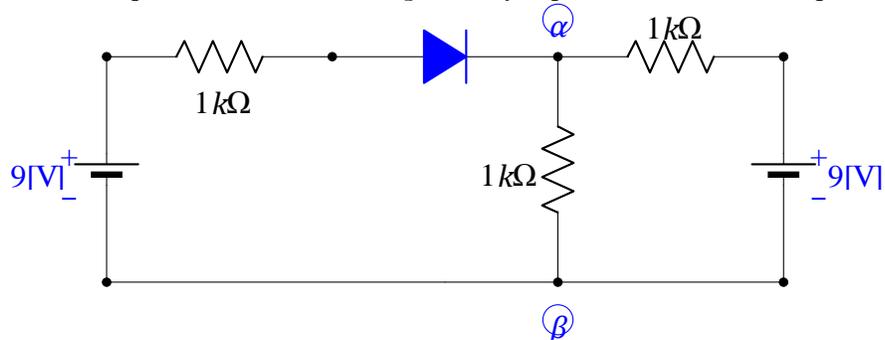
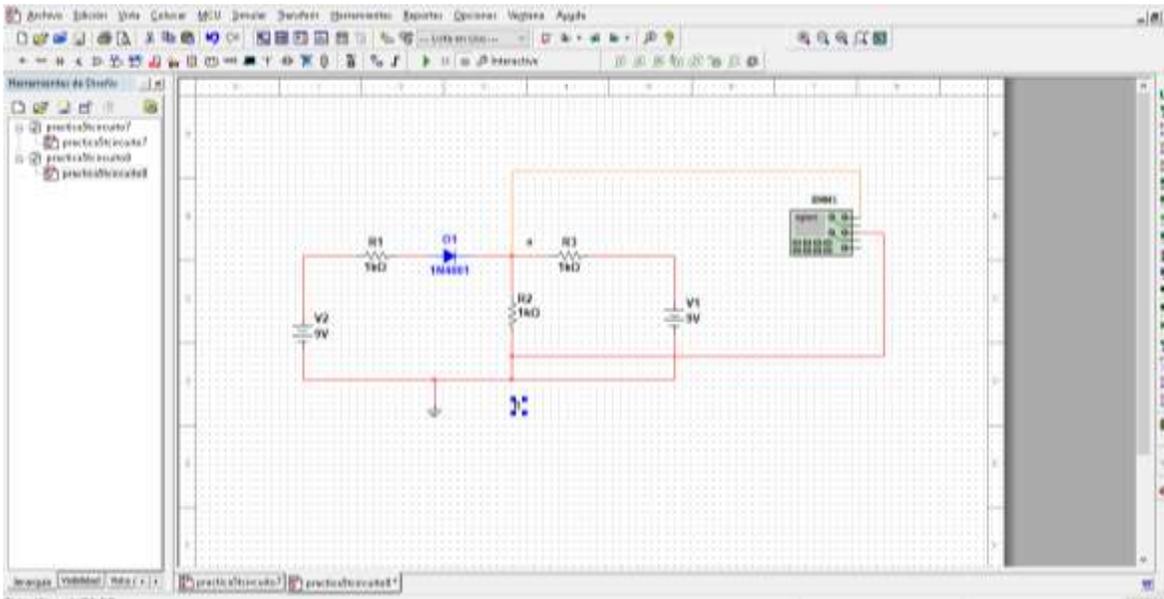


Figura13.Circuito eléctrico lineal



	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos.</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	80/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de Circuitos Eléctricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

### Equipo necesario

1 Multímetro

### Material necesario

2 Pilas de 9 [V]

3 Resistores de 1 k $\Omega$ , 0.5 watt

1 Diodo 1N4001 o equivalente

### Cuestionario previo

1. Determine en el circuito eléctrico de la figura 10 el voltaje  $v_{\alpha\beta}$ .
2. Determine en el circuito eléctrico de la figura 11 el voltaje  $v_{\alpha'\beta'}$ .
3. Determine en el circuito eléctrico de la figura 12 el voltaje  $v_{\alpha''\beta''}$ .
4. Verifique que con los resultados anteriores que  $v_{\alpha\beta} = v_{\alpha'\beta'} + v_{\alpha''\beta''}$

## Teorema del circuito equivalente de Thevenin y Norton

Este teorema se asigna únicamente a las *redes eléctricas lineales*, variantes o invariantes en el tiempo y de parámetros concentrados. El teorema considera la situación que se presenta en la figura 14. Es importante destacar que la única interacción entre la red eléctrica lineal y la carga arbitraria es la corriente eléctrica  $i(t)$  que circula a través de ésta, ningún otro tipo de acoplamiento se permite.

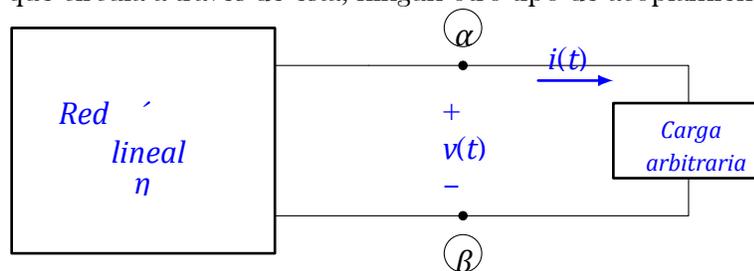


Figura 14. Red eléctrica con una carga arbitraria.

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos.</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	81/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de Circuitos Eléctricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

Si la red eléctrica lineal se sustituye por su circuito equivalente de Thevenin o por su circuito equivalente de Norton; tanto la corriente eléctrica  $i(t)$  como el voltaje  $v(t)$ , en la carga eléctrica arbitraria, no se modifican.

### Circuito equivalente de Thevenin

El circuito equivalente de Thevenin consiste de una fuente independiente de voltaje  $e_{oc}(t)$  en serie con una red eléctrica que se obtiene de la red original al cancelar todas las fuentes independientes de corriente y de voltaje<sup>9</sup> y con *las condiciones iniciales nulas*,  $\eta_o$ . Las fuentes dependientes no se modifican. La figura 15, aclara esta idea.

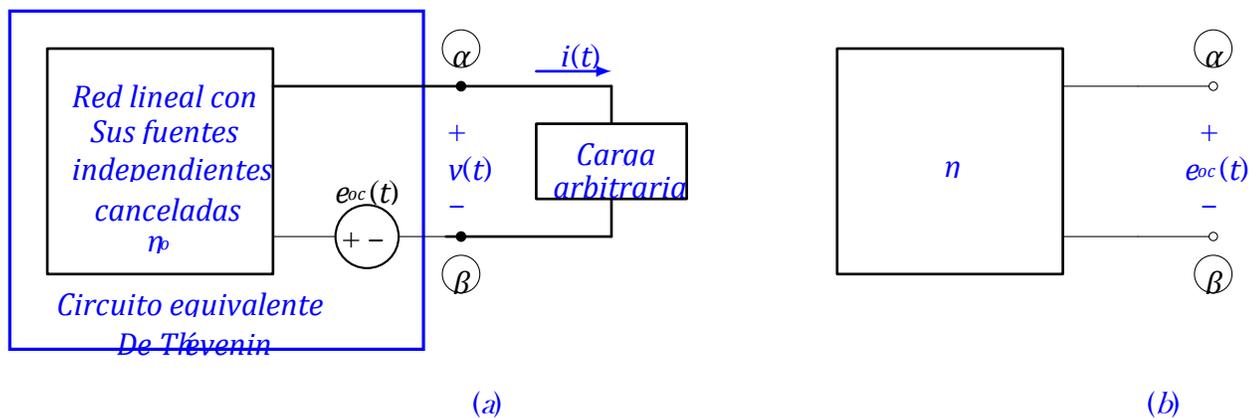


Figura 15. (a) Circuito eléctrico equivalente de Thevenin. (b) Voltaje de circuito abierto  $e_{oc}(t)$ .

El valor de la fuente independiente de voltaje  $e_{oc}(t)$  es igual al voltaje entre los nodos  $\alpha$  y  $\beta$ , cuando se desconecta la carga arbitraria. Este voltaje  $e_{oc}(t)$  es causado por las fuentes independientes y las condiciones iniciales.

### Circuito equivalente de Norton

El circuito equivalente de Norton consiste de una fuente independiente de corriente  $i_{sc}(t)$  en paralelo con una red eléctrica que se obtiene de la red original al cancelar todas las fuentes independientes de

<sup>9</sup> Las fuentes independientes de voltaje se sustituyen por *corto-circuitos* y las fuentes independientes de corriente se sustituyen por *circuitos-abiertos*.

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos.</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	82/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de Circuitos Eléctricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

corriente y de voltaje y con *las condiciones iniciales nulas,  $\eta_0$* . Las fuentes dependientes no se modifican. La figura 16, esclarece esta idea.

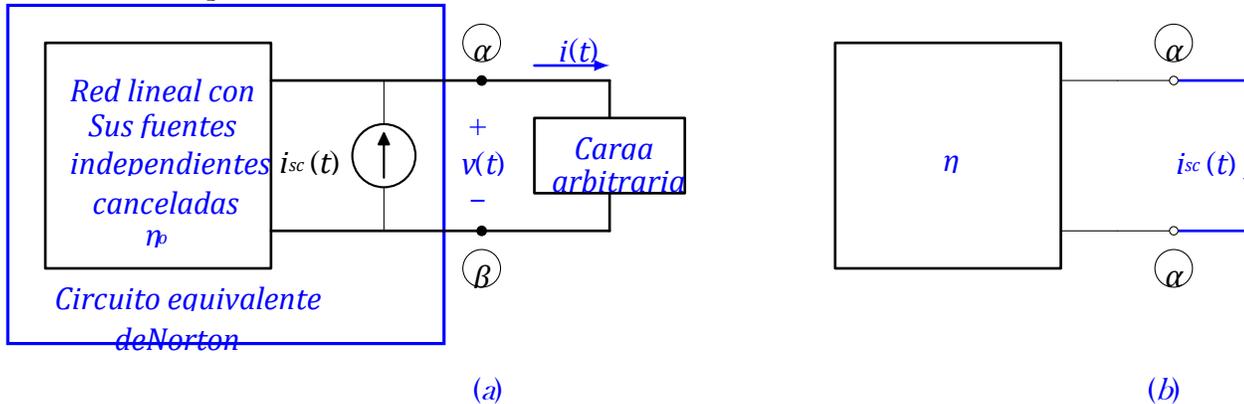


Figura 16. (a) Circuito eléctrico equivalente de Norton. (b) Corriente de corto circuito  $i_{sc}(t)$ .

El valor de la fuente independiente de corriente  $i_{sc}(t)$  es igual a la corriente eléctrica que circula entre los nodos  $\alpha$  y  $\beta$ , cuando se *cortocircuita* la carga arbitraria. Esta corriente  $i_{sc}(t)$  es causado por las fuentes independientes y las condiciones iniciales.

Es importante subrayar que sobre la carga arbitraria no se ha hecho ninguna suposición, a excepción de que no hay ningún tipo de acoplamiento entre ella y la red eléctrica lineal. Lo anterior implica que la carga arbitraria puede ser lineal o no lineal, variante o invariante en el tiempo.

### Prueba del teorema

A continuación se demuestra únicamente el teorema correspondiente al equivalente de Norton. El teorema de Thevenin se demuestra de manera semejante.

El primer paso consiste en sustituir las condiciones iniciales por fuentes independientes. Un capacitor con voltaje inicial se puede sustituir por un capacitor descargado en serie con una fuente independiente de voltaje de valor igual al voltaje inicial y una inductancia con corriente eléctrica inicial se puede sustituir por una inductancia con corriente eléctrica inicial nula en paralelo con una fuente independiente de corriente de valor igual al de la corriente inicial.

Aplicando el teorema de sustitución, la carga arbitraria de la figura 14 se sustituye por una fuente independiente de voltaje de valor igual a  $v(t)$ , como se muestra en la figura 17.

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos.</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	83/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de Circuitos Eléctricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

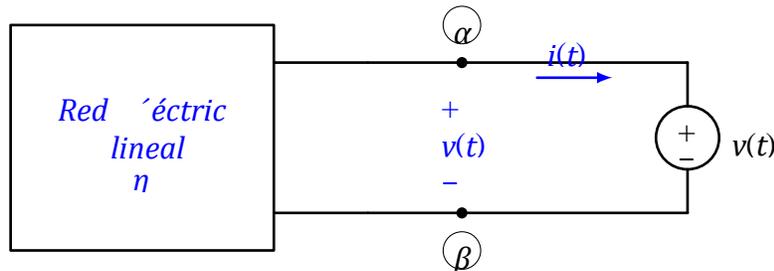


Figura 17. Red eléctrica para demostrar el teorema de Norton.

La corriente eléctrica  $i(t)$ , en la figura 17, se puede considerar *la respuesta de estado cero* producida por dos conjuntos de fuentes independientes, a saber: la fuente independiente de voltaje que sustituye a la carga arbitraria y las fuentes independientes de la red eléctrica lineal.

Como la red eléctrica que resulta es también lineal, la corriente eléctrica  $i(t)$  se puede determinar empleando el teorema de superposición.

Una componente es la corriente eléctrica  $i_o(t)$  debida a la fuente de voltaje  $v(t)$ , cuando se cancelan las fuentes independientes y las condiciones iniciales de la red eléctrica lineal; se obtiene mediante la expresión siguiente

$$i_o(t) = \int_0^t h(t, \tau) v(\tau) d\tau \quad (14)$$

Donde  $h(t, \tau)$  es la respuesta al impulso de la red eléctrica lineal, esto es, la respuesta de la red en el tiempo  $t$  cuando se aplica un impulso unitario en el tiempo  $\tau$ , con sus fuentes independiente canceladas.

La otra componente es la corriente eléctrica debida a las fuentes independientes de la red eléctrica lineal al cancelar la fuente independiente de voltaje  $v(t)$  de la figura 17 es  $i_{cc}(t)$ . Por consiguiente, la corriente eléctrica total  $i(t)$  es la suma de  $i_o(t)$  e  $i_{cc}(t)$ , o sea

$$i(t) = i_o(t) + i_{cc}(t) = \int_0^t h(t, \tau) v(\tau) d\tau + i_{cc}(t) \quad (15)$$

Al sustituir la red lineal de la figura 14 por su circuito equivalente de Norton, el resultado se muestra en la figura 18

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos.</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	84/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de Circuitos Eléctricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

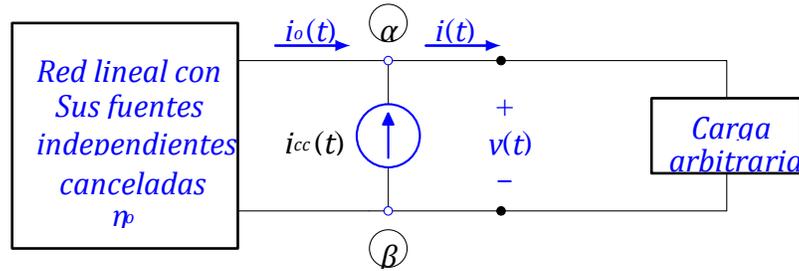


Figura 18. Circuito eléctrico equivalente de Norton y carga arbitraria.

Al aplicar la primera ley de Kirchhoff en el nodo  $\alpha$  resulta

$$i(t) = i_o(t) + i_{cc}(t) = \int_0^t h(t, \tau)v(\tau)d\tau + i_{cc}(t)$$

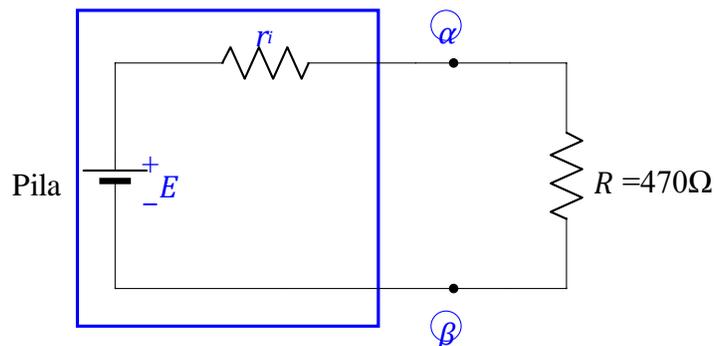
(16)

La ecuación (16) es idéntica a la (15), por lo que queda demostrada la validez del teorema.

## Desarrollo

### Experimento 1

Construya el circuito eléctrico que se muestra en la figura 19.



	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos.</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	85/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de Circuitos Eléctricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

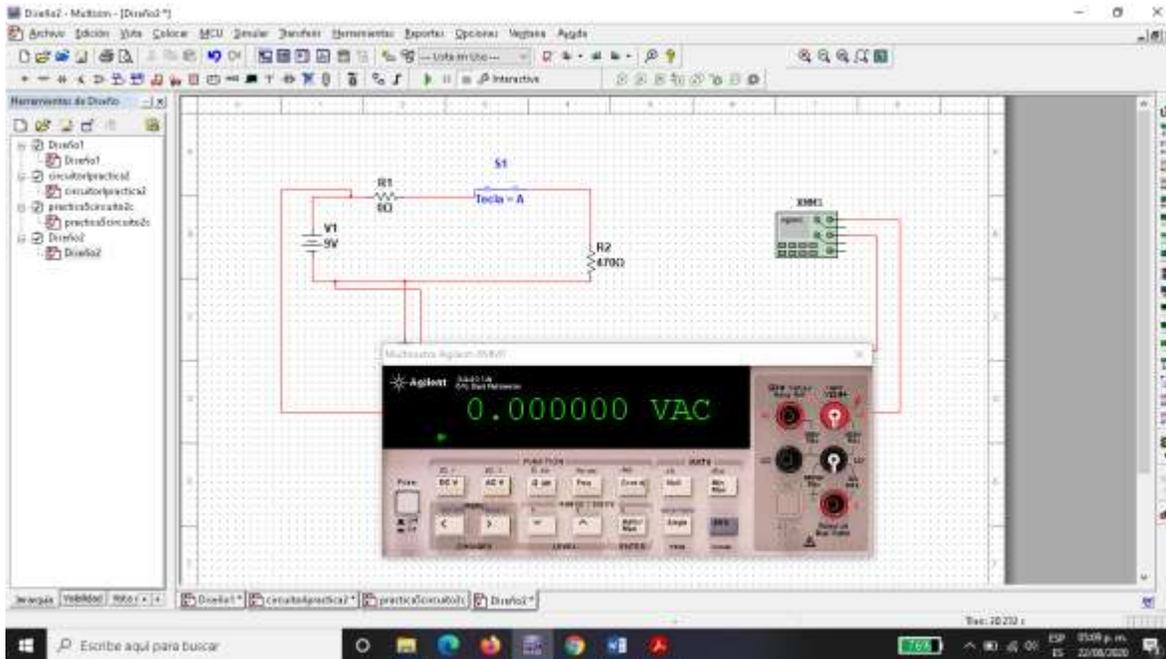


Figura 19. Red eléctrica para determinar el circuito equivalente de Thevenin de una pila.

- Mida el voltaje entre los nodos  $\alpha$  y  $\beta$ ,  $v_{\alpha\beta} = v_R$ .
- Desconecte el resistor  $R$  y mida el voltaje entre los nodos  $\alpha$  y  $\beta$ ,  $v_{\alpha\beta} = E$ .
- Con la siguiente expresión, encuentre el valor de la resistencia interna de la pila,  $r_i$ .

$$v_R = \frac{R}{r_i + R} E$$

- Sustituya el resistor de  $470 \Omega$  por otro de  $100 \Omega$  y repita los incisos los a), b) y c).
- Determine los circuitos equivalentes de Thévenin y Norton de la pila.

## Experimento 2

Construya el circuito eléctrico que se muestra en la figura 20.

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos.</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	86/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de Circuitos Eléctricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

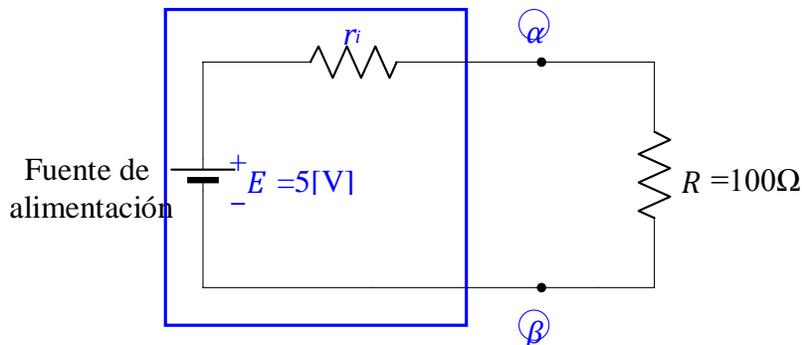


Figura 20. Red eléctrica para determinar el circuito equivalente de Thevenin de una pila.

- Mida el voltaje entre los nodos  $(\alpha)$  y  $(\beta)$ ,  $v_{\alpha\beta} = v_R$ .
- Desconecte el resistor  $R$  y mida el voltaje entre los nodos  $(\alpha)$  y  $(\beta)$ ,  $v_{\alpha\beta} = E$ .
- Determine los circuitos equivalentes de Thévenin y Norton de la fuente de alimentación.

### Equipo necesario

- 1 Fuente de alimentación
- 1 Multímetro

### Material necesario

- 1 Pila de 9[V]
- 1 Resistor de  $100\Omega$ , 0.5 watt
- 1 Resistor de  $470\Omega$ , 0.5 watt

### Cuestionario previo

De la red eléctrica lineal e invariante en el tiempo,  $\eta$ , constituida por fuentes independientes de voltaje de  $cd$  y resistores, se conoce la información que se muestra en la figura 21.

- Determine su circuito equivalente de Thevenin.
- Determine su circuito equivalente de Norton.
-

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos.</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	87/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de Circuitos Eléctricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

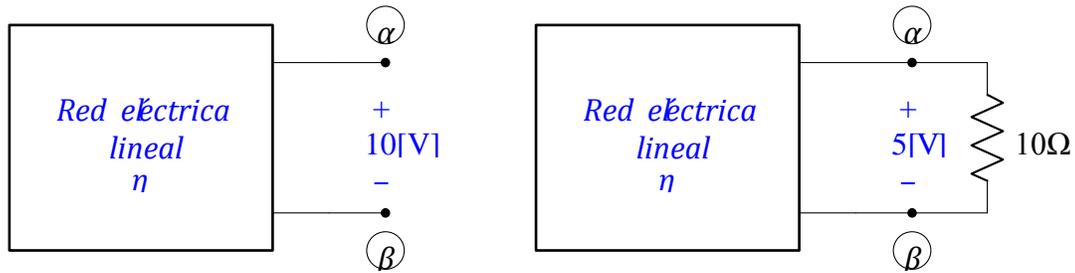


Figura 21. Red eléctrica  $\eta$  lineal e invariante en el tiempo

## Teorema de Reciprocidad

El teorema de reciprocidad tiene una aplicación más restringida, pues sólo se destina a redes eléctricas de parámetros concentrados, lineales e invariantes en el tiempo y que no contengan fuentes independientes ni dependientes y tampoco *giradores*<sup>10</sup>.

El quid fundamental del teorema es que cuando se aplica a un sistema físico, la entrada y la salida se pueden intercambiar *sin que se modifique la respuesta del sistema* para una señal de entrada dada. La línea telefónica constituye el paradigma de lo anterior.

Considere una red eléctrica lineal e invariante en el tiempo, constituida por resistores, inductores, inductores acoplados, capacitores y transformadores. Se acostumbra, emplear el símbolo  $\eta_R$  para designar a las redes que satisfacen estas condiciones.

1. Aserción. Considere las configuraciones de redes eléctricas que se muestran en la figura 22.

<sup>10</sup> Inversor de impedancia positivo, esto es, si,  $Z_L$  es la impedancia de la carga, entonces  $Z_{entrada} = \alpha^2/Z_L$ .

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos.</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	88/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de Circuitos Eléctricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

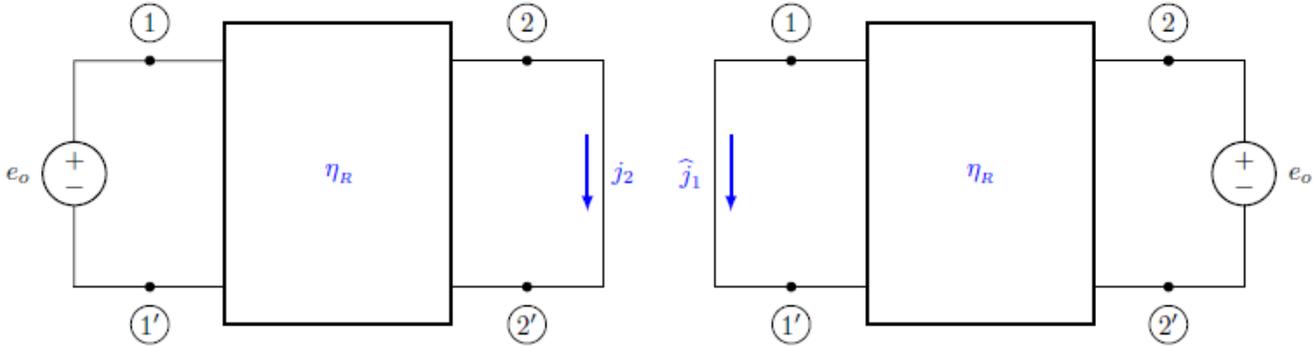


Figura 22. Primer aserto del teorema de reciprocidad.

El teorema de reciprocidad afirma que para cualquier topología y valores de los elementos de la red eléctrica  $\eta_R$  que lo constituyen y para toda forma de onda de la fuente independiente de voltaje  $e_o$ , las corrientes eléctricas de corto circuito

$$j_2(t) = \widehat{j}_1(t) \forall t$$

En términos de la función de transferencia

$$Y_{21}(s) \triangleq \frac{J_2(s)}{E_o(s)} = Y_{12}(s) \triangleq \frac{\widehat{J}_1(s)}{E_o(s)}$$

2. Aserción. Considere las configuraciones de redes eléctricas que se muestran en la figura 23

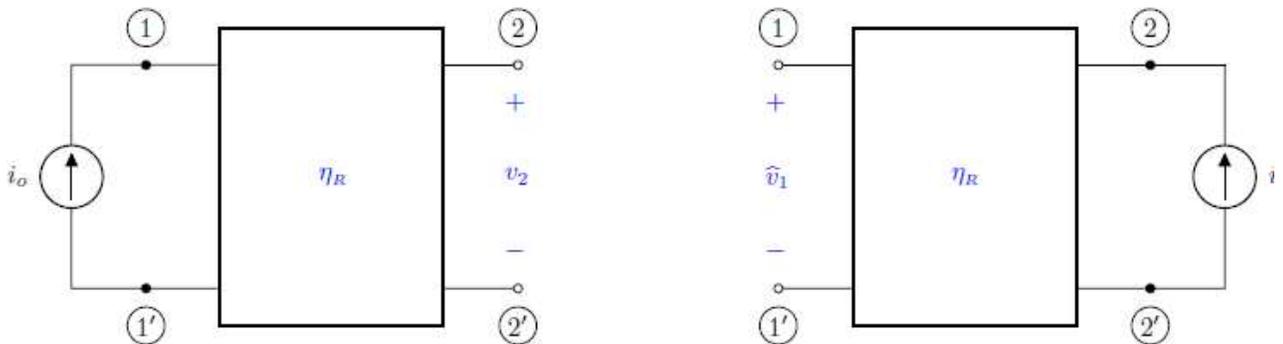


Figura 23. Segundo aserto del teorema de reciprocidad.

<sup>3</sup>Inversor de impedancia positivo, esto es, si,  $Z_L$  es la impedancia de la carga, entonces  $Z_{entrada} = \alpha^2/Z_L$ .

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos.</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	89/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de Circuitos Eléctricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

El teorema de reciprocidad asiente que para cualquier topología y valores de los elementos de la red eléctrica  $\eta_R$  que lo constituyen y para toda forma de onda de la fuente independiente de corriente  $i_o$ , los voltajes de circuito abierto

$$v_2(t) = \hat{v}_1(t) \quad \forall t$$

De igual manera, en términos de la función de transferencia

$$Z_{21}(s) \triangleq \frac{V_2(s)}{I_o(s)} = Z_{12}(s) \triangleq \frac{\hat{V}_1(s)}{I_o(s)}$$

3. Aserción. Considere las configuraciones de redes eléctricas que se muestran en la figura 24

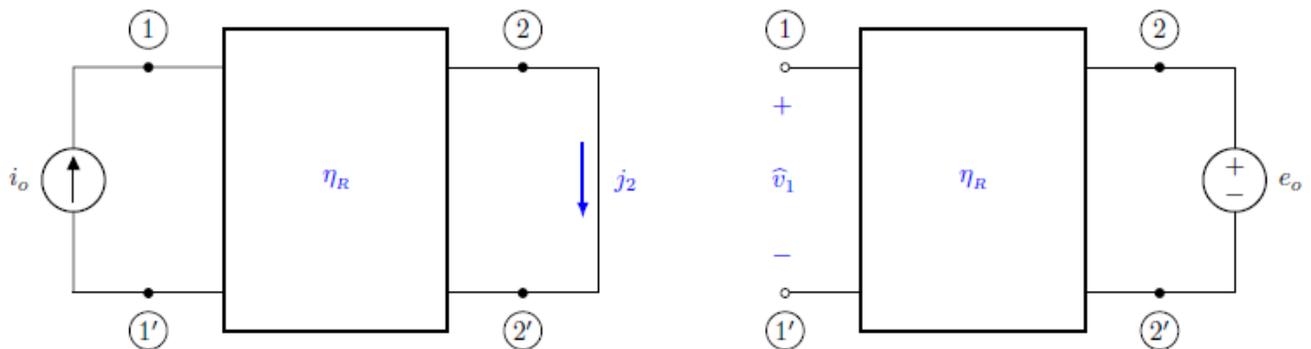


Figura 24. Tercer aserto del teorema de reciprocidad.

El teorema de reciprocidad sostiene que para cualquier topología y valores de los elementos de las redes eléctricas  $\eta_R$  que lo constituyen y para toda forma de onda de las fuentes independientes, si  $i_o(t)$  y  $e_o(t)$  son iguales para todo  $t$ , entonces

$$j_2(t) = \hat{v}_1(t) \quad \forall t$$

En términos de la función de transferencia

$$H_i(s) \triangleq \frac{J_2(s)}{I_o(s)} = H_v(s) \triangleq \frac{\hat{V}_1(s)}{E_o(s)}$$

### Prueba del teorema

Este teorema se valida con el auxilio del teorema de Tellegen. De acuerdo a las configuraciones planteadas por el teorema y considerando direcciones de referencia asociadas, es obvio que

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos.</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	90/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de Circuitos Eléctricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

$$V_1(s)\widehat{J}_1(s) + V_2(s)\widehat{J}_2(s) + \sum_{k=3}^b V_k(s)\widehat{J}_k(s) = 0 \quad (17)$$

y

$$\widehat{V}_1(s)J_1(s) + \widehat{V}_2(s)J_2(s) + \sum_{k=3}^b \widehat{V}_k(s)J_k(s) = 0 \quad (18)$$

Si la  $k$ -ésima rama de la red eléctrica es un resistor, un capacitor o un inductor, entonces es cierto que

$$V_k(s)\widehat{J}_k(s) = J_k(s)Z_k(s)\widehat{J}_k(s) = J_k(s)\widehat{V}_k \quad (19)$$

donde  $Z_k(s)$  es la impedancia de la  $k$ -ésima rama. Si las ramas  $m$  y  $n$  fueran dos inductores acoplados o las ramas de un transformador ideal, entonces

$$V_m(s)\widehat{J}_m(s) + V_n(s)\widehat{J}_n(s) = \widehat{V}_m(s)J_m(s) + \widehat{V}_n(s)J_n(s) \quad (20)$$

Teniendo presente las ecuaciones (19) y (20), se puede inferir que las sumas de las ecuaciones (17) y (18) son iguales y por consiguiente

$$V_1(s)\widehat{J}_1(s) + V_2(s)\widehat{J}_2(s) = \widehat{V}_1(s)J_1(s) + \widehat{V}_2(s)J_2(s) \quad (21)$$

1. Aserción. En la primera condición,  $V_1(s) = E_o(s)$  y  $V_2(s) = 0$ . En la segunda condición  $\widehat{V}_2(s) = E_o(s)$  y  $\widehat{V}_1(s) = 0$ . Así, de la ecuación (21) se tiene

$$E_o(s)\widehat{J}_1(s) = E_o(s)J_2(s)$$

2. Aserción. En la primera condición,  $J_1(s) = -I_o(s)$  y  $J_2(s) = 0$ . En la segunda condición  $\widehat{J}_2(s) = -I_o(s)$  y  $\widehat{J}_1(s) = 0$ . Así, de la ecuación (21) se tiene

$$-V_2(s)I_o(s) = -\widehat{V}_1(s)I_o(s)$$

3. Aserción. En la primera condición,  $J_1(s) = -I_o(s)$  y  $V_2(s) = 0$ . En la segunda condición  $\widehat{V}_2(s) = E_o(s)$  y  $\widehat{J}_1(s) = 0$ . Así, de la ecuación (21) se tiene

$$\frac{\widehat{V}_1(s)}{E_o(s)} = \frac{J_2(s)}{I_o(s)}$$

## Desarrollo

### Experimento 1

Construya el circuito eléctrico que se muestra en la figura 25



**Manual de prácticas del  
Laboratorio de Circuitos  
Eléctricos.**

Código:

MADO-77

Versión:

01

Página

91/96

Sección ISO

8.3

Fecha de  
emisión

28 de enero de 2019

Facultad de Ingeniería

Área/Departamento:  
Laboratorio de Circuitos Eléctricos

La impresión de este documento es una copia no controlada

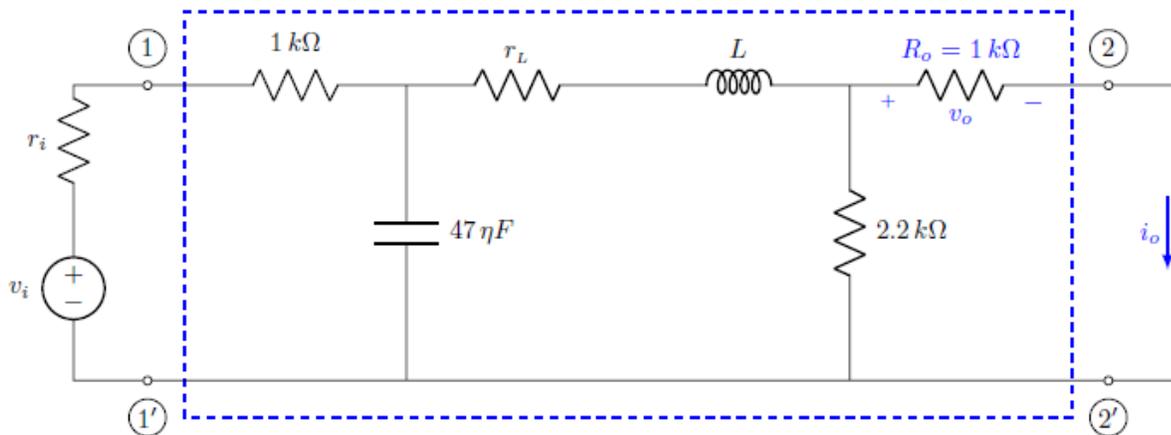
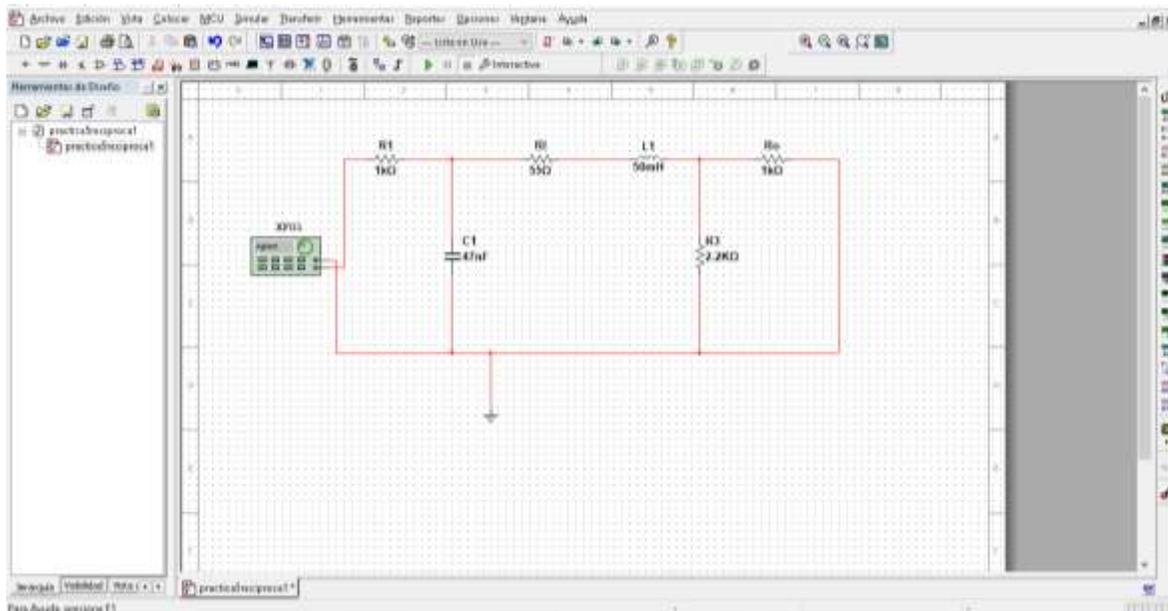


Figura 25. Circuito eléctrico recíproco.





**Manual de prácticas del  
Laboratorio de Circuitos  
Eléctricos.**

Código:	MADO-77
Versión:	01
Página	92/96
Sección ISO	8.3
Fecha de emisión	28 de enero de 2019

Facultad de Ingeniería

Área/Departamento:  
Laboratorio de Circuitos Eléctricos

La impresión de este documento es una copia no controlada

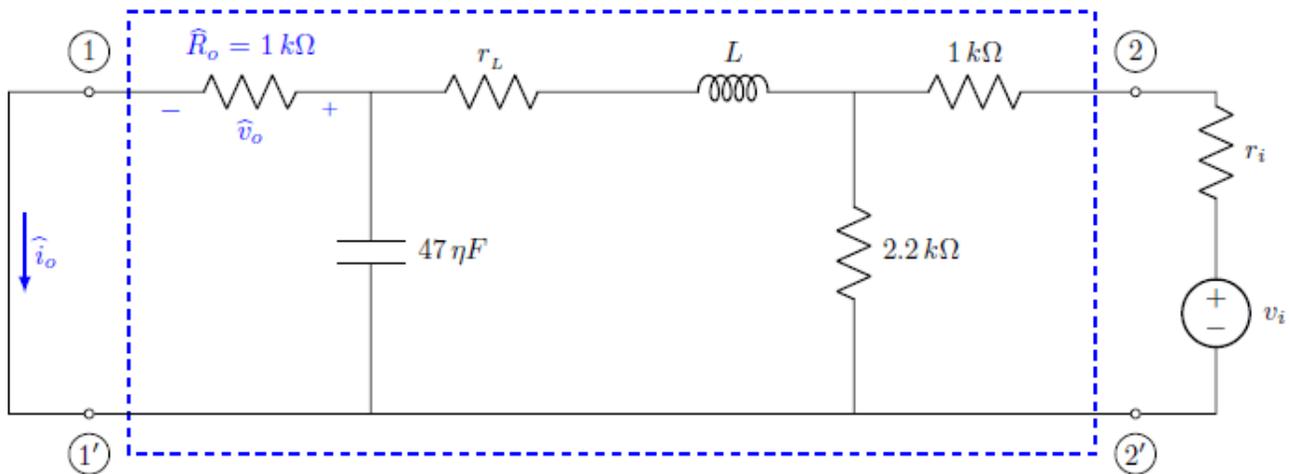
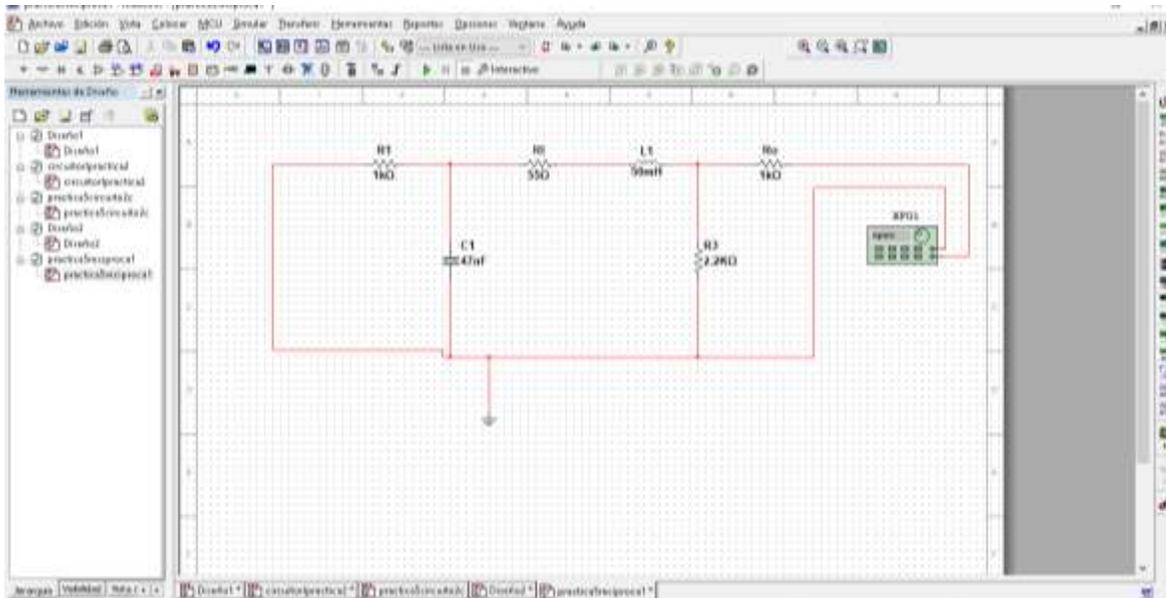


Figura 26. Circuito eléctrico recíproco.

$$\text{Con } V_i = \frac{6}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ \text{ y } \omega = 4000 \pi \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$





**Manual de prácticas del  
Laboratorio de Circuitos  
Eléctricos.**

Código:	MADO-77
Versión:	01
Página	93/96
Sección ISO	8.3
Fecha de emisión	28 de enero de 2019

Facultad de Ingeniería

Área/Departamento:  
Laboratorio de Circuitos Eléctricos

La impresión de este documento es una copia no controlada

1. Mida el voltaje  $v_o$  en  $R_o$  y calcule el valor de la corriente eléctrica  $i_o$ .
2. A continuación construya el circuito eléctrico de la figura 26.
3. Mida el voltaje  $\hat{v}_o$  en  $\hat{R}_o$  y calcule el valor de la corriente eléctrica  $\hat{i}_o$ .
4. De las lecturas obtenidas en los incisos *a)* y *b)* anteriores. ¿Qué concluye?

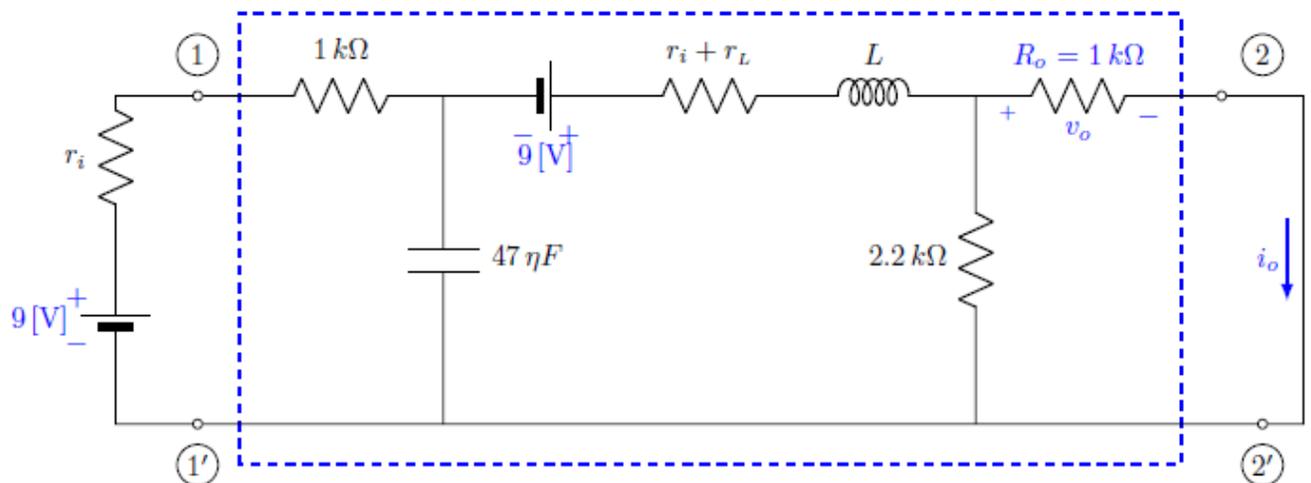


Figura 27. Circuito eléctrico no recíproco.

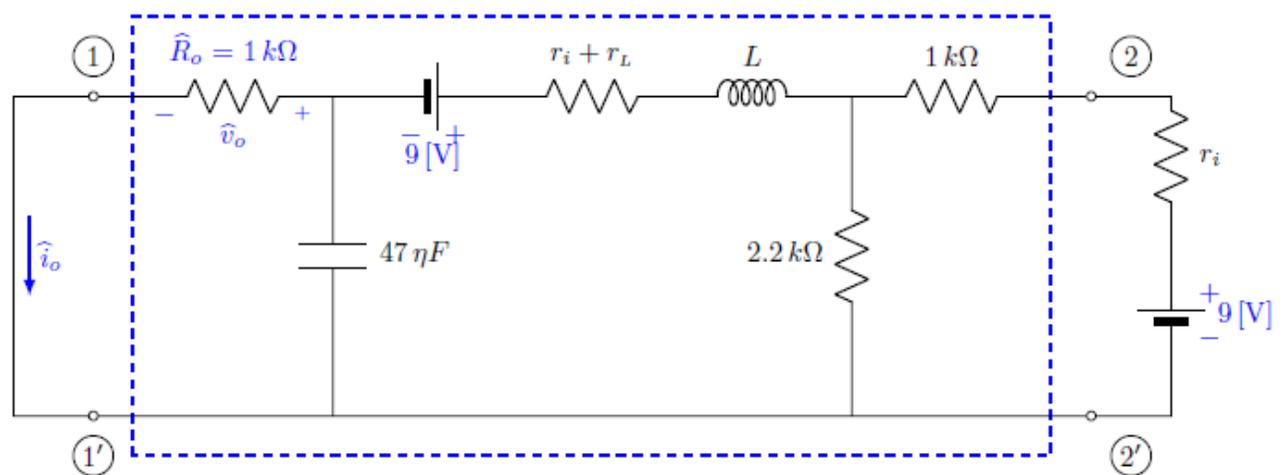


Figura 28. Circuito eléctrico no recíproco.



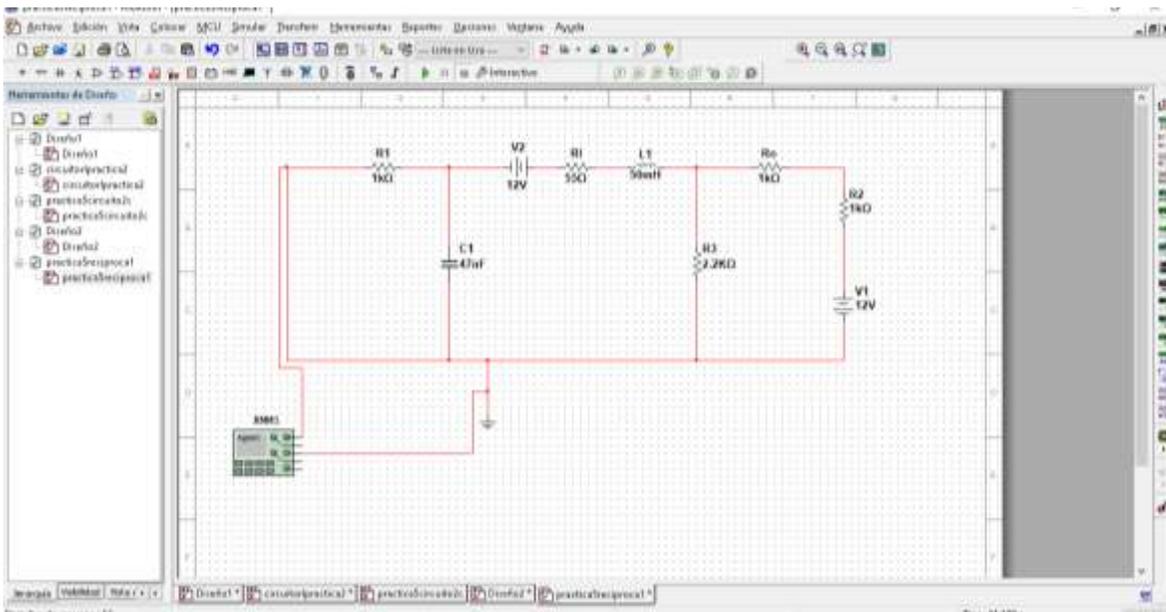
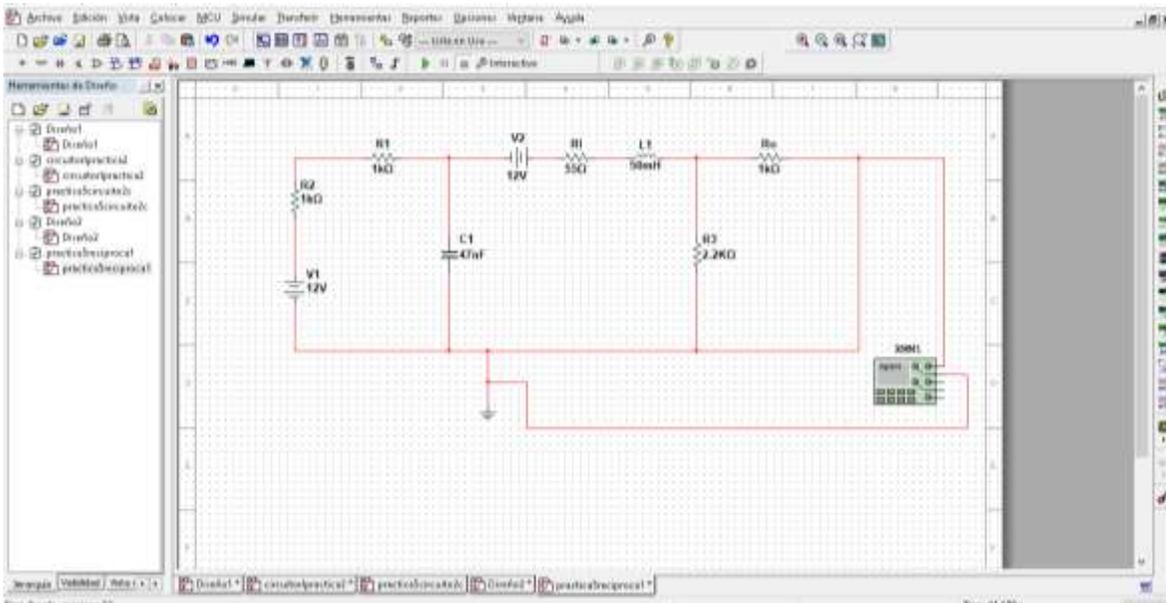
## Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos.

Código:	MADO-77
Versión:	01
Página	94/96
Sección ISO	8.3
Fecha de emisión	28 de enero de 2019

Facultad de Ingeniería

Área/Departamento:  
Laboratorio de Circuitos Eléctricos

La impresión de este documento es una copia no controlada



## Experimento 2

Construya el circuito eléctrico que se muestra en la figura 27.

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos.</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	95/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de Circuitos Eléctricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

a) Mida el voltaje  $v_o$  en  $R_o$  y calcule el valor de la corriente eléctrica  $\hat{i}_o$ .

A continuación construya el circuito eléctrico de la figura 28.

b) Mida el voltaje  $\hat{v}_o$  en  $R_o$  y calcule el valor de la corriente eléctrica  $i_o$ .

c) De las lecturas obtenidas en los incisos a) y b) anteriores. ¿Qué concluye?

### Equipo necesario

- 1 Solenoide
- 1 Generador de funciones
- 1 Multímetro

### Material necesario

- 2 Pilas de 9[V]
- 2 Resistor de  $1k\Omega$ , 0.5 watt
- 1 Resistor de  $2.2k\Omega$ , 0.5 watt
- 1 Capacitor de  $47\eta F$

### Cuestionario previo

1. Determine en el circuito eléctrico de la figura 27 la corriente eléctrica  $i_o$ .
2. Determine en el circuito eléctrico de la figura 28 la corriente eléctrica  $\hat{i}_o$ .
3. ¿Por qué el circuito eléctrico de la figura 27 o 28, se dice que no es recíproco, es decir, que no satisface el teorema de reciprocidad? Explique.
4. Del circuito eléctrico recíproco que se presenta en la figura 29, se tiene la siguiente información, cuando:

$$v_{s1} = 50 [V] \text{ y } v_{s2} = 100 [V] \text{ entonces } i_1 = -1 [A] \text{ e } i_2 = 27 [A]$$

$$v_{s1} = 100 [V] \text{ y } v_{s2} = 50 [V] \text{ entonces } i_1 = 7 [A] \text{ e } i_2 = 24$$

$$[A]$$

Encuntre los valores de  $i_1$  e  $i_2$  si  $v_{s1} = 200 [V]$  y  $v_{s2} = 0 [V]$ .

	<b>Manual de prácticas del Laboratorio de Circuitos Eléctricos.</b>	Código:	MADO-77
		Versión:	01
		Página	96/96
		Sección ISO	8.3
		Fecha de emisión	28 de enero de 2019
Facultad de Ingeniería		Área/Departamento: Laboratorio de Circuitos Eléctricos	
La impresión de este documento es una copia no controlada			

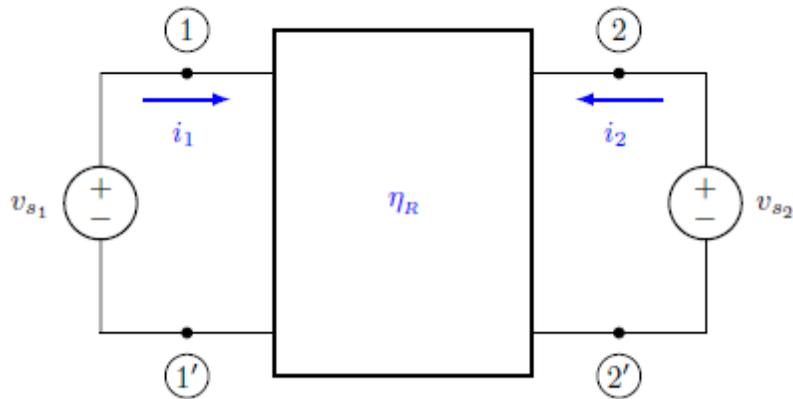


Figura 29. Circuito eléctrico recíproco.

## Bibliografía

- Desoer, C. A. and Kuh, E.S. *Basic Circuit Theory*. New York: McGraw-Hill Company, 1969.
- Dorf, R. C., Svoboda, J. A. *Circuitos Eléctricos*. México, D. F.: Alfaomega Grupo Editor, S. A. de C. V., 2011.
- Hayt, W. H., Kemmerly, J. E. *Análisis de circuitos eléctricos en ingeniería*. México: Mc Graw Hill, 2007.
- Sears, F. W. *Fundamentos de Física II. Electricidad y Magnetismo*. Madrid, España: Aguilar, S. A. de Ediciones, 1970.
- Johnson, D. E., Hilburn, J. L., Johnson, J. R. *Basic Electric Circuit Analysis*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1986.
- Huelsman, L. P., Allen, P. E. *Introduction to the theory and design of active filters*. USA: McGraw-Hill Book Company, 1980.