CURSO DE
SISTEMAS Y SEÑALES

Elaborado por:
Edgar Tello Paleta

OBJETIVO

Aprender las técnicas fundamentales para la comprensión y el análisis de los sistemas lineales que se encuentran en el campo de las comunicaciones, el procesamiento de datos y el control.

TEMARIO

1. Señales y sistemas
2. Sistemas lineales e invariantes en el tiempo (LTI)
3. Análisis de sistemas LTI, continuos y discretos, mediante las transformaciones de Laplace y Z.
4. Fundamentos de modelado de sistemas físicos.
5. Características dinámicas de los sistemas LTI.
6. Respuesta en frecuencia.

EVALUACIÓN

$$CS = 0.9(CE) + 0.1(CL)$$

CA = CS para alumnos exentos con $CS \geq 8.0$

Los alumnos no exentos o que quieran mejorar su CA

$$CA = CEF1$$

Y en caso de no aprobar el primer examen final

$$CA = CEF2$$

CS: Calificación del semestre
CE: Calificación en exámenes
CL: Calificación del laboratorio

CA: Calificación en actas
CEF1: Calif. 1er final
CEF2: Calif 2do final

EVALUACIÓN

Escala de Calificación en Acta (CA)

$$6.0 \leq 6 < 6.5$$
$$6.5 \leq 7 < 7.5$$
$$7.5 \leq 8 < 8.5$$
$$8.5 \leq 9 < 9.5$$
$$9.5 \leq 10 \leq 10$$

Habrá dos exámenes parciales:

1er. Parcial: correspondiente a los temas 1, 2 y 3

2er. Parcial: correspondiente a los temas 4, 5 y 6

BIBLIOGRAFÍA PRINCIPAL

OPPENHEIM, A. V., et al.
Señales y Sistemas
México
Prentice Hall Hispanoamericana, 1998

RODRÍGUEZ RAMÍREZ, Francisco
Dinámica de sistemas
México
Trillas, 1994

1. SISTEMAS Y SEÑALES

Señales continuas, discretas y digitales

En general, una señal es una función de una o más variables independientes que transporta información. Por ejemplo se tienen:

- Señales eléctricas: variaciones de voltajes y corrientes en un circuito eléctrico en función del tiempo.
- Señal sonora: variación de presión acústica en función del tiempo.
- Señales de velocidad, fuerza, temperatura, presión, humedad, etc.
- Señal de video monocromático: variación de intensidad (brillo) en función de dos variables espaciales (en cada imagen fija) y el tiempo (al ir cambiando cada imagen fija).

Este curso se enfoca en señales de 1 sola variable independiente que se denominará "tiempo". Por su representación matemática se tienen:

Señales de tiempo continuo

Se representan mediante funciones reales (o complejas) de variable real. Por ejemplo:

$$x(t) = e^{-t}\cos(t)\,, \qquad t \in \mathbb{R}$$

Señales de tiempo discreto (o secuencias)

Se representan mediante funciones reales (o complejas) de variable entera. Por ejemplo:

$$x[n] = 0.5^{n}\cos(n)\,, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Señales digitales

Una señal digital $x_b[n]$ es una versión cuantizada y codificada de una secuencia $x[n]$. En la señal digital los valores de $x[n]$ se representan aproximadamente utilizando algún código binario.

Señales de tiempo discreto (secuencias)

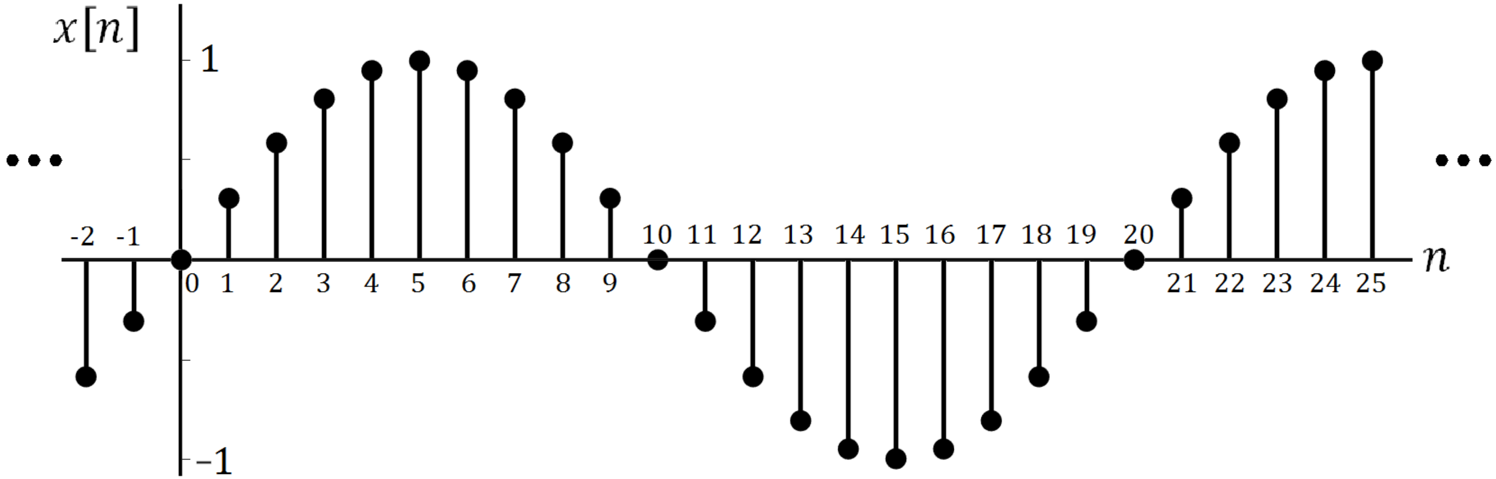
- Representación en forma cerrada: $x[n] = sen\left(\frac{2\pi}{20}n\right)$

- Representación como arreglo ordenado de números:

$$x[n] = \{\ldots,\ \underset{\uparrow}{x[0]},\ x[1],\ x[2],\ x[3],\ x[4],\ x[5], \ldots\}$$

$$\approx \{\ldots, \underset{\uparrow}{0.00},\ 0.31,\ 0.59,\ 0.81,\ 0.95,\ 1.00, \ldots\}$$

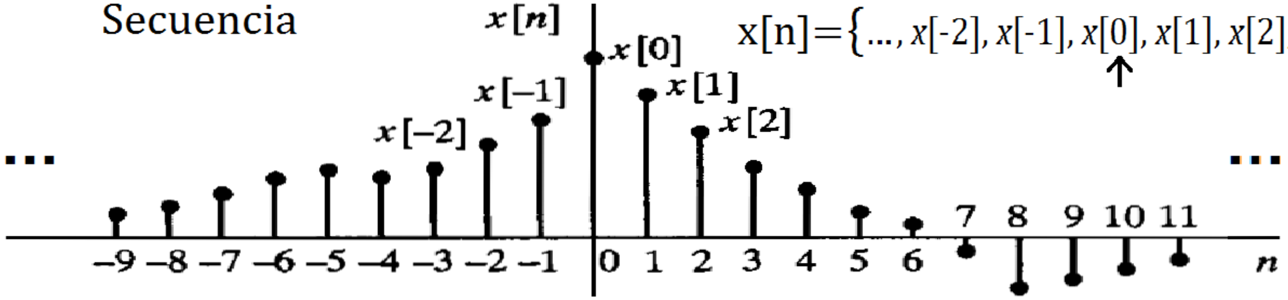
- Representación gráfica:



Señales de tiempo discreto (secuencias)

Secuencia

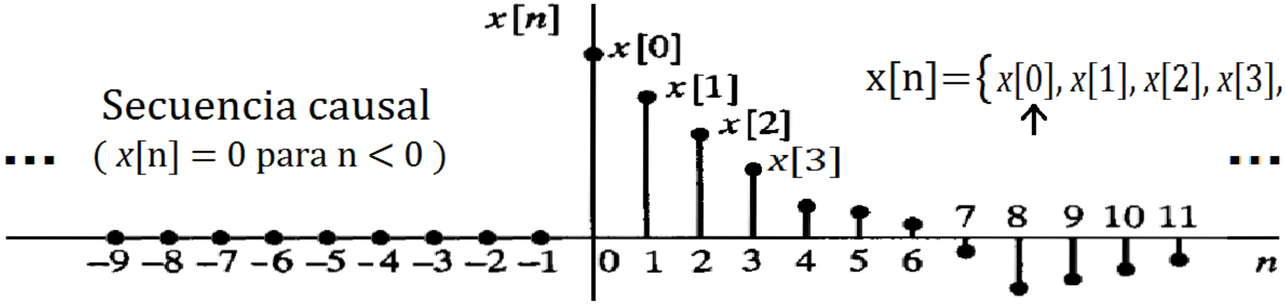
$x[n] = \{\ldots, x[-2], x[-1], \underset{\uparrow}{x[0]}, x[1], x[2], \ldots\}$



Secuencia causal

($x[n] = 0$ para $n < 0$)

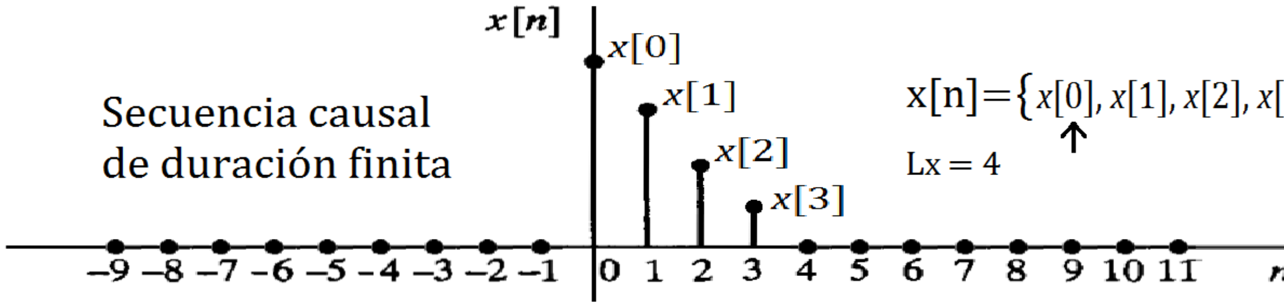
$x[n] = \{\underset{\uparrow}{x[0]}, x[1], x[2], x[3], \ldots\}$



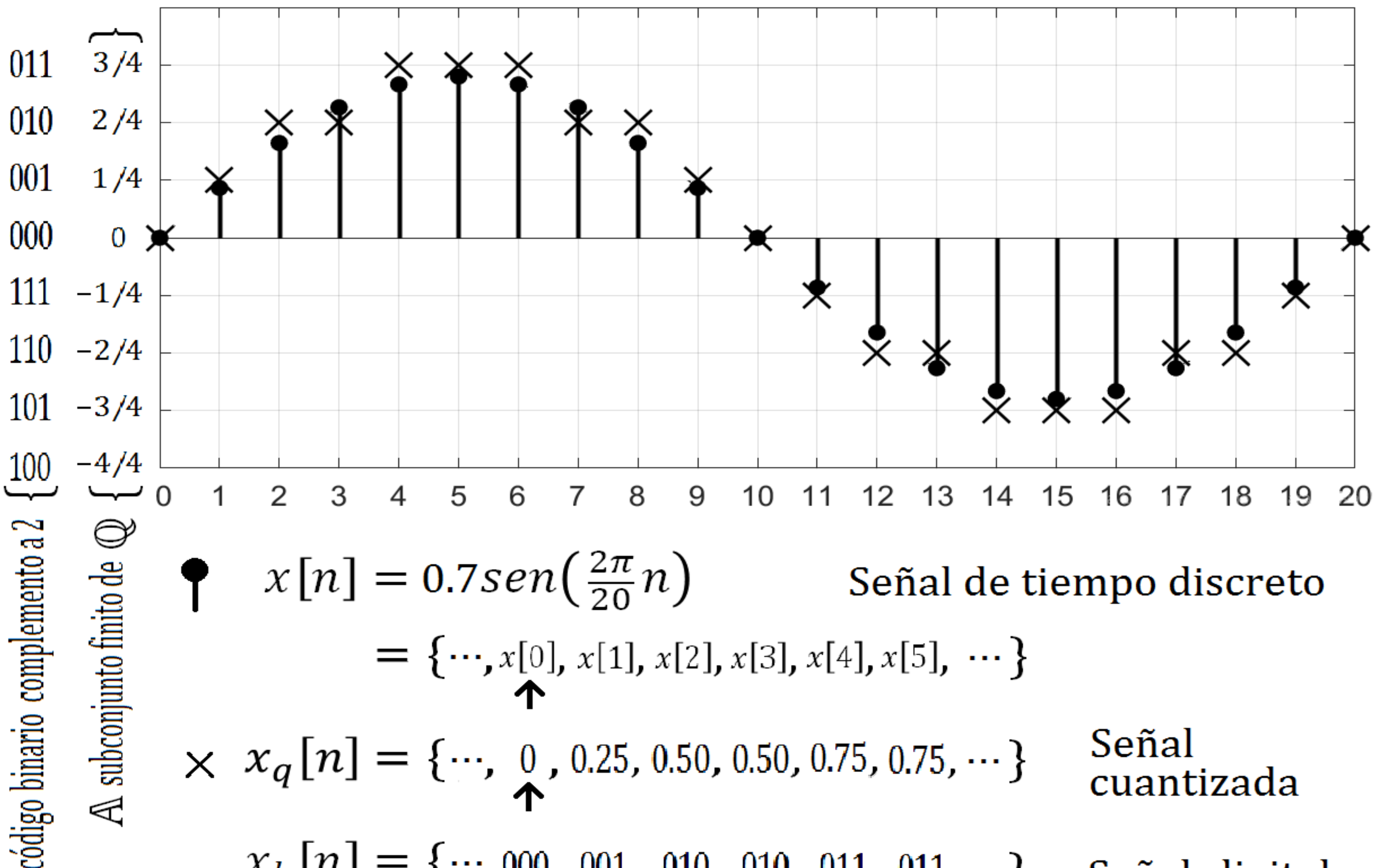
Secuencia causal
de duración finita

$x[n] = \{\underset{\uparrow}{x[0]}, x[1], x[2], x[3]\}$

$Lx = 4$



Ejemplo de señal de tiempo discreto y su correspondiente señal digital



$$x[n] = 0.7sen\left(\frac{2\pi}{20}n\right)$$ Señal de tiempo discreto

$$= \{\cdots, \underset{\uparrow}{x[0]}, x[1], x[2], x[3], x[4], x[5], \cdots\}$$

× $$x_q[n] = \{\cdots, \underset{\uparrow}{0}, 0.25, 0.50, 0.50, 0.75, 0.75, \cdots\}$$ Señal cuantizada

$$x_b[n] = \{\cdots, \underset{\uparrow}{000}, 001, 010, 010, 011, 011, \cdots\}$$ Señal digital

Señales periódicas y aperiódicas

- Una señal $x(t)$ es periódica con periodo T, si T es un número real positivo tal que

$$x(t+T) = x(t), \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

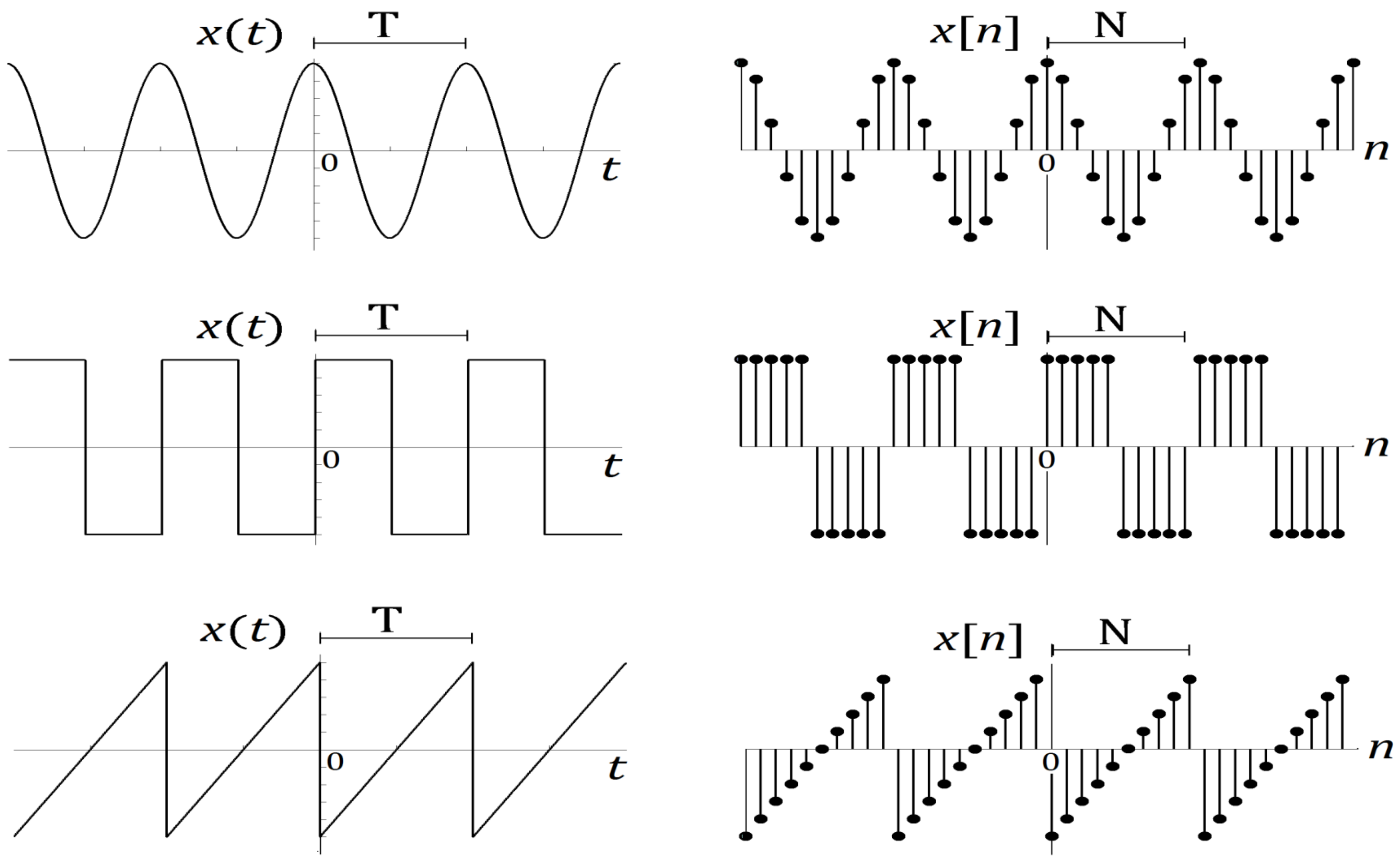
El periodo fundamental es el menor de los T.

- Una secuencia $x[n]$ es periódica con periodo N, si N es un núm. entero positivo tal que

$$x[n+N] = x[n], \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z}$$

El periodo fundamental es el menor de los N.

- Una señal o secuencia no periódica es aperiódica.



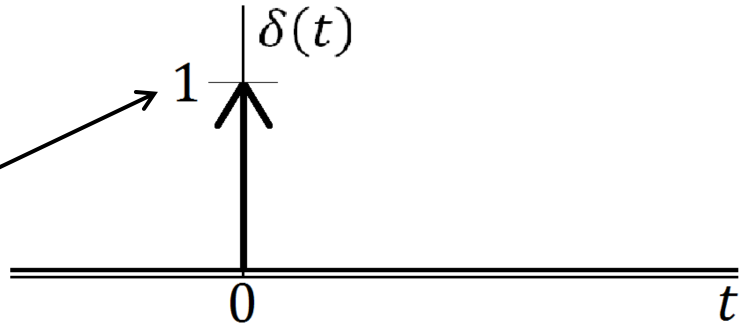
Ejemplos de señales y secuencias periódicas

Señales básicas de tiempo continuo (TC) y t discreto (TD)

Señal impulso unitario

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0\,, & t \neq 0 \end{cases}$$

con $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$

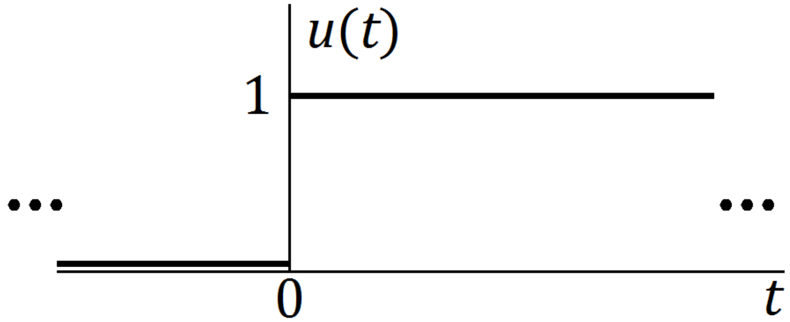


Propiedad de muestreo

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$$

Señal escalón unitario

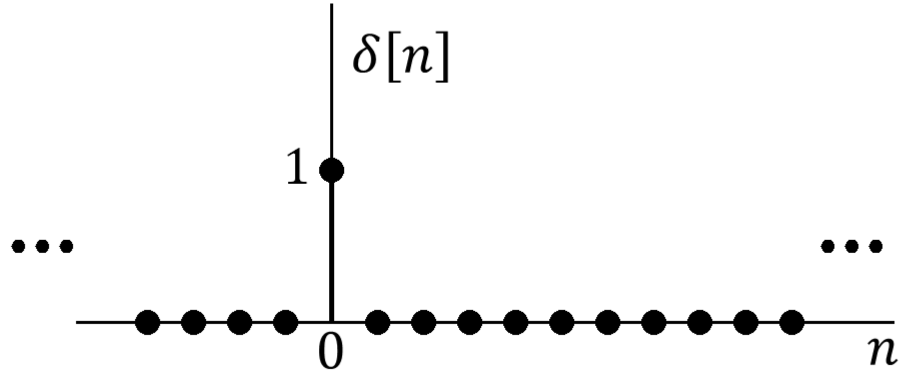
$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



Secuencia impulso unitario

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

$$= \{\underset{\uparrow}{1},0,0,0,\ldots\}$$



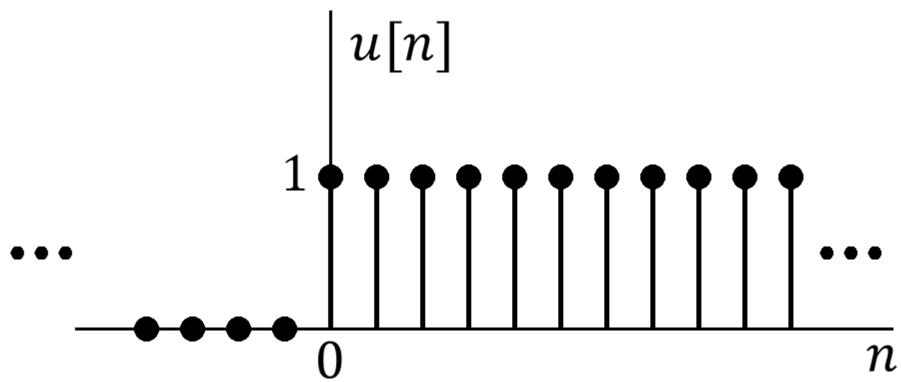
Propiedad de muestreo

$$x[n]\delta[n] = x[0]\delta[n]$$

Secuencia escalón unitario

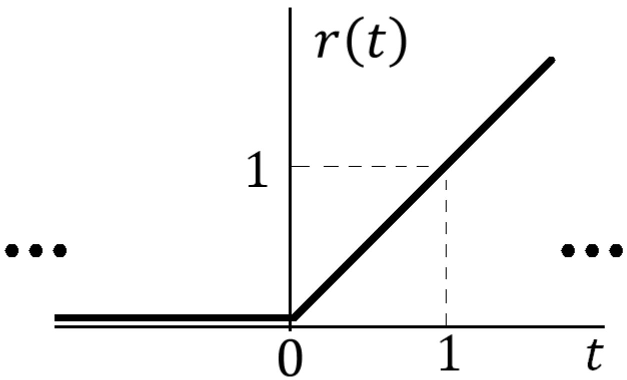
$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

$$= \{\underset{\uparrow}{1},1,1,1,\ldots\}$$



Señal rampa unitaria

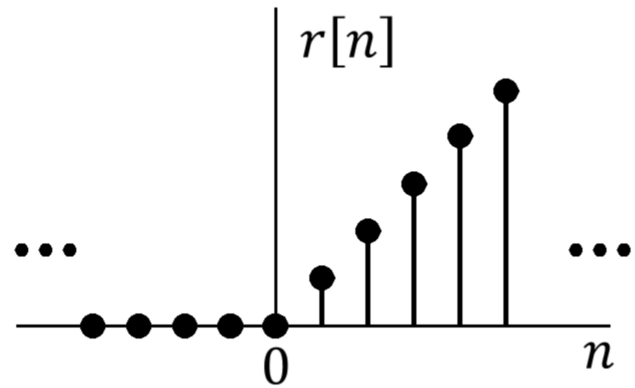
$$r(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



Secuencia rampa unitaria

$$r[n] = \begin{cases} n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

$$= \{\underset{\uparrow}{0},1,2,3,4,5,\ldots\}$$

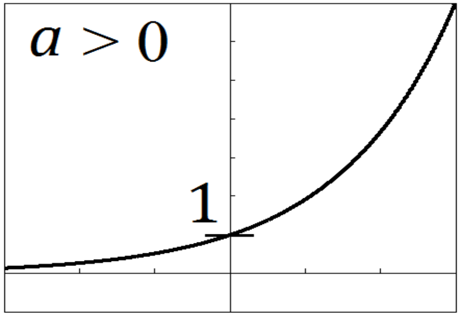


Señal exponencial real

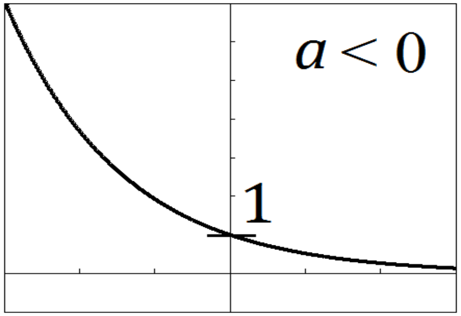
$$x(t) = e^{at}$$

Donde $a \in \mathbb{R}$ diferente de cero.

$a > 0$: exponencial creciente

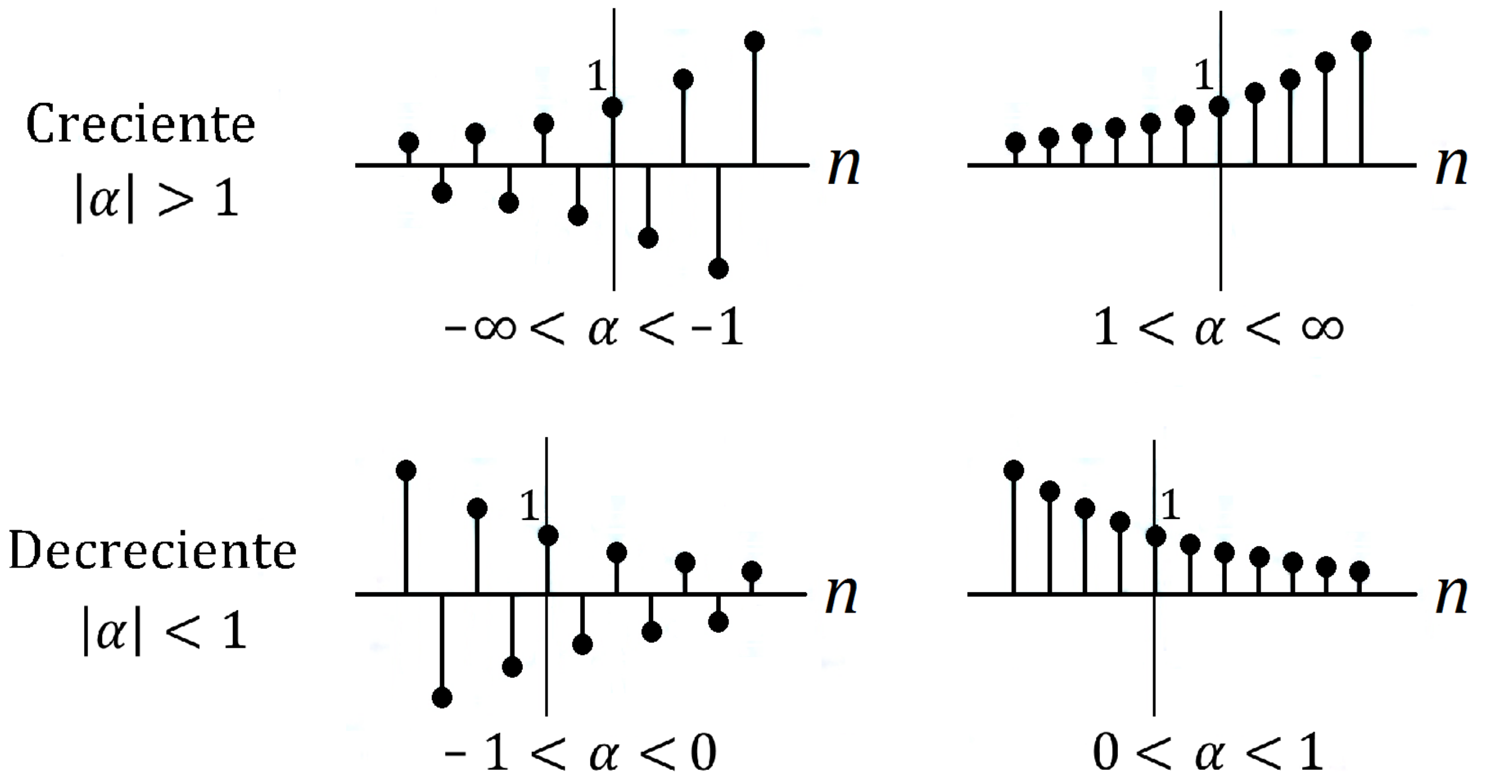


$a < 0$: exponencial decreciente



Secuencia exponencial real

$$x[n] = \alpha^n, \qquad \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha \neq 0 \ \text{ y } \ \alpha \neq 1$$



Señal sinusoidal

$$x(t) = A cos(\omega_0 t + \phi), \qquad \omega_0 = 2\pi f_0$$

Donde

A : amplitud

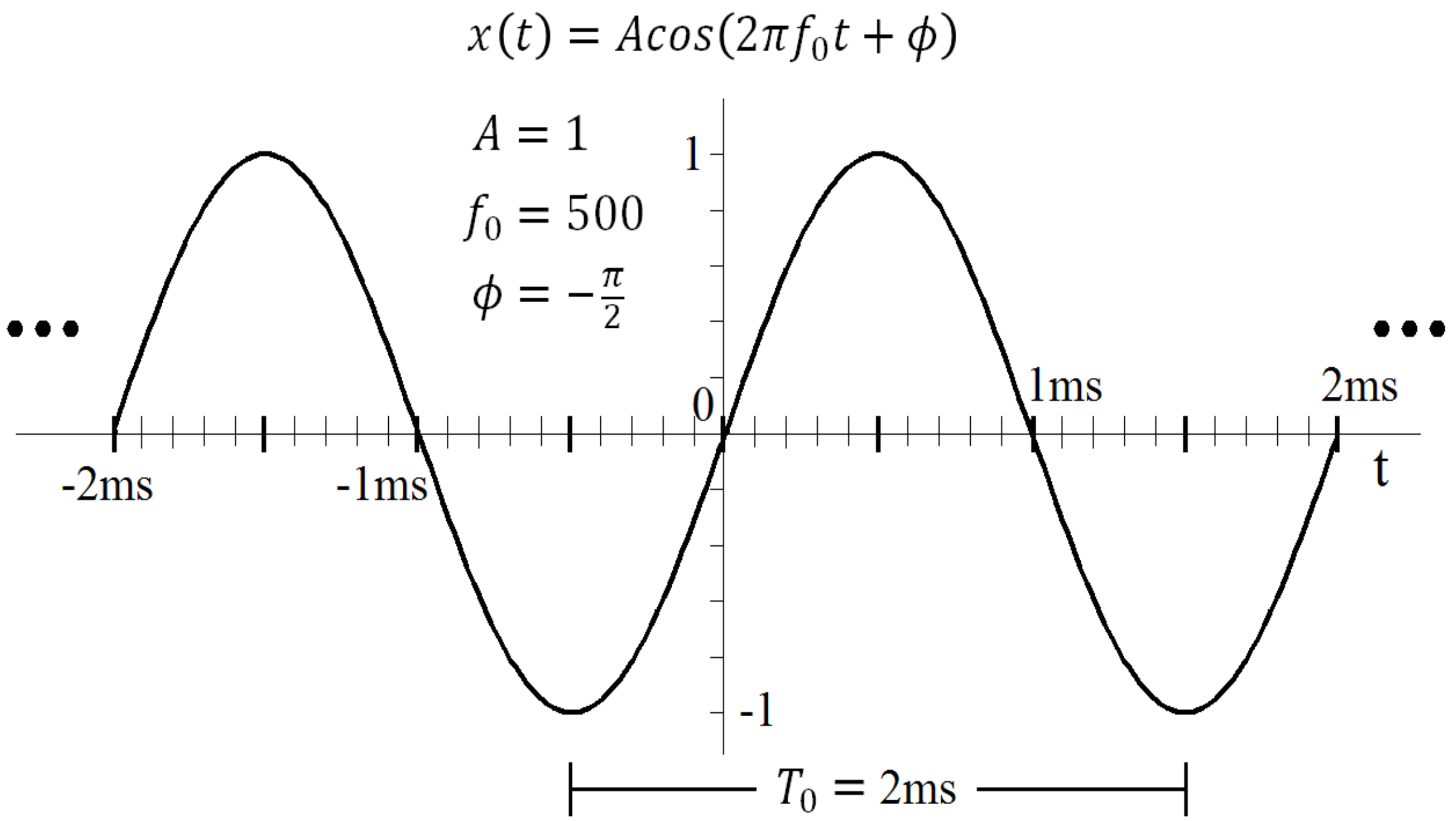
f_0 : frecuencia en Hertz

ω_0 : frecuencia angular en radianes sobre segundo

ϕ : fase en radianes

Una señal sinusoidal es periódica con periodo fundamental:

$$T_0 = \frac{1}{f_0}$$



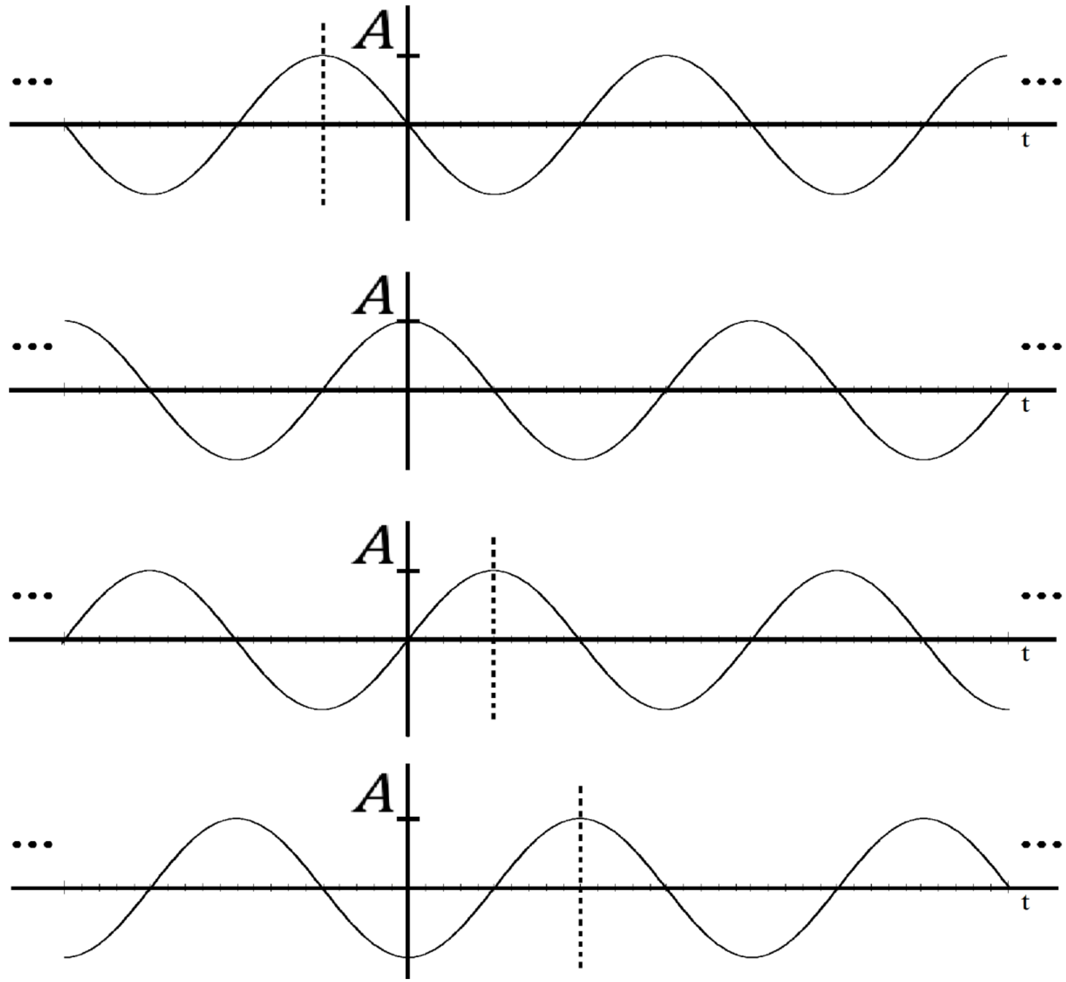
Señal sinusoidal con $A = 1,\ \omega_0 = 1000\pi$ y $\phi = -\frac{\pi}{2}$

$$\phi = \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\phi = 0}$$

$$\phi = -\frac{\pi}{2}$$

$$\phi = -\pi$$



$$x(t) = A\cos(\omega_o t + \phi)$$

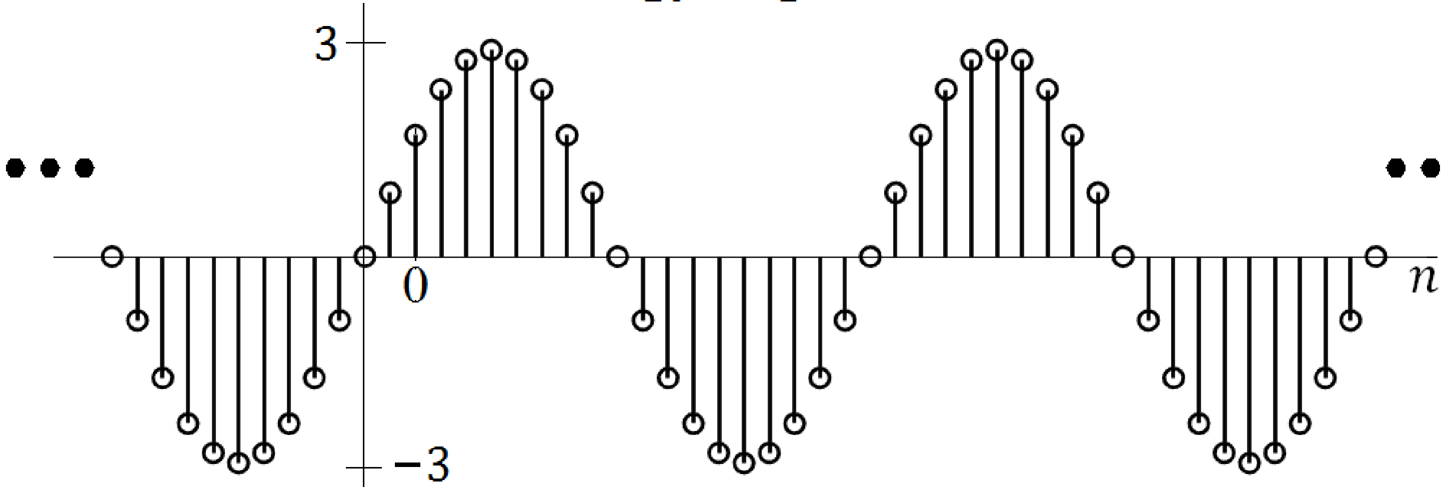
Secuencia sinusoidal

$$x[n] = A cos(\Omega_0 n + \phi)$$

Donde A es la amplitud, Ω_0 es la frecuencia angular en radianes y, ϕ es la fase en radianes.

$x[n]$ es periódica con periodo fundamental N (entero positivo) cuando $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}m$, siendo $\frac{m}{N}$ un número racional en su forma irreducible.

$$x[n] = 3\,cos\left(\frac{2\pi}{20}n - \frac{\pi}{2}\right) \qquad N=20$$



Señal exponencial compleja

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + jsen(\omega_0 t)$$

Donde $\omega_0 = 2\pi f_0$ es su frecuencia angular en radianes sobre seg. y f_0 es su frecuencia en Hertz.

La señal $e^{j\omega_0 t}$ es periódica con periodo fundamental $T_0 = 1/f_o$.

En efecto

$$e^{j\omega_0(t+T_0)} = e^{j\omega_0 t + j\omega_0 T_0} = e^{j\omega_0 t} e^{j\omega_0 T_0} = e^{j\omega_0 t} e^{j2\pi f_0 T_0}$$

$$= e^{j\omega_0 t} e^{j2\pi} = e^{j\omega_0 t}\big(\cos(2\pi) + jsen(2\pi)\big)$$

$$= e^{j\omega_0 t} \quad \therefore QED.$$

Operaciones y transformaciones de señales

Suma, escalamiento en amplitud, combinación lineal y producto de señales

Para cualesquiera señales f, g y constantes α, β se define

- Suma: $(f+g)(t) = f(t) + g(t)\,, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$
- Escalamiento: $(\alpha f)(t) = \alpha f(t), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$
- Combinación lineal:

$$(\alpha f + \beta g)(t) = \alpha f(t) + \beta g(t) \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

- Producto: $(f \cdot g)(t) = f(t)g(t), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$

Suma, escalamiento en amplitud, combinación lineal y producto de secuencias

Para cualesquiera secuencias f, g y constantes α, β se define

- Suma: $(f+g)[n] = f[n] + g[n], \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$
- Escalamiento: $(\alpha f)[n] = \alpha f[n], \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$
- Combinación lineal:

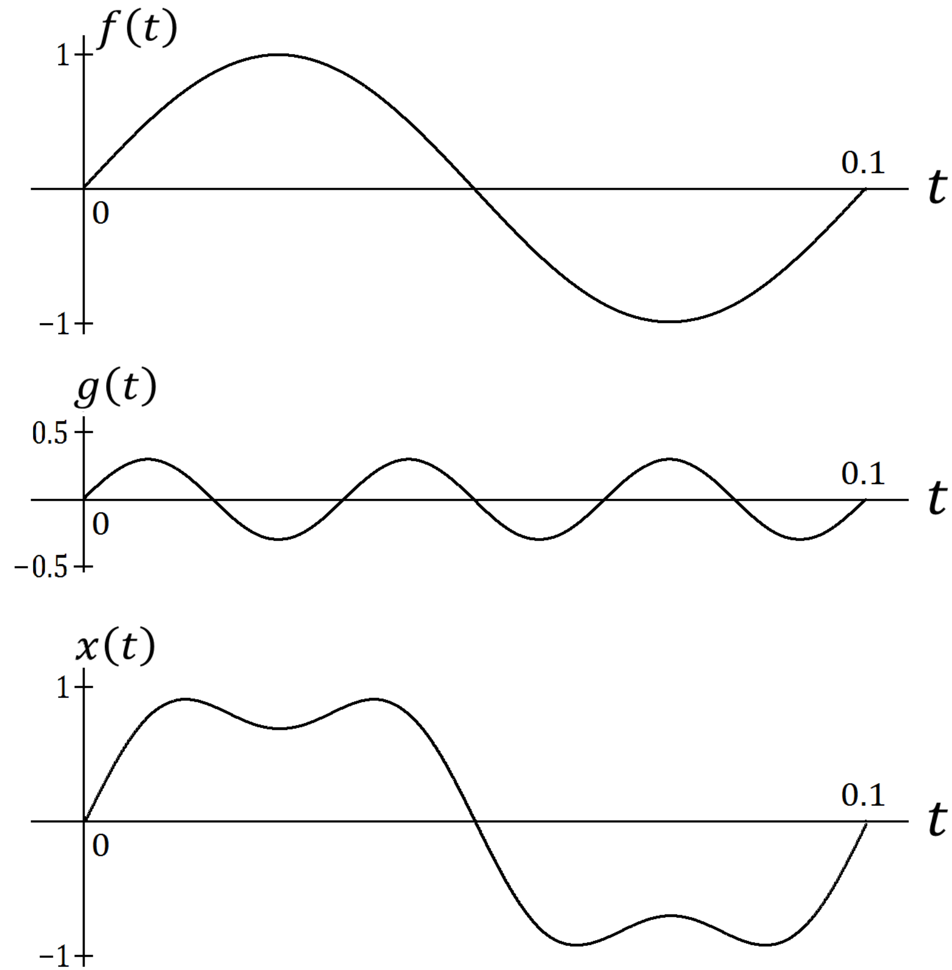
$$(\alpha f + \beta g)[n] = \alpha f[n] + \beta g[n] \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$$

- Producto: $(f \cdot g)[n] = f[n]g[n], \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$

$$f(t) = sen(2\pi 10t)$$

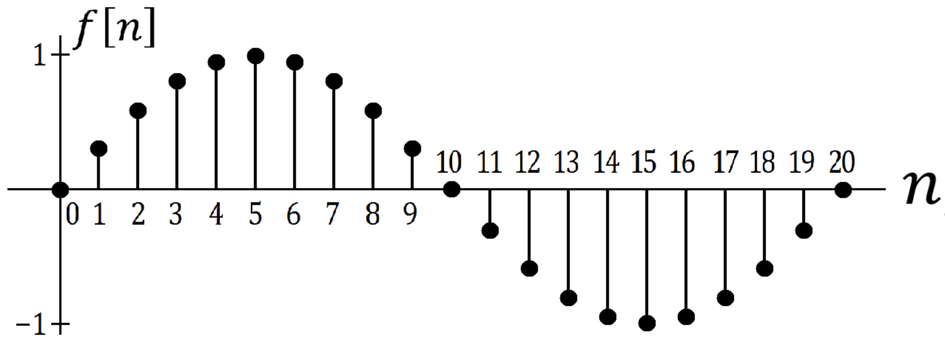
$$g(t) = 0.3sen(2\pi 30t)$$

$$x(t) = f(t) + g(t)$$

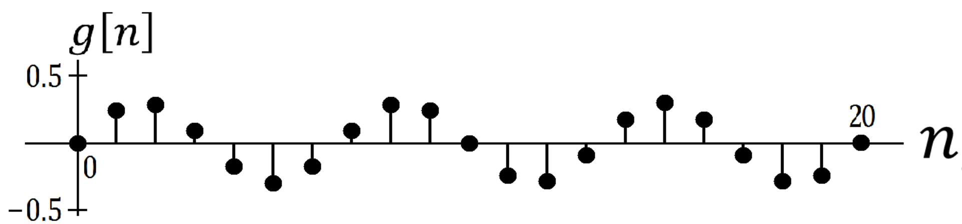


Suma de señales

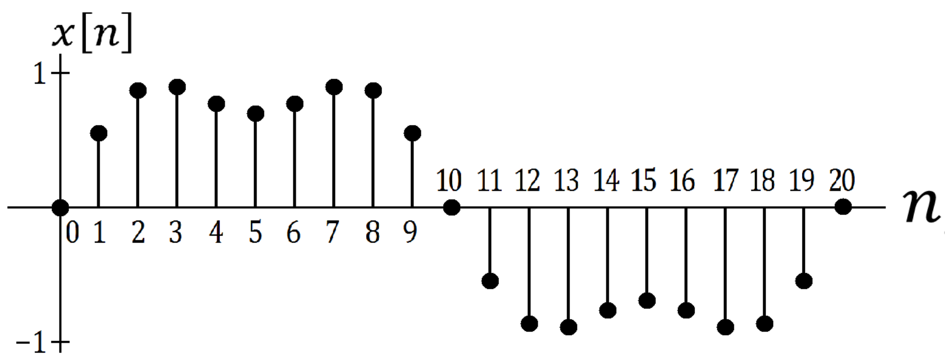
$$f[n] = sen\left(\frac{\pi}{10}n\right)$$



$$g[n] = 0.3sen\left(\frac{3\pi}{10}n\right)$$



$$x[n] = f[n] + g[n]$$



Suma de secuencias

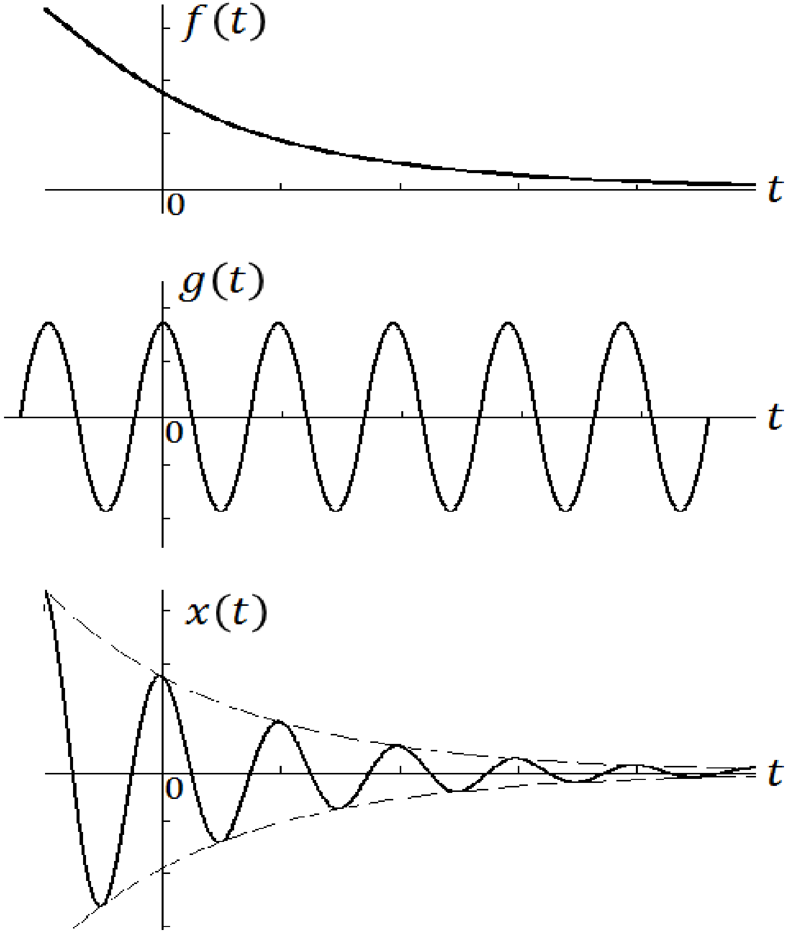
$$f(t) = e^{at}$$

$$a < 0$$

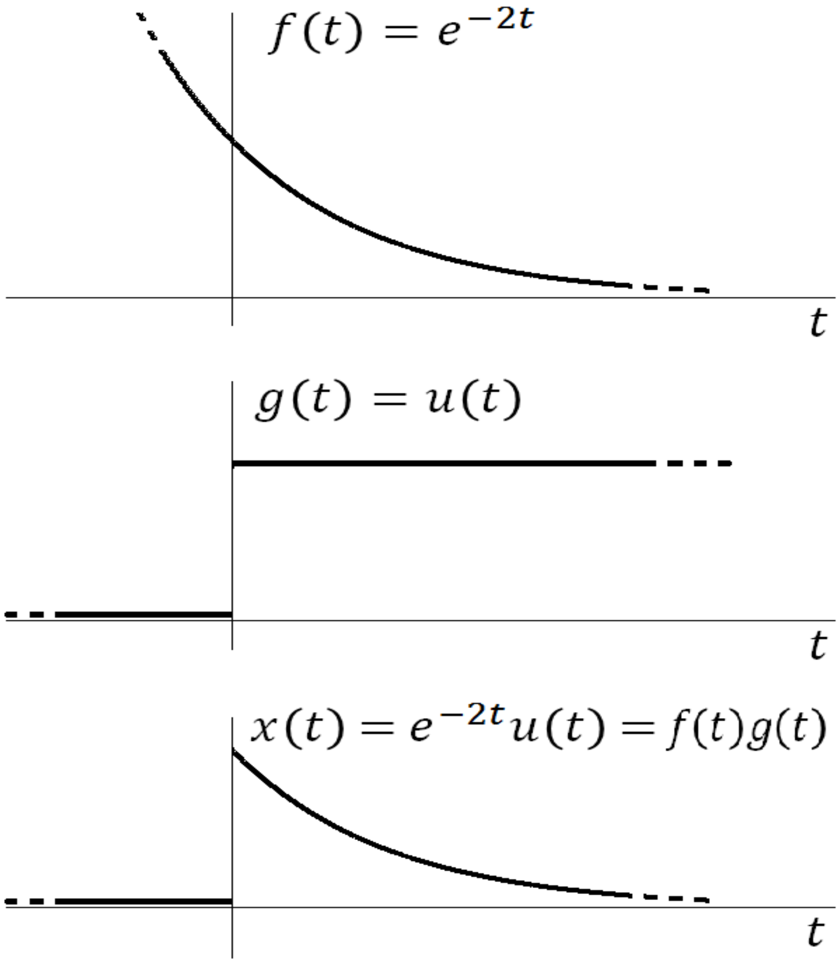
$$g(t) = \cos(\omega_0 t)$$

$$x(t) = f(t)g(t)$$

$$= e^{at}\cos(\omega_0 t)$$



Producto de señales



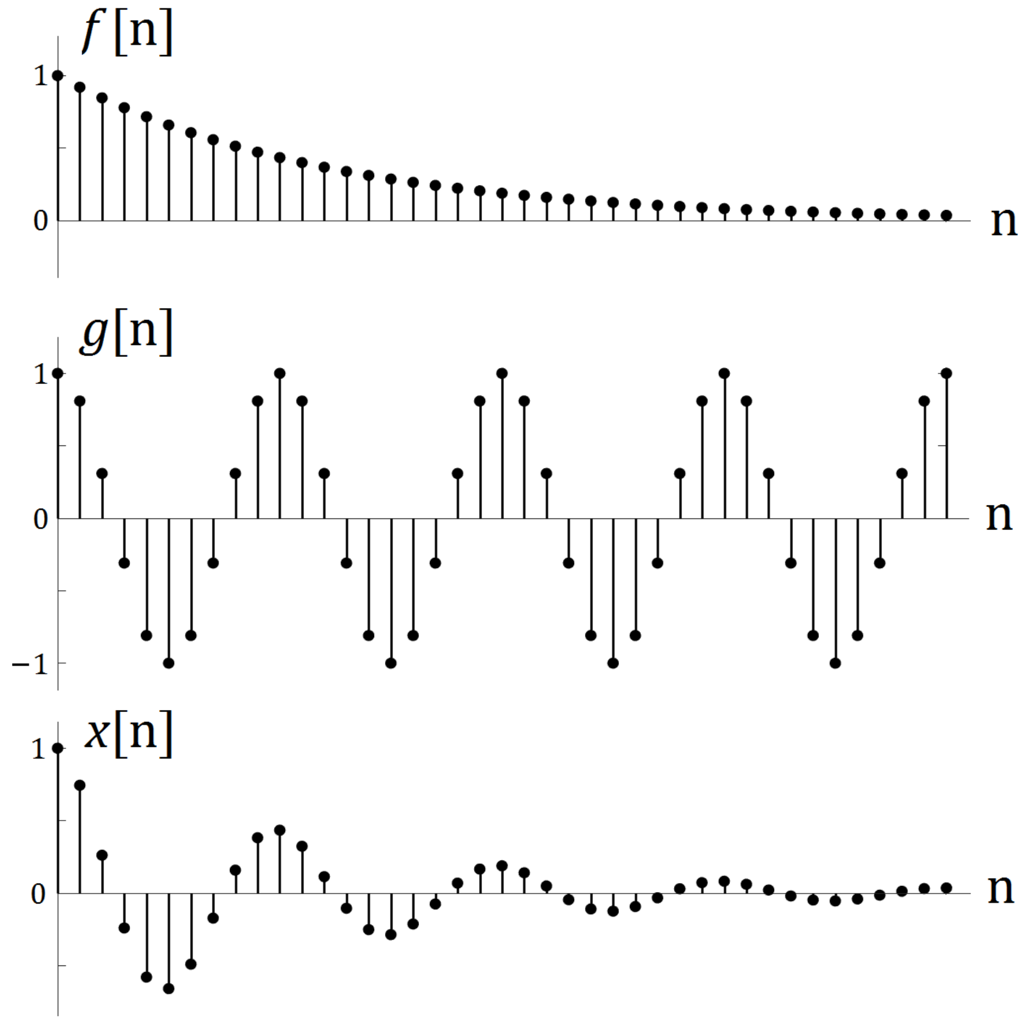
Producto de señales

$$f[n] = 0.92^n$$

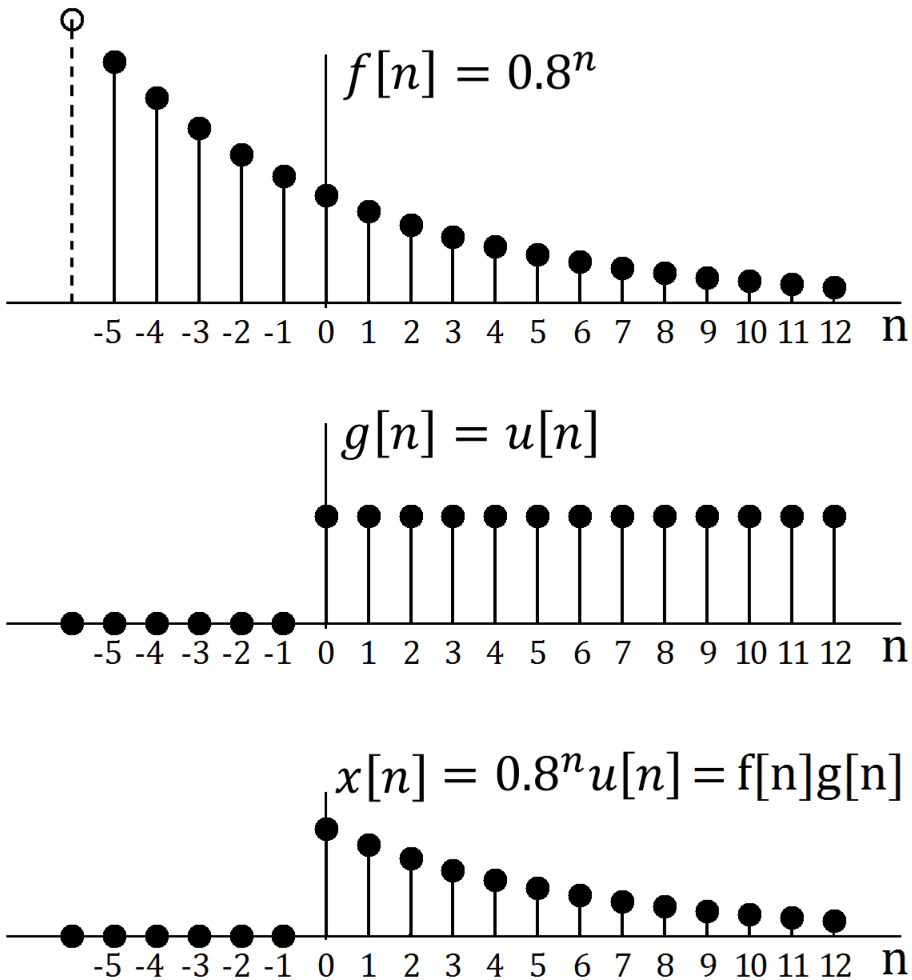
$$g[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{10}n\right)$$

$$x[n] = f[n]g[n]$$

$$= 0.92^n \cos\left(\frac{2\pi}{10}n\right)$$



Producto de secuencias



Producto de secuencias

$$f[n] = \{ \underset{\uparrow}{2}, \; 1, \; 4, \; 3, \; 4, \; 1, \; 3, \; 5 \}$$

$$g[n] = \{ \underset{\uparrow}{7}, \; 4, \; 3, \; 5, \; 5, \; 6, \; 2, \; 1 \}$$

$$\begin{aligned} x[n] &= f[n] + g[n] \\ &= \{ \underset{\uparrow}{9}, \; 5, \; 7, \; 8, \; 9, \; 7, \; 5, \; 6 \} \end{aligned}$$

$$f[n] = \{ \underset{\uparrow}{4}, \; 3, \; 2 \}$$

$$g[n] = \{ \underset{\uparrow}{5}, \; 1, \; 4, \; 7, \; 7, \; 7 \}$$

$$\begin{aligned} x[n] &= f[n] + g[n] \\ &= \{ \underset{\uparrow}{9}, \; 4, \; 6, \; 7, \; 7, \; 7 \} \end{aligned}$$

Suma de secuencias

$$f[n] = \{ \underset{\uparrow}{2},\ 1,\ 4,\ 3,\ 4,\ 1,\ 3,\ 5 \}$$

$$\begin{aligned} x[n] &= 3f[n] \\ &= \{ \underset{\uparrow}{6},\ 3, 12, 9, 12, 3,\ 9, 15 \} \end{aligned}$$

$$f[n] = \{ \underset{\uparrow}{4}, -3,\ \ 2 \}$$

$$\begin{aligned} x[n] &= -2f[n] \\ &= \{ \underset{\uparrow}{-8},\ \ 6, -4 \} \end{aligned}$$

Escalamiento en amplitud de secuencias

$$f[n] = \{\ 2,\ \ 1,\ \ 4,\ \ 3,\ \ 4,\ \ 1,\ \ 3,\ \ 5\ \}$$

$$g[n] = \{\ 7,\ \ 4,\ \ 3,\ \ 5,\ \ 5,\ \ 6,\ \ 2,\ \ 1\ \}$$

$$\begin{aligned} x[n] &= f[n]g[n] \\ &= \{14,\ \ 4, 12, 15, 20,\ \ 6,\ \ 6,\ \ 5\ \} \end{aligned}$$

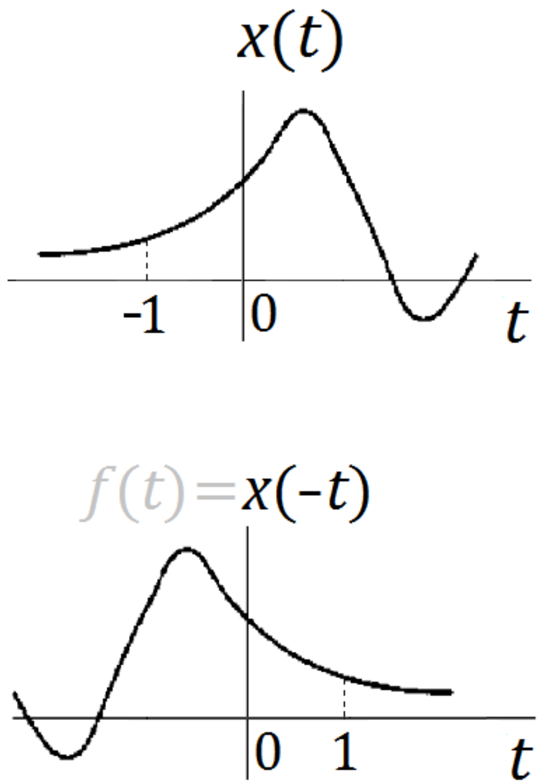
$$f[n] = \{\ 4,\ \ 3,\ \ 2\ \}$$

$$g[n] = \{\ 5,\ \ 2,\ \ 4,\ \ 7,\ \ 7,\ \ 7\}$$

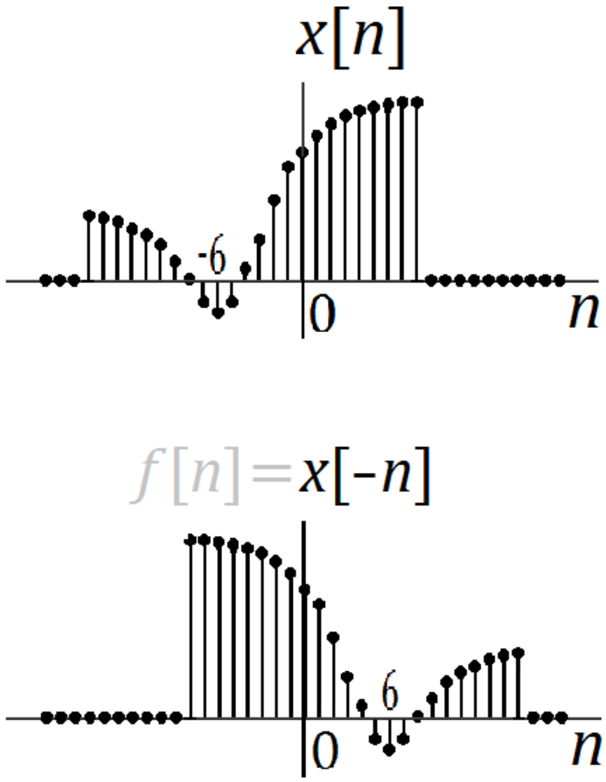
$$\begin{aligned} x[n] &= f[n]g[n] \\ &= \{\ 20, 6,\ \ 8,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0\} \end{aligned}$$

Producto de secuencias

Inversión en el tiempo

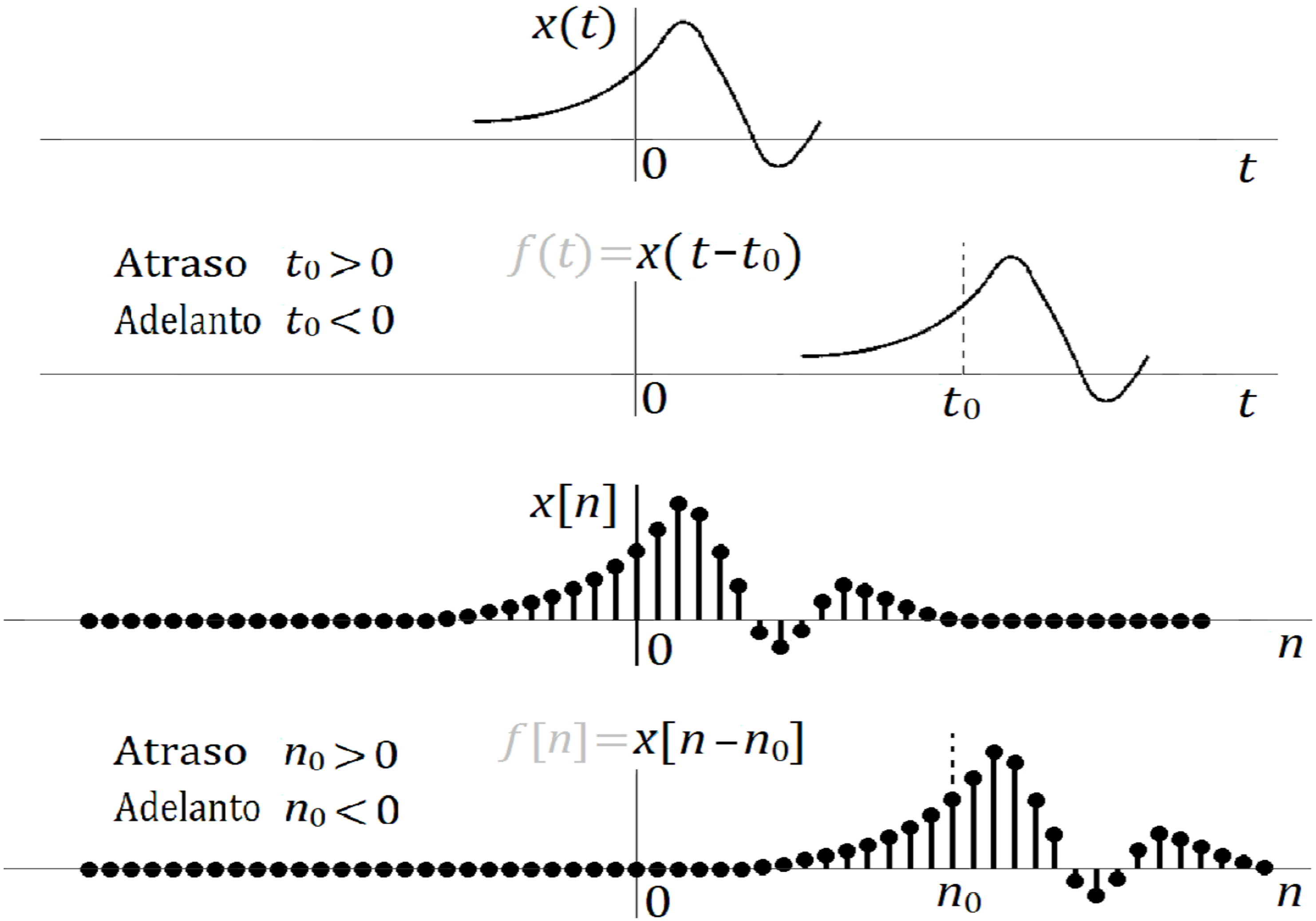


Inversión TC



Inversión TD

Desplazamiento en el tiempo



La integral y la derivada de una señal continua son las definidas en el cálculo diferencial e integral.

La sumatoria de $x[n]$ en el intervalo $a \leq n \leq b$ se define como:

$$\sum_{n=a}^{b} x[n] = x[a] + x[a+1] + x[a+2] \cdots x[b-1] + x[b]$$

Sumatoria útil:

$$\sum_{n=0}^{N} b^n = \frac{1-b^{N+1}}{1-b} \quad \text{con} \quad b \in \mathbb{C} \quad b \neq 0 \ \text{y} \ b \neq 1 \qquad (a)$$

La diferencia hacia atrás de $x[n]$ se define como:

$$\nabla x[n] = \frac{\Delta x}{\Delta n} = x[n] - x[n-1]$$

Ecuación en diferencias lineal

La versión en tiempo discreto de una ecuación diferencial lineal coeficientes constantes de orden N:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

es la ec. en diferencias lineal de coeficientes constantes de orden N:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

Desarrollando la ecuación anterior se obtiene:

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + \cdots + a_N y[n-N] = b_0 x[n] + \cdots + b_M x[n-M]$$

Ejemplo

Obtener la forma "estandar" de la sig. ec. en diferencias de orden 2:

$$a\,\nabla^2 y[n] + b\,\nabla y[n] + c\,y[n] = x[n], \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

Sol.

$$\nabla y[n] = y[n] - y[n-1]$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 y[n] = \nabla(\nabla y[n]) &= \nabla y[n] - \nabla y[n-1] \\ &= (y[n] - y[n-1]) - (y[n-1] - y[n-2]) \\ &= y[n] - 2y[n-1] + y[n-2]\end{aligned}$$

Entonces

$$a(y[n] - 2y[n-1] + y[n-2]) + b(y[n] - y[n-1]) + c\,y[n] = x[n]$$

$$\overbrace{(a+b+c)}^{a_0}\,y[n] + \overbrace{(-2a-b)}^{a_1}\,y[n-1] + \overbrace{a}^{a_2}\,y[n-2] = x[n]$$

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] = x[n]$$

Integral de convolución

La convolución entre cualesquiera señales $f(t)$ y $g(t)$ se define como:

$$y(t) = f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, g(t-\tau) d\tau \qquad (1)$$

Suma de convolución

La convolución entre cualesquiera secuencias $f[n]$ y $g[n]$ se define como:

$$y[n] = f[n] * g[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f[k] g[n-k] \qquad (2)$$

Propiedades de la convolución

1) Conmutativa $f * g = g * f$

2) Asociativa $(x_1 * x_2) * x_3 = x_1 * (x_2 * x_3)$

3) Distributiva $x_1 * (x_2 + x_3) = x_1 * x_2 + x_1 * x_3$

4) Desplazamiento con el impulso unitario

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

$$x[n] * \delta[n - n_0] = x[n - n_0]$$

Ejemplo

Para las señales $f(t) = \delta(t+4) + \delta(t-7)$ y $g(t) = e^{-2t}$, obtener $y(t) = f(t) * g(t)$.

Solución

$$y(t) = f(t) * g(t) = \big(\delta(t+4) + \delta(t-7)\big) * e^{-2t}$$

Por la propiedad distributiva de la convolución se tiene que:

$$y(t) = \delta(t+4) * e^{-2t} + \delta(t-7) * e^{-2t}$$

Por la prop. de desplazamiento con el impulso unitario se tiene que:

$$y(t) = e^{-2(t+4)} + e^{-2(t-7)}$$

Fundamentos de muestreo

Muestreo es el proceso de convertir una señal $x_c(t)$, en su representación mediante una secuencia $x[n]$. Si el muestreo se realiza de forma periódica, entonces se tiene que:

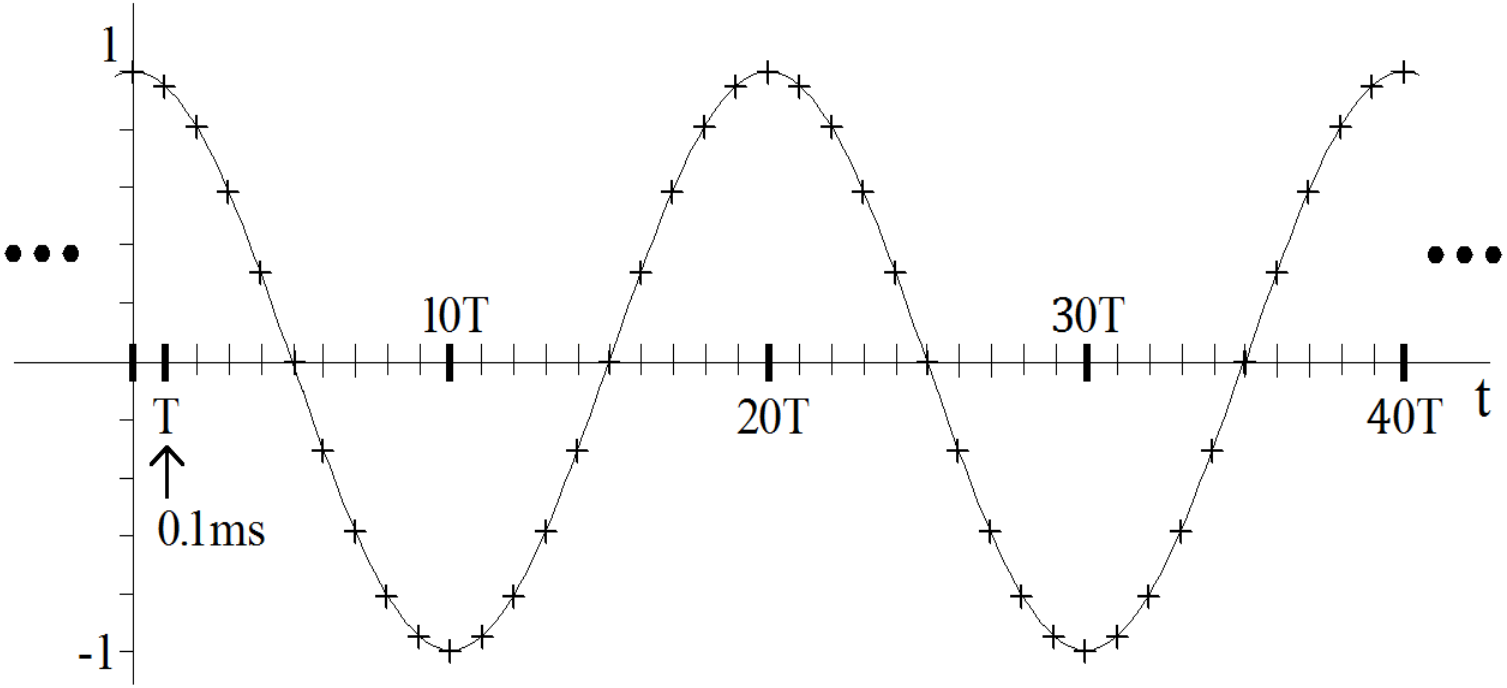
$$x[n] = x_c(nT), \qquad -\infty < n < +\infty$$

Donde T es el periodo de muestreo medido en segundos. $F_s = 1/T$ es la frecuencia de muestreo medida en muestras/segundo o Hertz.

Teorema de Muestreo: Si la frecuencia más alta contenida en una señal $x_c(t)$ es F_{max}, y la señal se muestrea con $F_s > 2F_{max}$, entonces $x_c(t)$ puede ser reconstruida exactamente a partir de sus muestras $x[n]$, mediante interpolación ideal (solo posible en teoría).

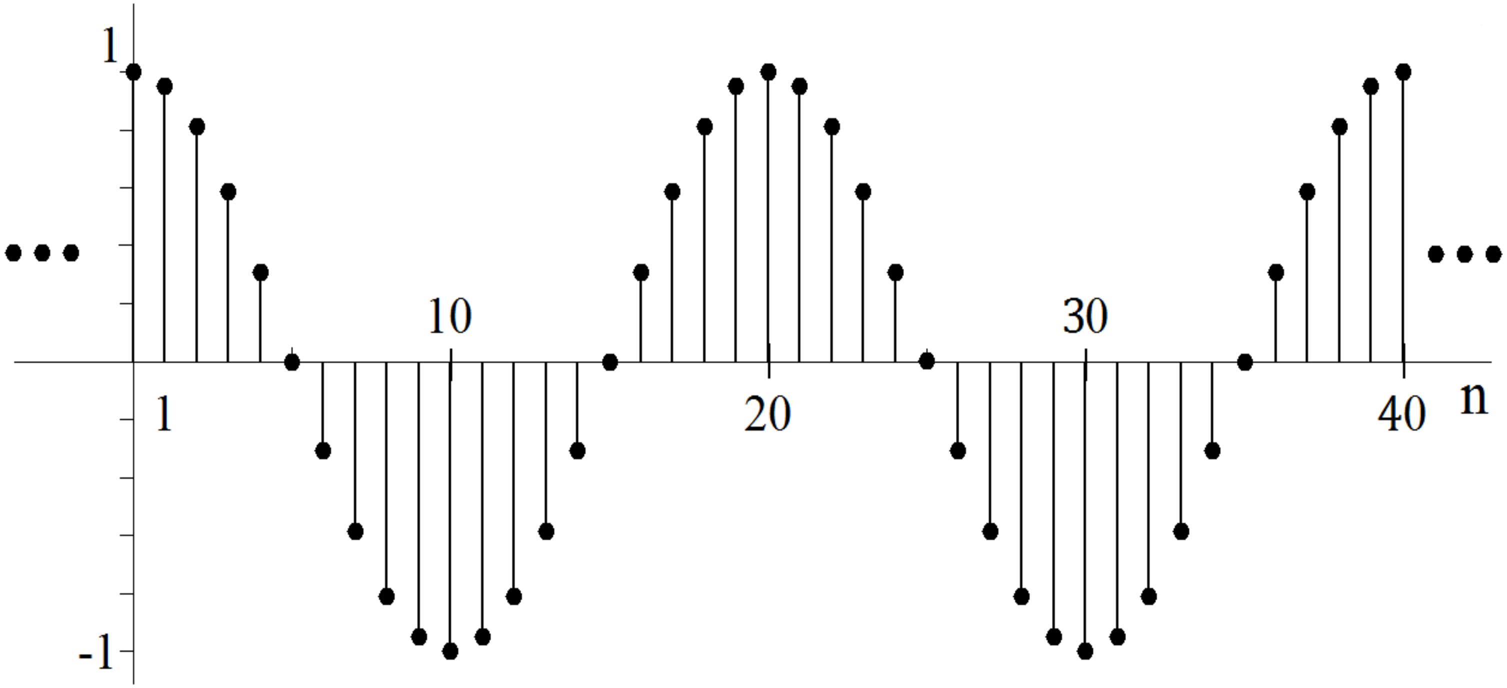
Ejemplo de muestreo de una señal sinusoidal

$$x_c(t) = \cos(2\pi 500 t)$$



Si se muestrea la señal $x_c(t)$ de la figura anterior con una frecuencia de muestreo $F_s = 10000 \left[\frac{muestras}{s}\right]$ $\left(\Rightarrow T = \frac{1}{10000}[s]\right)$, entonces se obtiene la secuencia:

$$x[n] = x_c(nT) = \cos\left(2\pi 500 n\left(\frac{1}{10000}\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{10}n\right)$$



En este caso $F_{max} = 500\,[\mathrm{Hz}]$ y $F_s = 10000\,[\mathrm{Hz}]$. Como $F_s > 2F_{max}$, de acuerdo con teorema de muestreo, $x_c(t)$ puede ser reconstruido exactamente a partir de su secuencia de muestras $x[n]$.

Aliasing

Cuando no se cumple con el teorema de muestreo se produce el fenómeno de aliasing. Este fenómeno causa que señales continuas distintas se vuelvan indistinguibles cuando se representan mediante una secuencia de muestras.

$$F_s = 8000[Hz], \quad T = 125[\mu s]$$

$$f_0 < F_s/2$$

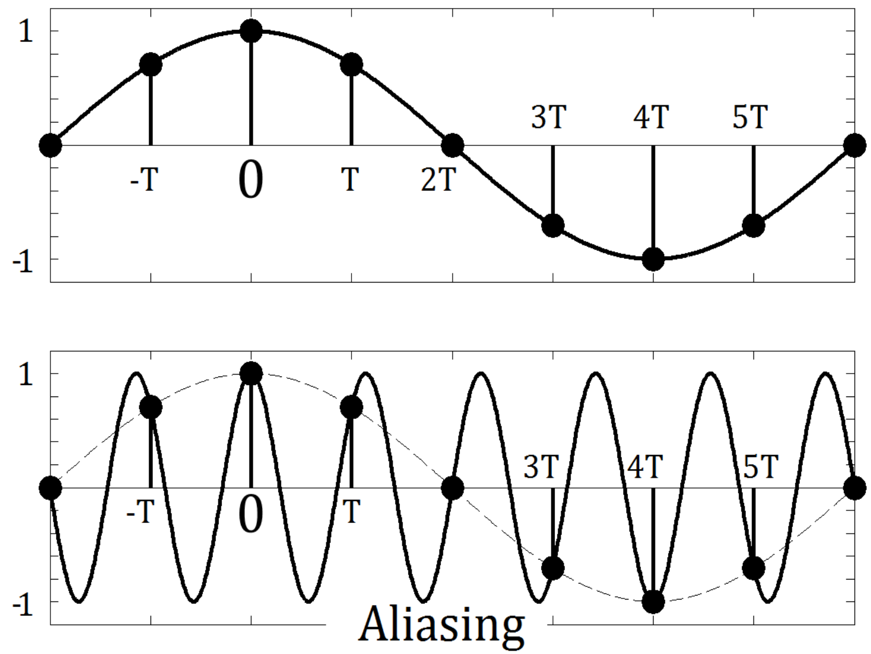
$$x_{0c}(t) = \cos(2\pi 1000 t)$$

$$x_0[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4} n\right)$$

$$f_1 > F_s/2$$

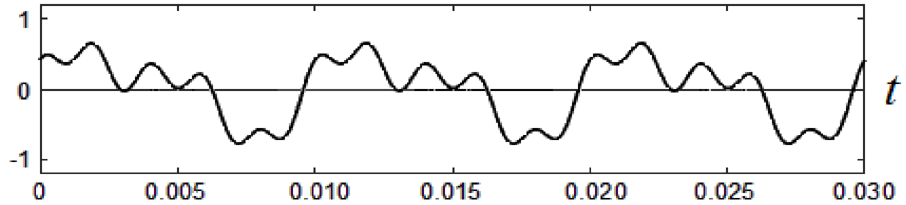
$$x_{1c}(t) = \cos(2\pi 7000 t)$$

$$x_1[n] = \cos\left(7\frac{\pi}{4} n\right) = x_0[n]$$

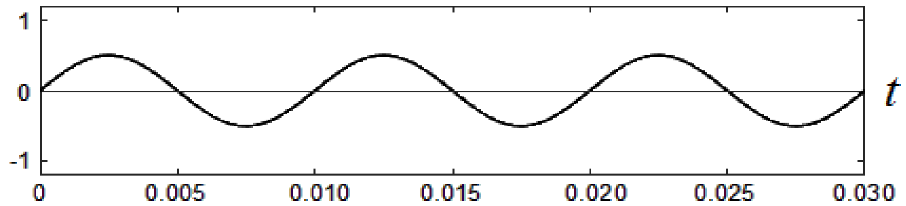


Ejemplo

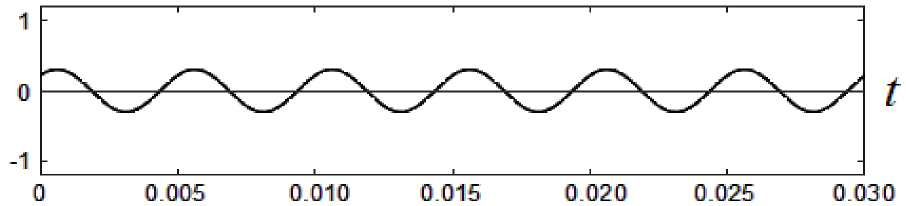
$$x_c(t) = x_{0c}(t) + x_{1c}(t) + x_{2c}(t)$$



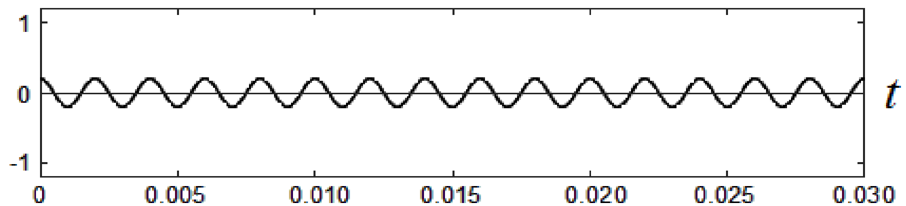
$$x_{0c}(t) = 0.5\cos(2\pi F_0 t - \pi/2)$$
$$F_0 = 100$$



$$x_{1c}(t) = 0.3\cos(2\pi F_1 t - \pi/4)$$
$$F_1 = 200$$



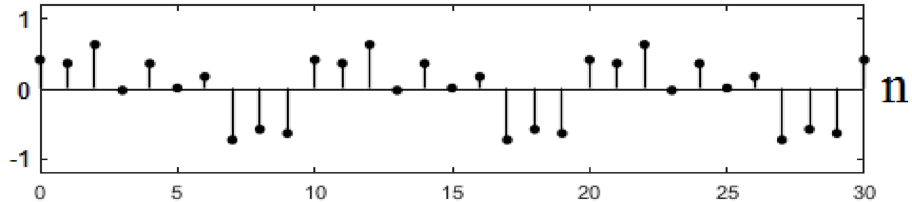
$$x_{2c}(t) = 0.2\cos(2\pi F_2 t)$$
$$F_2 = 500$$



En esta figura $F_{max} = 500$, entonces debe cumplirse que $F_s > 1000$ para que $x_c(t)$ pueda ser reconstruida exactamente a partir de $x[n]$.

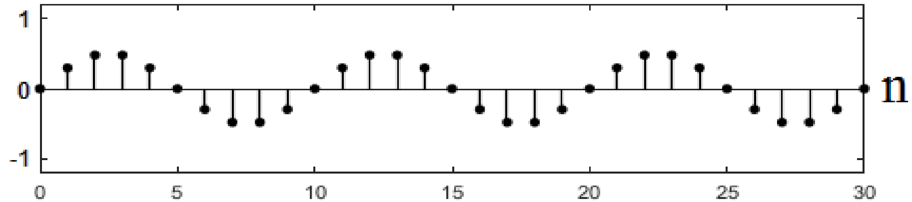
Ejemplo (continuación)

$$x[n] = x_0[n] + x_1[n] + x_2[n]$$

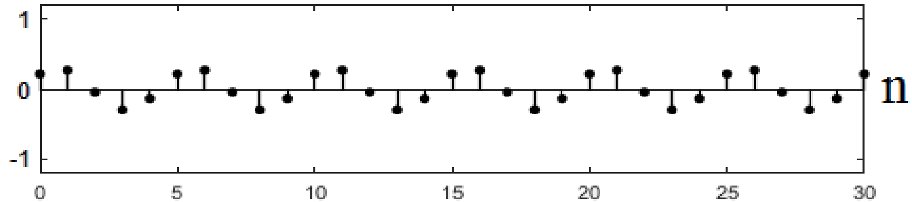


$$\boxed{\Omega = 2\pi f / F_s}$$

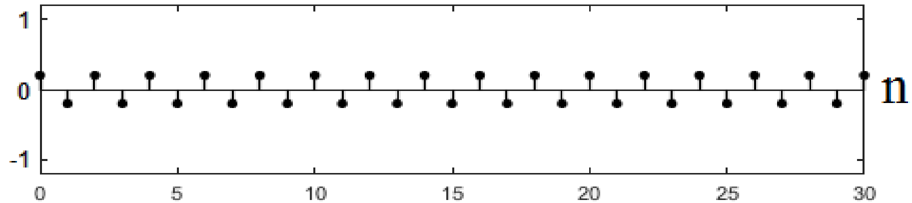
$$x_0[n] = 0.5\cos(\Omega_0 n - \pi/2)$$
$$\Omega_0 \approx \pi/5$$



$$x_1[n] = 0.3\cos(\Omega_1 n - \pi/4)$$
$$\Omega_1 \approx 2\pi/5$$



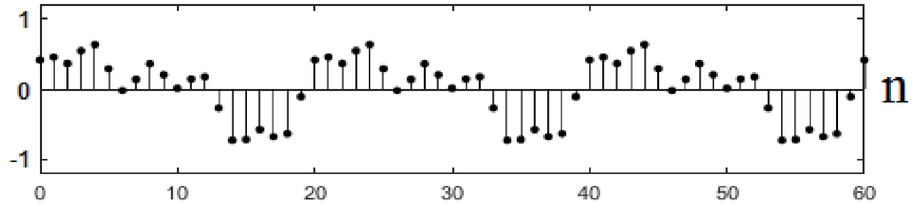
$$x_2[n] = 0.2\cos(\Omega_2 n)$$
$$\Omega_2 \approx \pi$$



$x[n] = x_c(nT)$ son las muestras de $x_c(t)$ con $F_s = 1000.1$ ($T \approx 1$ms).
Como $F_s > 2F_{max}$, $x_c(t)$ puede ser reconstruido a partir de $x[n]$.

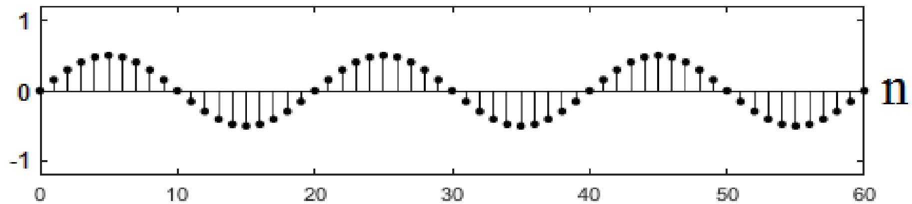
Ejemplo (continuación)

$$x[n] = x_0[n] + x_1[n] + x_2[n]$$

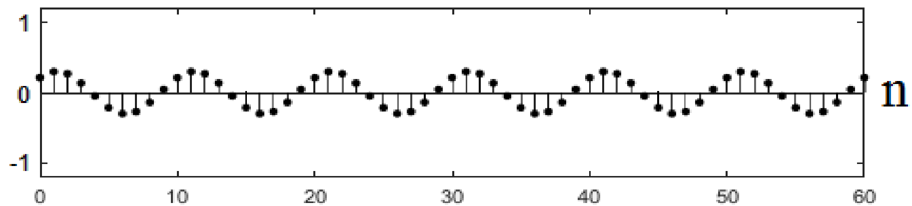


$$\boxed{\Omega = 2\pi f/F_s}$$

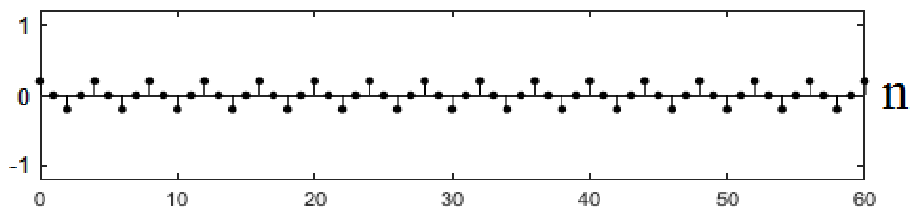
$$x_0[n] = 0.5\cos(\Omega_0 n - \pi/2)$$
$$\Omega_0 = \pi/10$$



$$x_1[n] = 0.3\cos(\Omega_1 n - \pi/4)$$
$$\Omega_1 = \pi/5$$



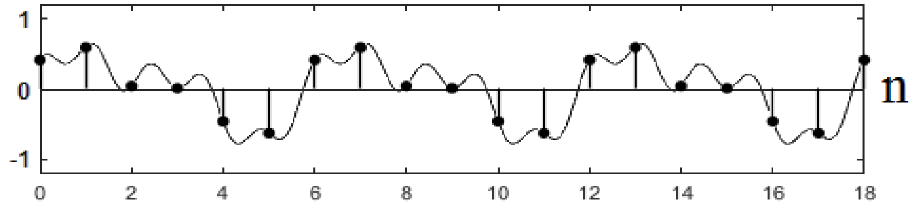
$$x_2[n] = 0.2\cos(\Omega_2 n)$$
$$\Omega_2 = \pi/2$$



$x[n] = x_c(nT)$ son las muestras de $x_c(t)$ con $F_s = 2000$ (T = 0.5ms).
Como $F_s > 2F_{max}$, $x_c(t)$ puede ser reconstruido a partir de $x[n]$.

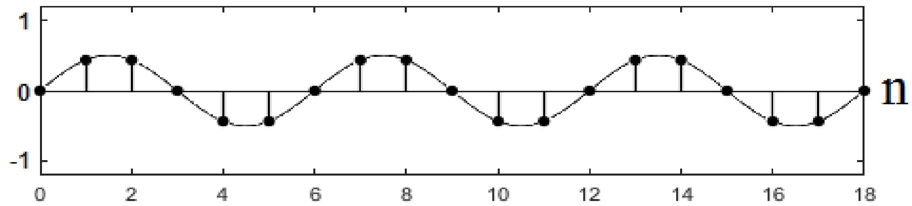
Ejemplo (continuación)

$$x[\mathrm{n}] = x_0[\mathrm{n}] + x_1[\mathrm{n}] + x_2[\mathrm{n}]$$

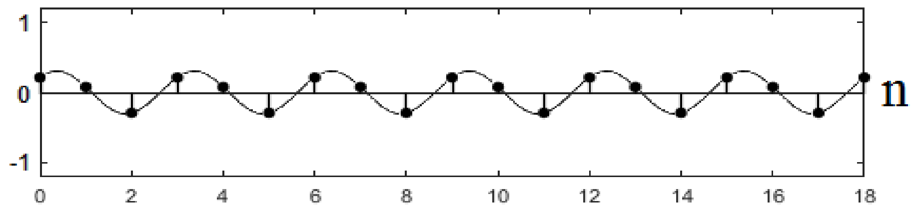


$$\boxed{\Omega = 2\pi f / F_s}$$

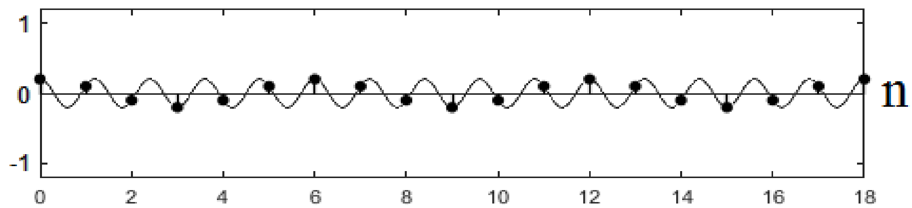
$$x_0[\mathrm{n}] = 0.5\cos(\Omega_0\,\mathrm{n} - \pi/2)$$
$$\Omega_0 = \pi/3$$



$$x_1[\mathrm{n}] = 0.3\cos(\Omega_1\,\mathrm{n} - \pi/4)$$
$$\Omega_1 = 2\pi/3$$



$$x_2[\mathrm{n}] = 0.2\cos(\Omega_2\,\mathrm{n})$$
$$\Omega_2 = 5\pi/3$$



$x[n] = x_c(nT)$ son las muestras de $x_c(t)$ con $F_s = 600$ ($T \approx 1.66$ms).
Como $F_s < 2F_{max}$, $x_c(t)$ no puede ser reconstruido a partir de $x[n]$.

Ejemplo (continuación)

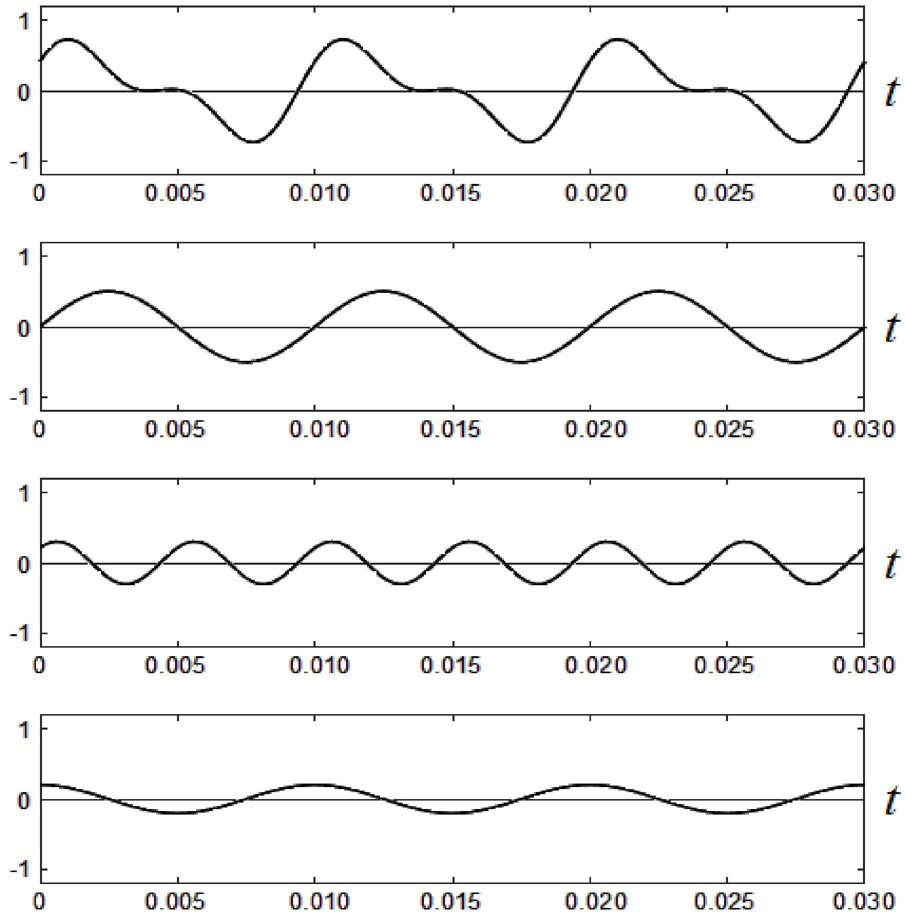
$$x_r(t) = x_{0r}(t) + x_{1r}(t) + x_{2r}(t)$$

$$x_r(t) \neq x_c(t)$$

$$x_{0r}(t) = x_{0c}(t)$$

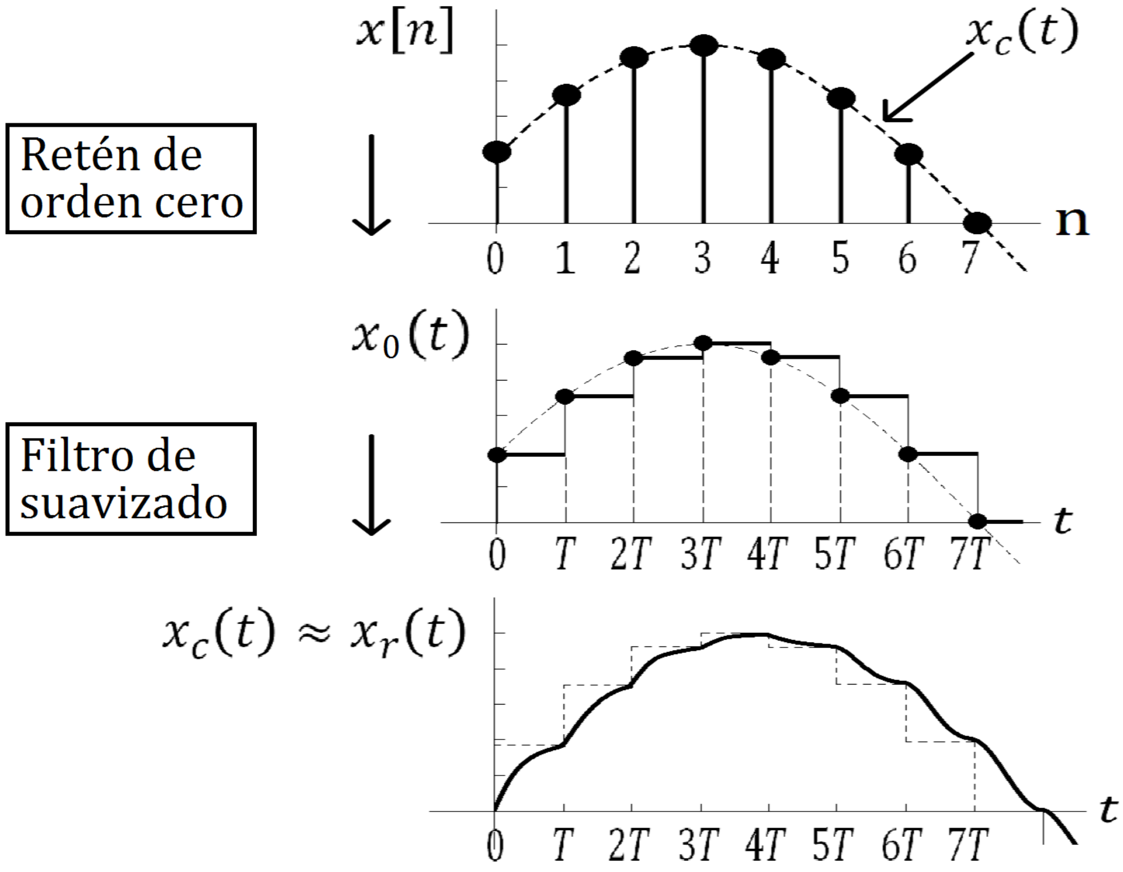
$$x_{1r}(t) = x_{1c}(t)$$

$$x_{2r}(t) \neq x_{2c}(t)$$



$x_r(t)$ es la señal reconstruida a partir de la secuencia $x[n]$ obtenida en la figura anterior. Como $F_s < 2F_{max}$ se tiene que $x_r(t) \neq x_c(t)$.

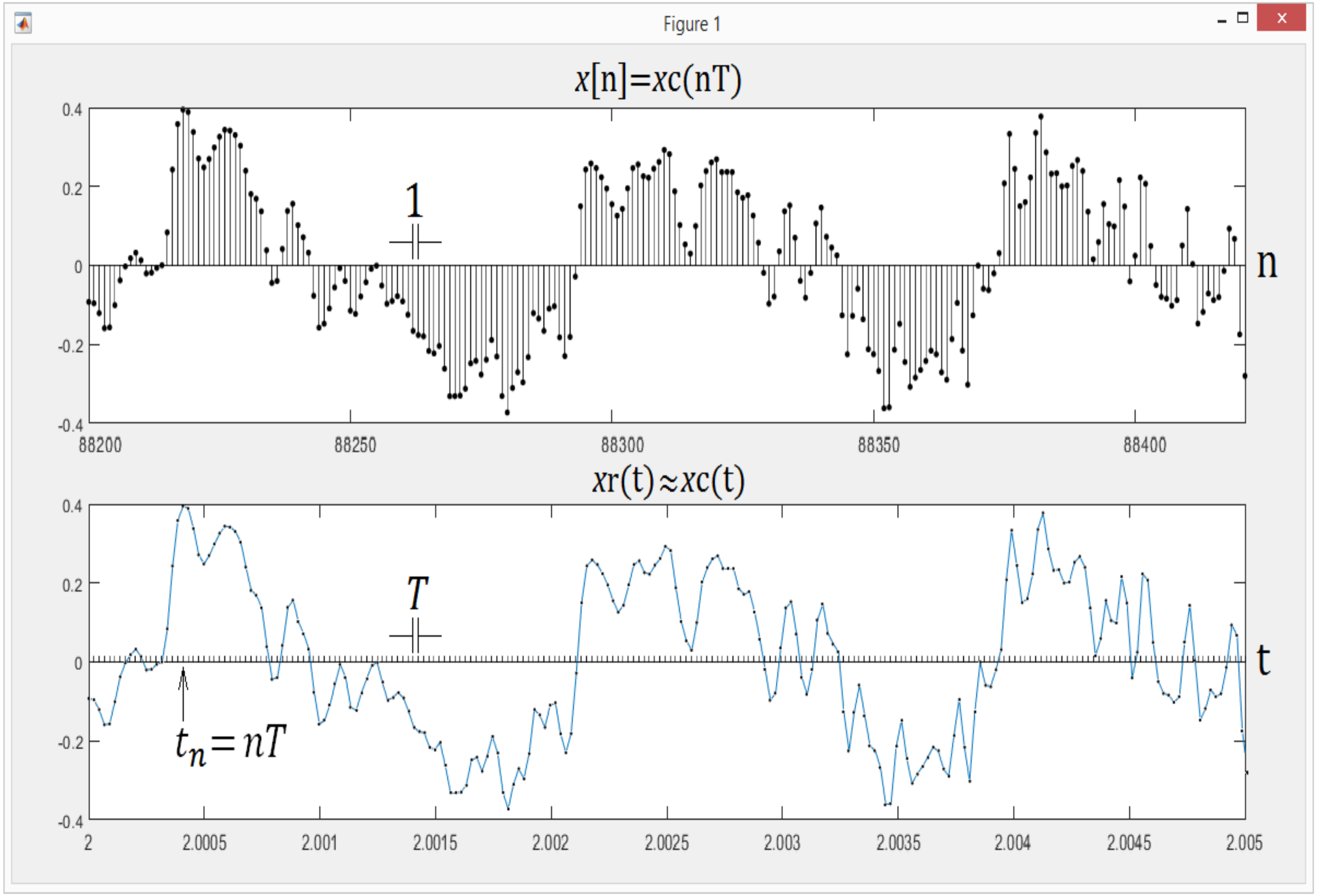
Ejemplo de interpolación práctica



Para señales eléctricas, $x_0(t)$ se obtiene con un DAC R2R y, $x_r(t)$ se obtiene mediante un filtro paso-bajas eléctrico.

```matlab
[xLR,Fs] = audioread('x_kitt.mp3');             %formato wav,mp3,m4a
x = mean(xLR,2).';   %obtención x[n]=xc(nT) monoaural. 2=>prom cols

Lx = max(size(x));              %num de muestras en x[n]
n = 0:1:Lx-1;                   %Arreglo de indices de tiempo discreto
t1 = 2;                         %Instante inicial a desplegar en [seg]
tc = [ t1, t1 + 5/1000 ];      %Intervalo de tiempo a desplegar [seg]
figure
subplot(2,1,1)
stem(n,x,'k.','MarkerSize',10,'LineWidth',1)
xlim( round(tc*Fs) )
title('x[n] = xc(nT)')
subplot(2,1,2)
plot( n*(1/Fs), x )               %T=1/Fs Periodo de muestreo en [seg]
xlim( tc )
title('xr(t)')

%La tarjeta de sonido interpola a:
player = audioplayer( x, Fs );
playblocking(player);                 %x[n] para reproducir xr(t)
```

Código de Matlab para leer $x[n] = x_c(nT)$ de un archivo de audio.



5ms de una señal de audio con $F_{max} = 22\,\text{kHz}$ y $Fs = 44.1\,\text{kHz}$

Sistemas continuos y sistemas discretos

Sistema

Un sistema es una interconexión de componentes, que transforma señales de entrada en señales de salida. Este curso se enfoca en sistemas de 1 entrada y 1 salida (o respuesta).

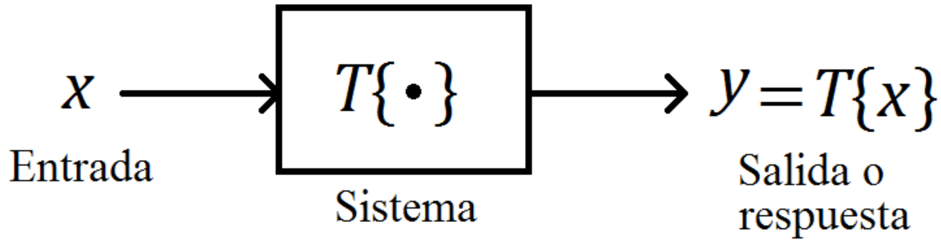


Figura. Representación entrada-salida de un sistema *T*.

- Sistema continuo: $x(t)$ e $y(t)$ son señales de TC.
- Sistema discreto: $x[n]$ e $y[n]$ son señales de TD.

Principales propiedades de los sistemas

- Linealidad

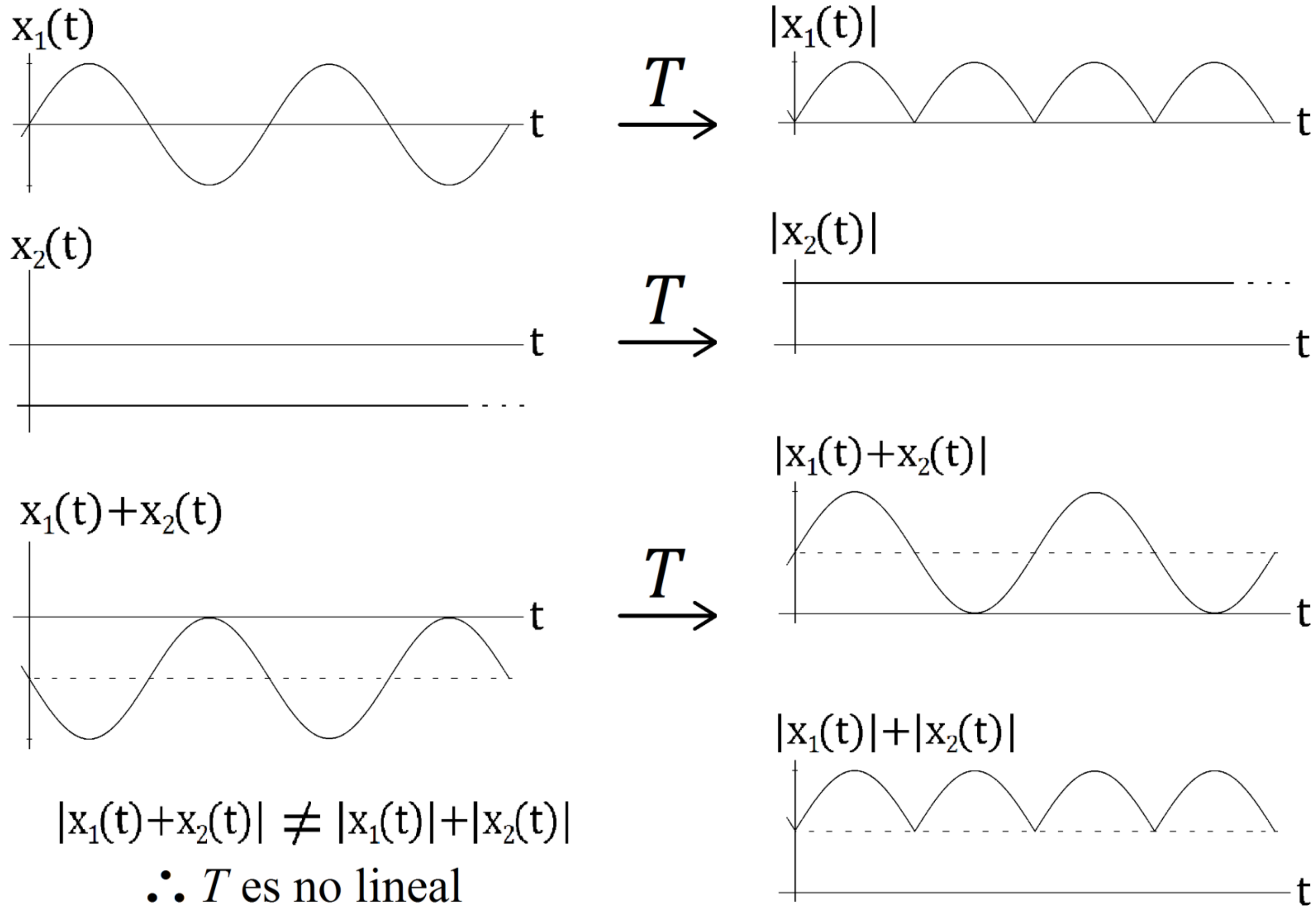
Un sistema continuo (o discreto) T es lineal, si y sólo si cumple con el principio de superposición:

$$T\{\, a_1 x_1 + a_2 x_2 \,\} = a_1 T\{x_1\} + a_2 T\{x_2\}$$

Para cualesquiera señales (o secuencias) de entrada x_1 y x_2, y cualesquiera constantes arbitrarias a_1 y a_2.

Ejemplo

Verificar que el sistema $T\{x(t)\} = |x(t)|$ no es lineal:



- Invariancia en el tiempo

Un sistema T continuo es invariante en el tiempo, si y sólo si

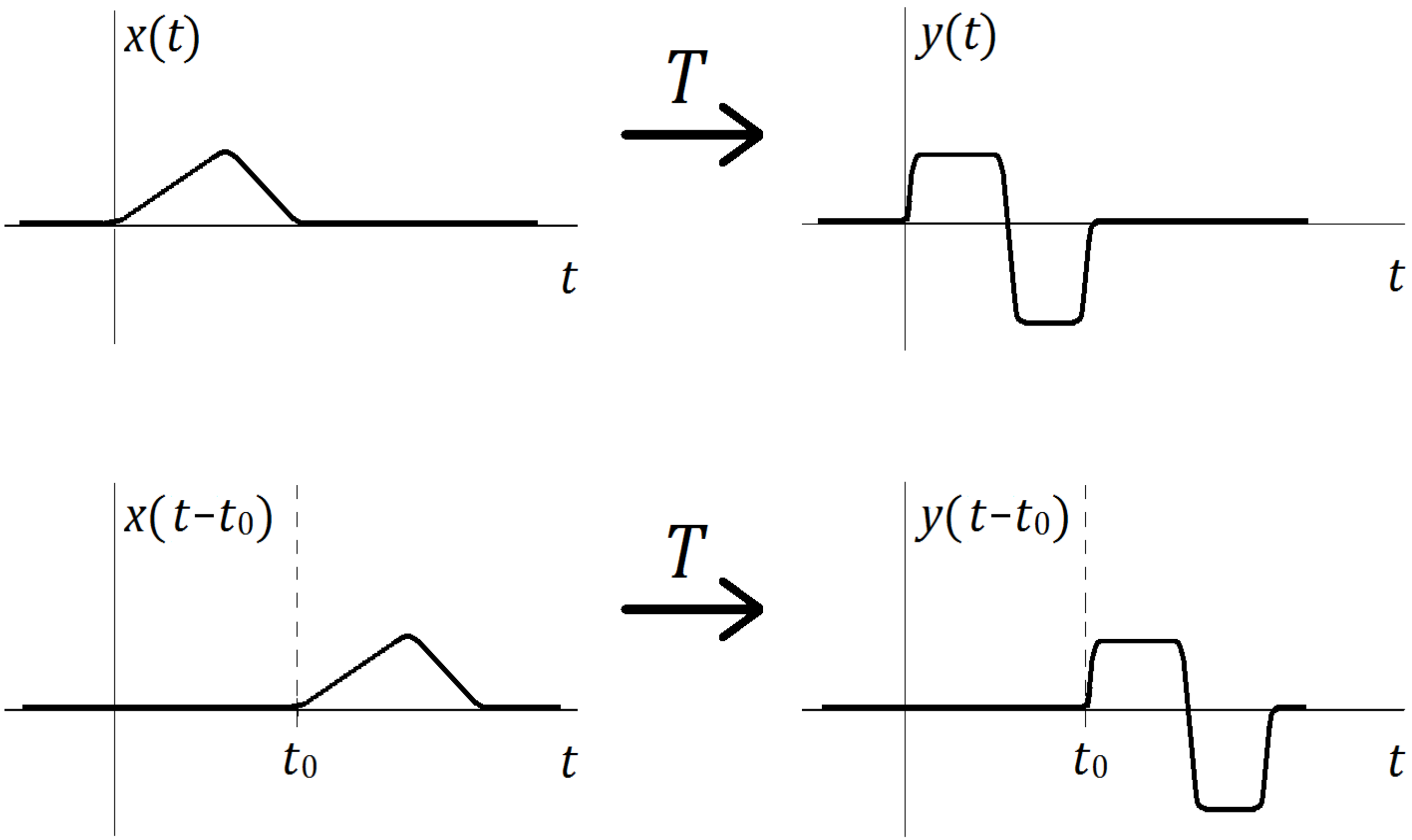
$$T\{\, x(t) \,\} = y(t) \quad \Longrightarrow \quad T\{\, x(t-a) \,\} = y(t-a)$$

para toda señal de entrada $x(t)$ y todo desplazamiento $a \in \mathbb{R}$ en el tiempo.

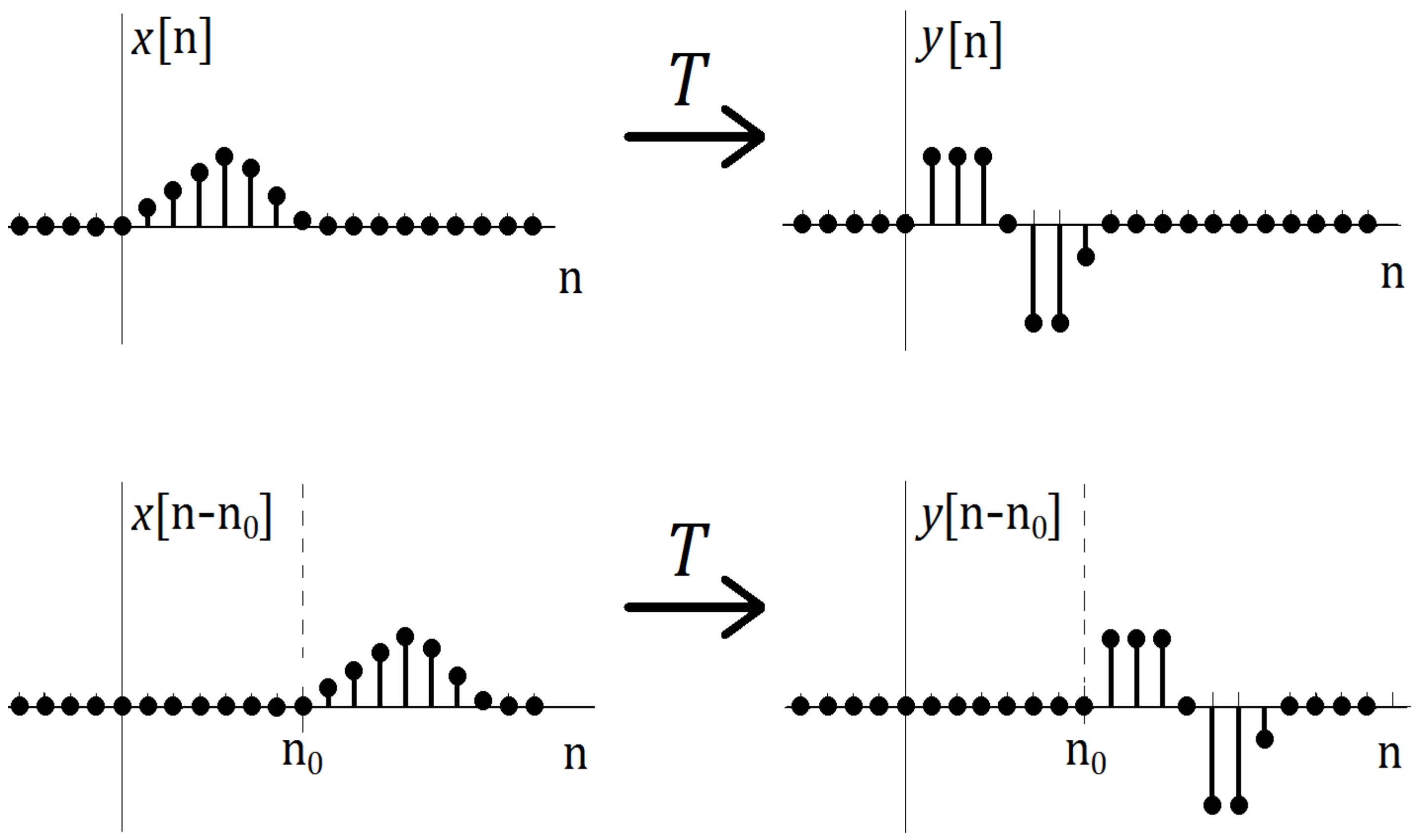
Un sistema T discreto es invariante en el tiempo, si y sólo si

$$T\{\, x[n] \,\} = y[n] \quad \Longrightarrow \quad T\{\, x[n-k] \,\} = y[n-k]$$

para toda secuencia de entrada $x[n]$ y todo desplazamiento $k \in \mathbb{Z}$ en el tiempo.



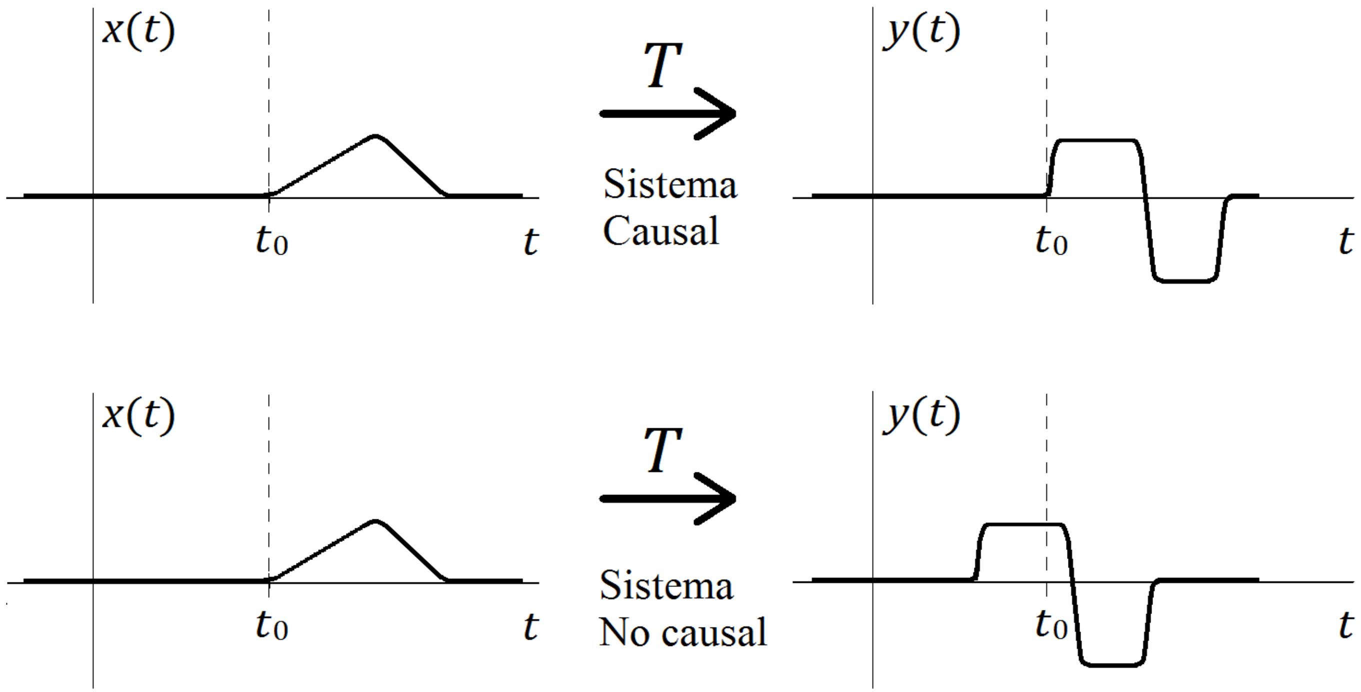
Invariancia en el tiempo continuo



Invariancia en el tiempo discreto

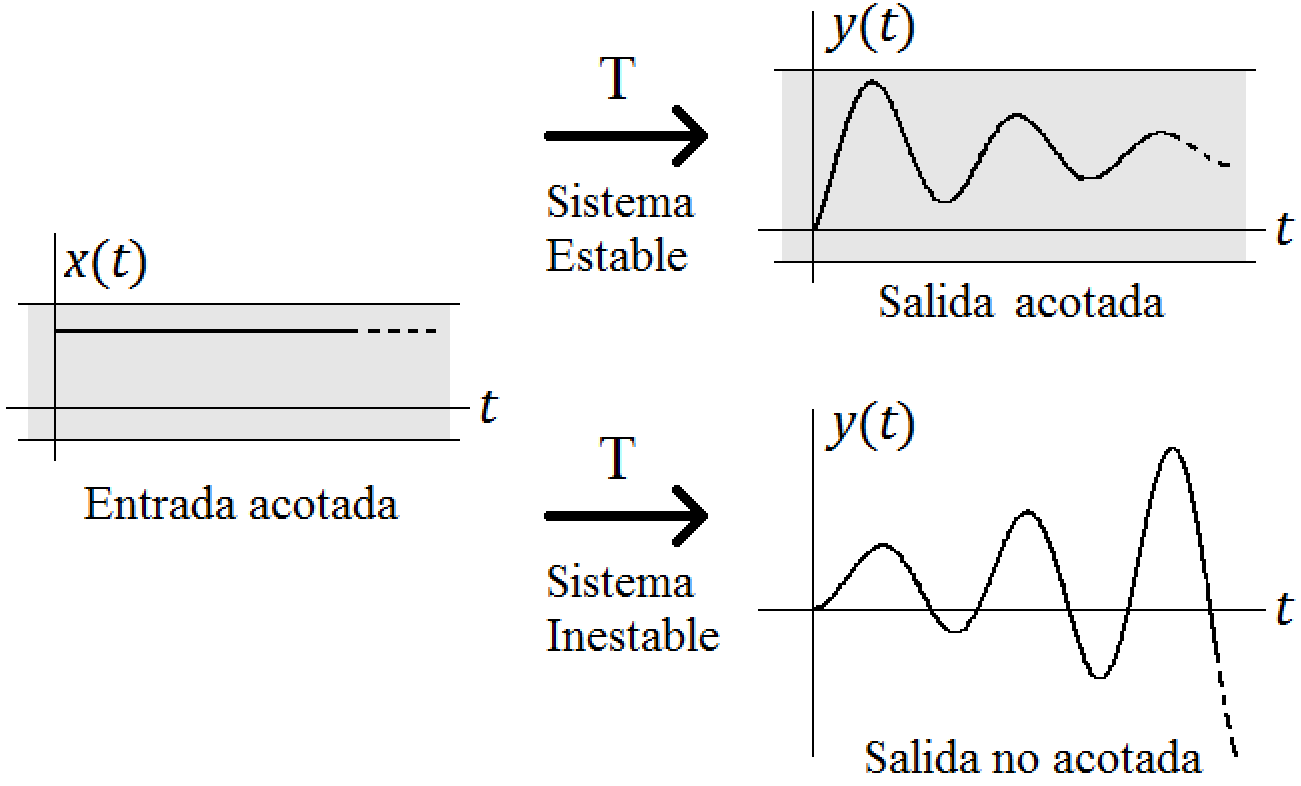
- Causalidad

Un sistema causal o no anticipativo es aquel responde después de que se presenta la señal de entrada y no antes.



- Estabilidad

Un sistema es estable en el sentido de entrada acotada-salida acotada (estable BIBO), si toda entrada acotada produce una salida acotada.



2. SISTEMAS LINEALES E INVARIANTES EN EL TIEMPO

- Definición

Un sistema lineal e invariante en el tiempo (sistema LTI) continuo o discreto es aquel que posee las propiedades de linealidad e invariancia en el tiempo. De aquí en adelante, el curso se enfocará en el análisis de este tipo de sistemas.

Para un sistema LTI continuo (o discreto) T con respuesta al impulso unitario $h(t) = T\{\delta(t)\}$ (o $h[n] = T\{\delta[n]\}$), se puede demostrar que:

Sistema LTI continuo

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\;h(t)\;} \longrightarrow y(t)$$

$$y(t) = x(t) \underbrace{* \, h(t)}_{T}$$

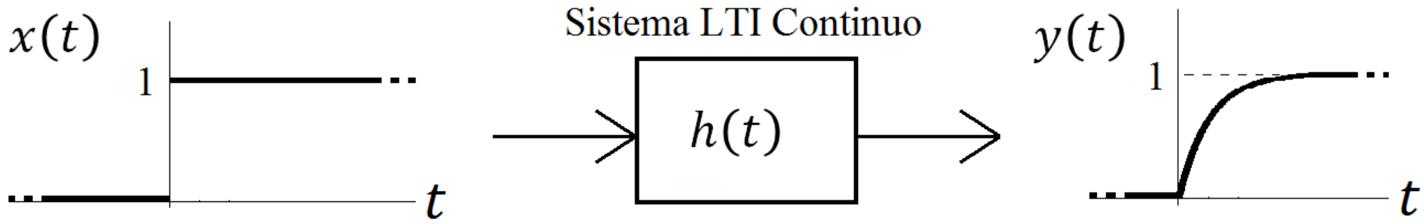
Sistema LTI discreto

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\;h[n]\;} \longrightarrow y[n]$$

$$y[n] = x[n] \underbrace{* \, h[n]}_{T}$$

Entonces, <u>las características de cualquier sistema LTI están completamente determinadas por su respuesta al impulso unitario</u>.

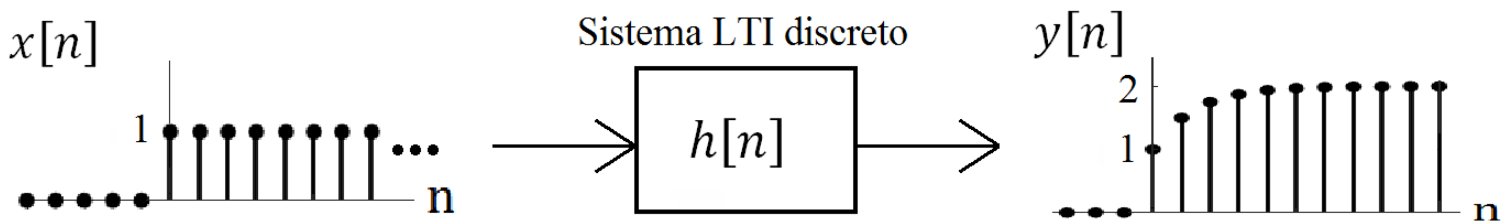
Ejemplo



$x(t) = u(t)$

$h(t) = 2e^{-2t}u(t)$

$y(t) = x(t) * h(t)$
$= [1 - e^{-2t}]u(t)$



$x[n] = u[n]$

$h[n] = 0.5^n u[n]$

$y[n] = x[n] * h[n]$
$= [\,2 - 0.5^n\,]u[n]$

En el tema 3, utilizando la transformada de Laplace (transformada Z), se verá un método muy eficiente para determinar $y(t) = x(t) * h(t)$ ($y[n] = x[n] * h[n]$).

Para la respuesta de un sistema LTI continuo o discreto se tiene que:

$$y = y_p + y_h$$

y_p es <u>la respuesta permanente del sistema</u> y persiste mientras dure la entrada.

y_h es <u>la respuesta transitoria del sistema</u> y tiende a 0 conforme t ó n tiende a infinito, cuando el sistema es estable.

Ejemplo

Para las respuestas de los sistemas LTI en el ejemplo anterior se tiene que:

$$y(t) = \underbrace{u(t)}_{y_p(t)} + \underbrace{-e^{-2t}u(t)}_{y_h(t)}$$

$$y[n] = \underbrace{2u[n]}_{y_p[n]} + \underbrace{-0.5^n u[n]}_{y_h[n]}$$

Causalidad en términos de la respuesta al impulso

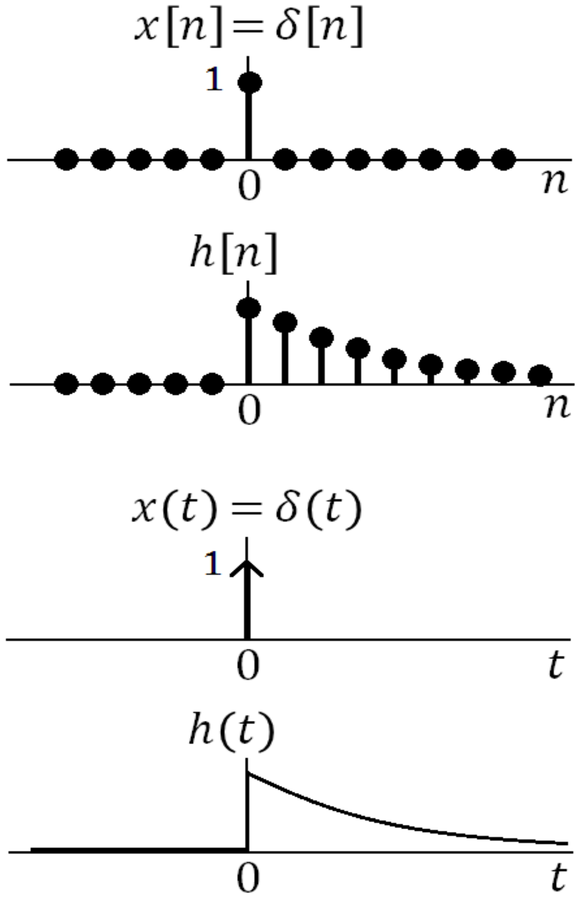
Para que un sistema LTI sea causal, su respuesta al impulso debe cumplir con:

$$h[n] = 0, \text{ para } n < 0$$

en el caso discreto, y con

$$h(t) = 0, \text{ para } t < 0$$

en el caso continuo.



Estabilidad en términos de la respuesta al impulso

Para que un sistema LTI sea estable, su respuesta al impulso debe cumplir con:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty$$

en el caso discreto (i.e. $h[n]$ es absolutamente sumable), y con

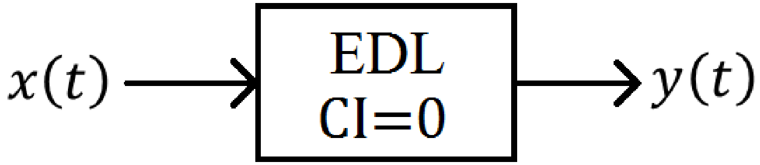
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < \infty$$

en el caso continuo (i.e. $h(t)$ es absolutamente integrable).

En el tema 3 se verá un método muy eficiente para determinar la estabilidad de un sistema LTI, utilizando la T. de Laplace en el caso continuo, y utilizando la transformada Z en el caso discreto.

Sistemas LTI continuos representados mediante EDLs

Una ecuación diferencial lineal (EDL) de coeficientes constantes de orden N junto con condiciones iniciales nulas (CI $=0$) describe un sistema LTI causal:



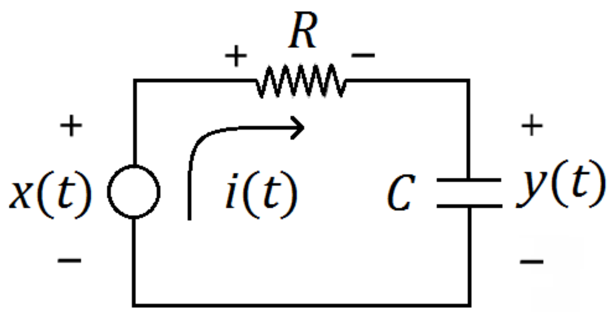
$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \qquad (3)$$

CI nulas $\quad \dfrac{d^k y(0)}{dt^k} = 0, \qquad k = 0, 1, .., N-1$

En un sistema modelado por una EDL junto con CI=0, a $y(t)$ se le conoce como respuesta de estado cero o resp. forzada del sistema.

Ejemplo

El siguiente sistema eléctrico (circuito RC)



$x(t)$: voltaje de entrada

$y(t)$: voltaje de salida

está modelado por la siguiente EDL de orden $N = 1$:

$$RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

Si $x(t) = 1u(t)$, al resolver la EDL anterior se obtiene la sol. general:

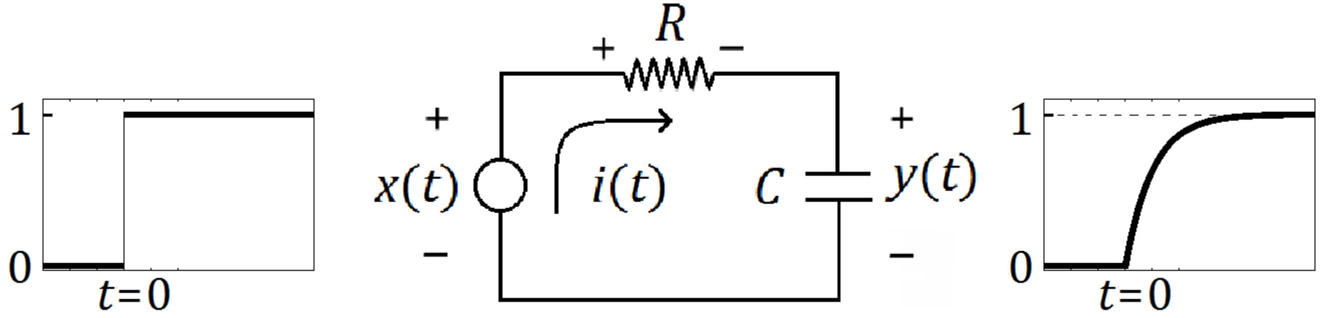
$$y(t) = [\ \underbrace{1}_{y_p(t)} + \underbrace{C_1 e^{-\frac{1}{RC}t}}_{y_h(t)}\ ]\, u(t)$$

Considerando CI nulas, i.e. $y(0) = 0$, de la ec. anterior se tiene que:

$$0 = 1 + C_1 e^{-\frac{1}{RC}0} \Rightarrow \; C_1 = -1$$

Con condiciones iniciales nulas, el circuito RC se comporta como un sistema LTI con respuesta (de estado cero) al escalón:

$$y(t) = [1 - e^{-\frac{1}{RC}t}]\, u(t)$$



Sistemas discretos FIR

Son aquellos sistemas discretos LTI con respuesta al impulso de duración finita. En la práctica se implementan mediante la suma de convolución.

Ejemplo

Dada la secuencia $x[n] = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 5\}$ y el sistema LTI FIR con respuesta al impulso $h[n] = \{\underset{\uparrow}{4}, 2, 1\}$, obtener $y[n] = x[n] * h[n]$.

Solución

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=0}^{Lh-1} h[k]x[n-k]$$

Lx=4 $x[n]=\{\underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 5\}$

Lh=3 $h[n]=\{\underset{\uparrow}{4}, 2, 1\}$

$$y[n]=\sum_{k=0}^{Lh-1} h[k]x[n-k]$$

		k = -3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
	$h[k]$	0	0	0	4	2	1	0	0	0
n=0	$x[-k]$	5	3	2	1	0	0			
n=1	$x[1-k]$		5	3	2	1	0			
n=2	$x[2-k]$			5	3	2	1			
n=3	$x[3-k]$				5	3	2	1		
n=4	$x[4-k]$				0	5	3	2	1	
n=5	$x[5-k]$				0	0	5	3	2	1

$$y[0]=\overbrace{(4,2,1)}^{h[k]}\bullet\overbrace{(1,0,0)}^{x[n-k]}=4$$

$$y[1]=(4,2,1)\bullet(2,1,0)=10$$

$$y[2]=(4,2,1)\bullet(3,2,1)=17$$

$$y[3]=(4,2,1)\bullet(5,3,2)=28$$

$$y[4]=(4,2,1)\bullet(0,5,3)=13$$

$$y[5]=(4,2,1)\bullet(0,0,5)=5$$

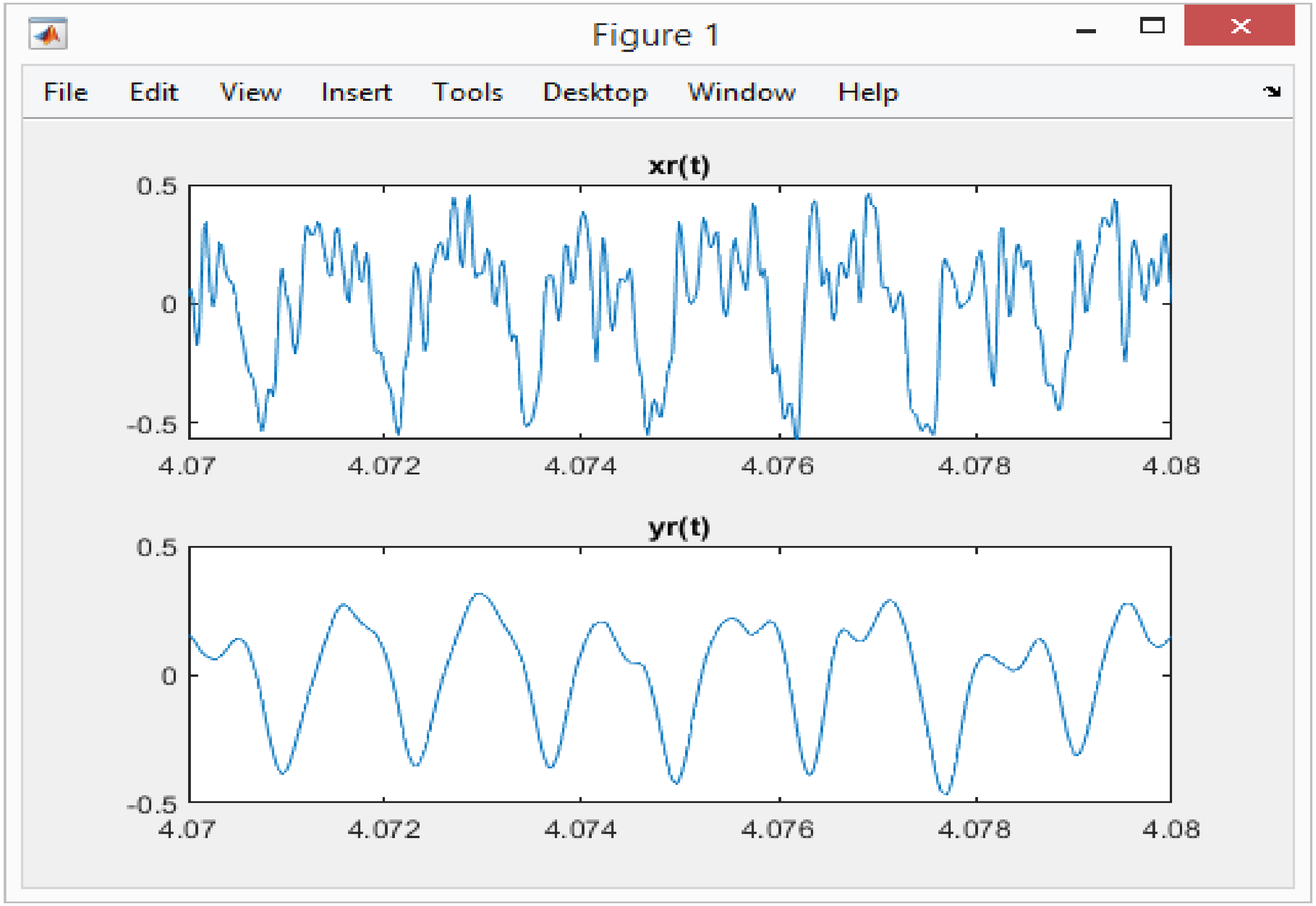
Ly=Lx+Lh-1=6 $y[n]=\{\underset{\uparrow}{4}, 10, 17, 28, 13, 5\}$

```matlab
function y = f_conv(x,h)   %Calcula y[n] = x[n]*h[n]
    Lx = max(size(x));     %Lx de x = [ x[0],x[1],...,x[Lx-1] ]
    Lh = max(size(h));     %Lh de h = [ h[0],h[1],...,h[Lh-1] ]
    xn_k = zeros(1,Lh);    %xn_k = [0,0,...,0], de duración Lh
    x = [x zeros(1,Lh-1)]; %x = [x[0],...,x[Lx-1],0,0,0,0]
    y = zeros(1,Lx+Lh-1);  %y = [0,0,0,...,0],  Ly=Lx+Lh-1

    n=1;
    while n <= Lx+Lh-1
        xn_k(1) = x(n);
        for k = Lh : -1 : 2
            y(n) = y(n) + h(k)*xn_k(k);
            xn_k(k) = xn_k( k-1 );
        end
        y(n) = y(n) + h(1)*xn_k(1);
        n = n+1;
    end
end
```

Función en Matlab para calcular la convolución.

```matlab
[xLR,Fs] = audioread('x_kitt.mp3');            %formato wav,mp3,m4a
x = mean(xLR,2).';   %obtención x[n]=xc(nT) monoaural. 2=>prom cols

h = (1/256)*[3,5,7,9,12,15,17,19,21,22,22,22,21,19,17,15,12,9,7,5,3];
y = f_conv(x,h);     %y[n] = x[n]*h[n] aplicación del sistema FIR

Lx = max(size(x));              %num de muestras en x[n]
n = 0:1:Lx-1;                   %Arreglo de indices de tiempo discreto
t1 = 4.07;                      %Instante inicial a desplegar en [seg]
tc = [ t1, t1 + 10/1000 ];      %Intervalo de tiempo a desplegar [seg]
figure
subplot(2,1,1)
plot( n*(1/Fs), x )               %T=1/Fs Periodo de muestreo en [seg]
xlim( tc )
title('xr(t)')
subplot(2,1,2)
plot( n*(1/Fs), y(1:Lx) )         %T=1/Fs Periodo de muestreo en [seg]
xlim( tc )
title('yr(t)')

%La tarjeta de sonido interpola a:
player = audioplayer( x, Fs );
playblocking(player);                %x[n] para reproducir xr(t)
player = audioplayer( y, Fs );
playblocking(player);                %y[n] para reproducir yr(t)
```

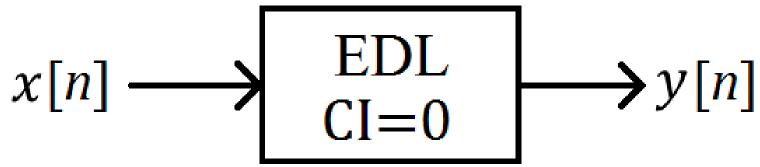
Código de Matlab para aplicar un sistema FIR a una señal de audio.



Señales de audio muestreadas a Fs = 44100[Hz]

Sistemas discretos IIR

Son sistemas discretos LTI con respuesta al impulso de duración infinita. Un sistema IIR causal se puede describir mediante una ecuación en diferencias lineal (EDL) de coeficientes constantes de orden $N > 0$, junto con condiciones iniciales nulas $(\mathrm{CI} = 0)$:



$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \qquad (4)$$

CI nulas $y[-1] = y[-2] = \cdots = y[-N] = 0$

Con $N > 0$, la ec. (4) puede reescribirse <u>en su forma recursiva</u> como:

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left(\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]\right), \qquad (5)$$

La ecuación (5) expresa el valor de la salida en el instante n, en función de la señal de entrada y de N valores previos de la señal de salida.

En la práctica, los sistemas IIR se implementan mediante ecuaciones en diferencias en su forma recursiva.

Ejemplo

Para el sistema LTI descrito por la EDL de orden 2

$$y[n] - 2y[n-1] + 4y[n-2] = 2x[n] + 5x[n-1] - 3x[n-2]$$

Considerando la entrada $x[n] = \{\, \underset{\uparrow}{1}, 2, 3 \,\}$, obtener $y[n]$ para n = 0, 1, 2, 3, 4.

Sol.

Primero se reescribe la ec. en diferencias en su forma recursiva:

$$y[n] = 2x[n] + 5x[n-1] - 3x[n-2] + 2y[n-1] - 4y[n-2]$$

Como el sistema es LTI se consideran CI nulas: $y[-1] = y[-2] = 0$.

Entonces se procede a obtener $y[n]$ para n = 0, 1, 2, 3, 4:

$$y[n] = 2x[n] + 5x[n-1] - 3x[n-2] + 2y[n-1] - 4y[n-2]$$

$$\begin{aligned}
y[0] &= 2x[0] + 5x[-1] - 3x[-2] + 2y[-1] - 4y[-2] \\
&= 2 \times 1 + 5 \times 0 - 3 \times 0 + 2 \times 0 - 4 \times 0 = 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y[1] &= 2x[1] + 5x[0] - 3x[-1] + 2y[0] - 4y[-1] \\
&= 2 \times 2 + 5 \times 1 - 3 \times 0 + 2 \times 2 - 4 \times 0 = 13
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y[2] &= 2x[2] + 5x[1] - 3x[0] + 2y[1] - 4y[0] \\
&= 2 \times 3 + 5 \times 2 - 3 \times 1 + 2 \times 13 - 4 \times 2 = 31
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y[3] &= 2x[3] + 5x[2] - 3x[1] + 2y[2] - 4y[1] \\
&= 2 \times 0 + 5 \times 3 - 3 \times 2 + 2 \times 31 - 4 \times 13 = 19
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y[4] &= 2x[4] + 5x[3] - 3x[2] + 2y[3] - 4y[2] \\
&= 2 \times 0 + 5 \times 0 - 3 \times 3 + 2 \times 19 - 4 \times 31 = -95
\end{aligned}$$

$$y[n] = \{ \underset{\uparrow}{2},\ 13,\ 31,\ 19, -95, \dots \}$$

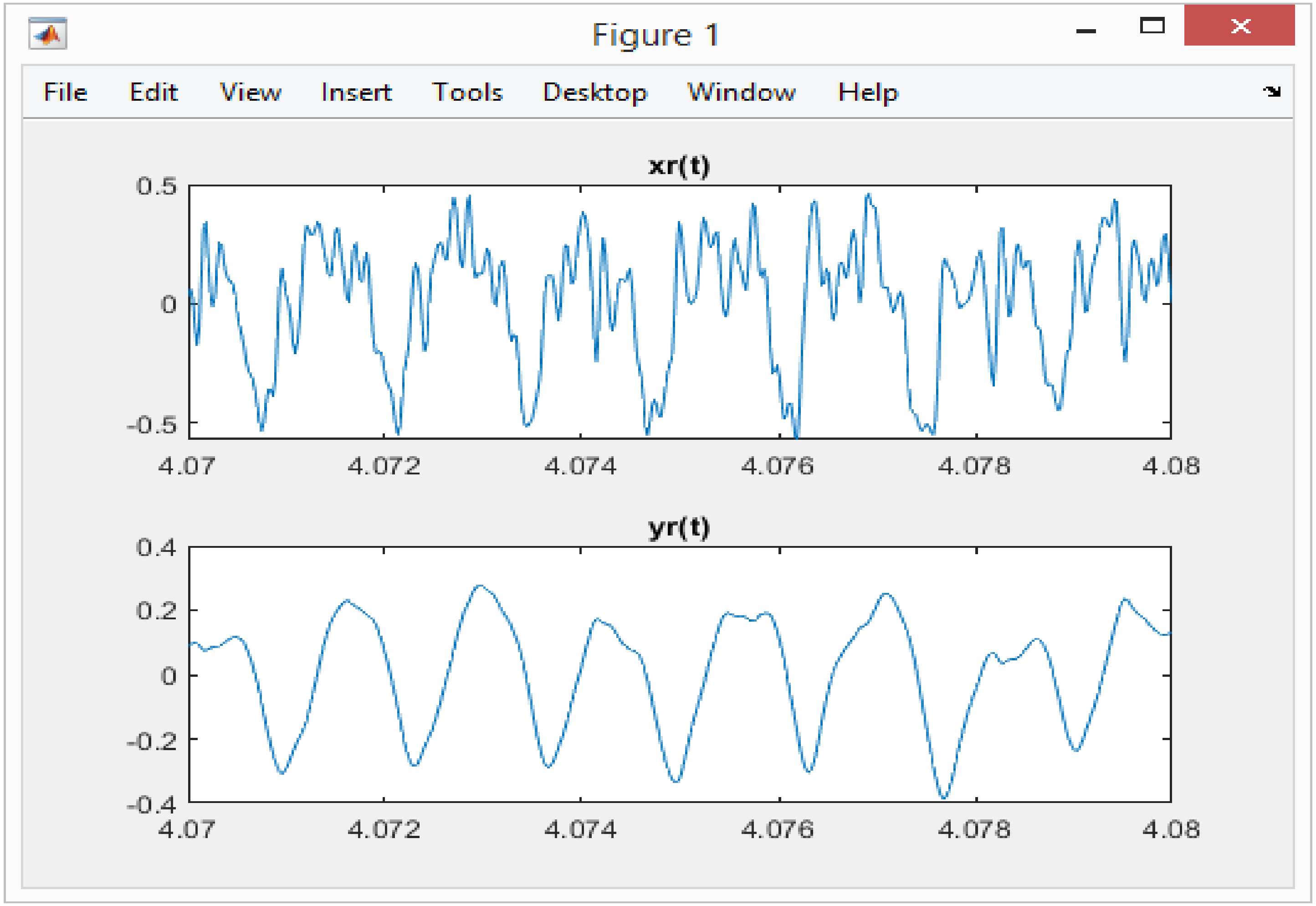
```matlab
%yn = f_recN2(a,b,xn)  resuelve de forma recursiva la EDL
%       a0y[n]+a1y[n-1]+a2y[n-2] = b0x[n]+b1x[n-1]+b2x[n-2]
%Recibe        a = [ a0  a1  a2 ], b = [ b0  b1  b2 ],
%Recibe       xn = [ x[0],x[1],...,x[Lx-1] ]
%Devuelve     yn = [ y[0],y[1],...,y[Lx-1] ]

function yn = f_recN2(a,b,xn)
    xn_1 = 0;  % se considera x[n] casual
    xn_2 = 0;  % se considera x[n] casual
    yn_1 = 0;  % se considera sistema LTI => CIs=0
    yn_2 = 0;  % se considera sistema LTI => CIs=0
    Lx = max(size(xn)); % Longitud del arreglo xn
    yn = zeros(1,Lx);   % para los PRIMEROS Lx VALORES de y[n]

    for i = 1:1:Lx
       %y[n] = ( 1/a0 )( b0x[n]+b1x[n-1]+b2x[n-2]-a1y[n-1]-a2y[n-2] )
        yn(i) = (1/a(1))*( b(1)*xn(i) + b(2)*xn_1 + b(3)*xn_2...
                              - a(2)*yn_1 - a(3)*yn_2 );
        yn_2 = yn_1;
        yn_1 = yn(i);
        xn_2 = xn_1;
        xn_1 = xn(i);
    end
end
```

Función en Matlab que implementa la ec. (5) para $N = 2$.

```
[xLR,Fs] = audioread('x_kitt.mp3');                %formato wav,mp3,m4a
x = mean(xLR,2).';    %obtención x[n]=xc(nT) monoaural. 2=>prom cols

as = [ 218, -392, 178.2 ];
bs = [ 1, 2, 1 ];
y = f_recN2(as,bs,x);                 %aplicación de un sistema IIR, N=2

Lx = max(size(x));                 %num de muestras en x[n]
n = 0:1:Lx-1;                      %Arreglo de indices de tiempo discreto
t1 = 4.07;                         %Instante inicial a desplegar en [seg]
tc = [ t1, t1 + 10/1000 ];         %Intervalo de tiempo a desplegar [seg]
figure
subplot(2,1,1)
plot( n*(1/Fs), x )                  %T=1/Fs Periodo de muestreo en [seg]
xlim( tc )
title('xr(t)')
subplot(2,1,2)
plot( n*(1/Fs), y(1:Lx) )            %T=1/Fs Periodo de muestreo en [seg]
xlim( tc )
title('yr(t)')

%La tarjeta de sonido interpola a:
player = audioplayer( x, Fs );
playblocking(player);                   %x[n] para reproducir xr(t)
player = audioplayer( y, Fs );
playblocking(player);                   %y[n] para reproducir yr(t)
```

Código de Matlab que aplica a una señal de audio el sistema IIR:

$$218y[n] - 392y[n-1] + 178.2y[n-2] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2]$$



Señales de audio muestreadas a Fs = 44100[Hz]

3. ANÁLISIS DE SISTEMAS LTI, MEDIANTE LAS TRANSFORMACIONES DE LAPLACE Y Z

Representación de los sistemas LTI continuos mediante la transformada de Laplace

Transformada de Laplace (unilateral)

La transformada de Laplace de una señal $x(t)$ se define como:

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) = \int_{0}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt \qquad (6)$$

$X(s)$ es una función de la variable compleja $s = \sigma + j\omega$. La relación entre $x(t)$ y $X(s)$ tambien se puede denotar como:

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$$

Para la transformada inversa de Laplace se tiene la expresión

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)\, e^{st} ds$$

Principales propiedades de la transformada de Laplace		
Propiedad	Señales causales	T. de Laplace
	$x(t)$ $x_1(t)$ $x_2(t)$	$X(s)$ $X_1(s)$ $X_2(s)$
Linealidad	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(s) + bX_2(s)$
Convolución	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$
Diferenciación en el dominio del tiempo	$\frac{d^n}{dt^n}x(t)$	$s^n X(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} x^{(k-1)}(0)$
Desplazamiento en s	$e^{at}x(t)$	$X(s-a)$
Diferenciación en el dominio de s	$-tx(t)$	$\frac{d}{ds}X(s)$

Transformadas de Laplace de funciones elementales		
Señales causales	T. de Laplace	ROC
$\delta(t)$	1	El plano s
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$Re\{s\} > 0$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$Re\{s\} > -a$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$Re\{s\} > -a$
$e^{-at}\cos(\omega_0 t)\,u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+{\omega_0}^2}$	$Re\{s\} > -a$
$e^{-at}\operatorname{sen}(\omega_0 t)\,u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2+{\omega_0}^2}$	$Re\{s\} > -a$

Transformada inversa útil en el método de expansión en fracciones parciales, válida cuando $s^2 + \beta s + \gamma$ tiene raíces complejas conjugadas (i.e. $\beta^2 - 4\gamma < 0$):

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Bs+C}{s^2+\beta s+\gamma}\right\} = e^{-at}[A_1 \cos(\omega_0 t) + A_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t)]u(t)$$

Donde

$$a = 0.5\beta, \qquad \omega_0 = 0.5\sqrt{4\gamma - \beta^2}$$

y

$$A_1 = B, \qquad A_2 = \frac{2C - B\beta}{2\omega_0}$$

Función de transferencia de sistemas continuos LTI

Como ya se estudió, para un sistema LTI continuo, con respuesta al impulso $h(t)$, se tiene en el dominio del tiempo que:

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

Aplicando la T. de Laplace y su propiedad de convolución a la ec. anterior, se tiene en el dominio de la transformada que:

$$X(s) \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow Y(s)$$

$$Y(s) = X(s)H(s)$$

$\mathcal{L}\{h(t)\} = H(s) = \dfrac{Y(s)}{X(s)}$ es la <u>función de transferencia del sistema</u>.

Ejemplo
Dado un sistema LTI con respuesta al impulso $h(t) = 2e^{-2t}u(t)$, determinar la respuesta del sistema a la entrada $x(t) = u(t)$.

Sol.
De tablas de la transformada de Laplace tiene que:

$$X(s) = \frac{1}{s} \quad \text{y} \quad H(s) = 2\frac{1}{s+2}$$

Entonces

$$Y(s) = X(s)H(s) = \left(\frac{1}{s}\right)\left(\frac{2}{s+2}\right)$$

Como $Y(s)$ es un función racional propia, para obtener $y(t)$ median-te el uso de tablas de la T. de Laplace, se procede a realizar la expan-sión en fracciones parciales de $Y(s)$:

$$\frac{2}{s(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2}$$

Multiplicando ambos lados de la ec. anterior por $s(s+2)$ se obtiene:

$$2 = A(s+2) + Bs$$

De la ec. anterior

con $\quad s = 0, \qquad 2 = A(2) \quad \Rightarrow \quad A = 1$

con $\quad s = -2, \qquad 2 = B(-2) \quad \Rightarrow \quad B = -1$

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}$$

Aplicando la T. Inversa a la ec. anterior, "por tablas", se obtiene:

$$y(t) = u(t) - e^{-2t}u(t) = [1 - e^{-2t}]u(t)$$

Para obtener $H(s)$ en el caso de un sistema LTI continuo representado mediante una EDL junto con CI nulas:

Se aplica la T. de Laplace a ambos lados de la EDL (3)

$$\mathcal{L}\left\{\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k}\right\} = \mathcal{L}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}\right\}$$

Utilizando las propiedades de linealidad y de diferenciación de la T. de Laplace en ambos lados de la ecuación anterior se obtiene:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k s^k Y(s) = \sum_{k=0}^{M} b_k s^k X(s)$$

o bien $$Y(s)\sum_{k=0}^{N} a_k s^k = X(s)\sum_{k=0}^{M} b_k s^k$$

Finalmente, de la ecuación anterior se obtiene:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k = P(s)}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k = Q(s)} \qquad (7)$$

Las raíces del polinomio $P(s)$ se conocen como los ceros del sistema. Las raíces del polinomio $Q(s)$ se conocen como los polos del sistema. En el plano s, cada cero se representa con una "o" y cada polo se representa con una "×".

<u>Teorema de estabilidad</u>

Un sistema causal con $H(s)$ racional es estable ($h(t)$ es absolutamente integrable) si y solo si todos los polos de $H(s)$ se ubican en la parte izquierda del plano s (i.e. todos los polos tienen parte real negativa).

Ejemplo:
Dado el sistema LTI causal representado por la siguiente EDL de orden $N = 3$.

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + \frac{d^2y(t)}{dt^2} - 4\frac{dy(t)}{dt} - 4y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 9x(t)$$

Obtener $H(s)$ y determinar si el sistema es estable.

Primero

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^3y(t)}{dt^3} + \frac{d^2y(t)}{dt^2} - 4\frac{dy(t)}{dt} - 4y(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt} + 9x(t)\right\}$$

De las propiedades de linealidad y de diferenciación se obtiene

$$s^3Y(s) + s^2Y(s) - 4sY(s) - 4Y(s) = sX(s) + 9X(s)$$

O bien $\quad (s^3 + s^2 - 4s - 4)\, Y(s) = (s + 9) X(s)$

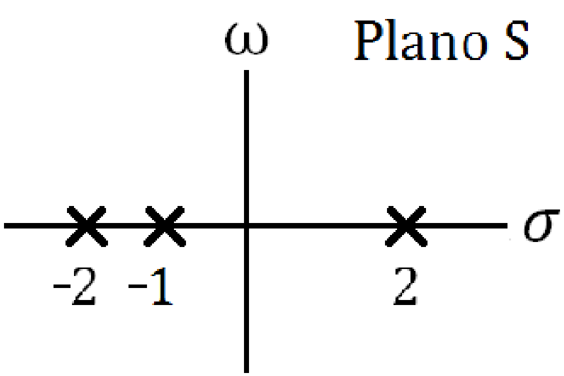
Finalmente

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s + 9}{s^3 + s^2 - 4s - 4}$$

Para este sistema $Q(s) = s^3 + s^2 - 4s - 4$, y sus polos son:

$$P_1 = -2, \quad P_2 = -1, \quad P_3 = 2$$

el sistema no es estable, ya que un polo de $H(s)$ cae en la parte derecha del plano s (i.e. un polo tiene parte real positiva).



Ejemplo:
Dado el sistema LTI causal representado por la siguiente EDL de orden $N = 2$.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 4x(t)$$

Obtener $H(s)$, determinar si el sistema es estable, y obtener la respuesta del sistema a $x(t) = u(t)$.

Primero

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t)\right\} = \mathcal{L}\{4x(t)\}$$

De las propiedades de linealidad y de diferenciación se obtiene

$$s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = 4X(s)$$

O bien $$(s^2 + 3s + 2)\,Y(s) = 4X(s)$$

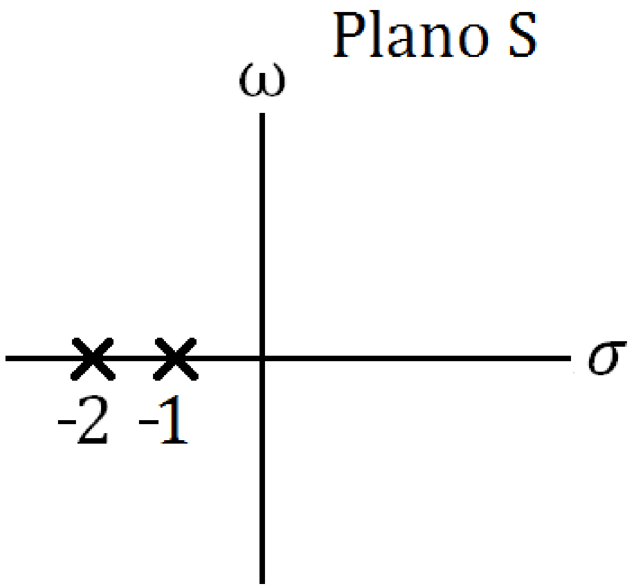
Finalmente
$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{4}{s^2 + 3s + 2}$$

Para este sistema $Q(s) = s^2 + 3s + 2 = as^2 + bs + c$, y sus polos son:
$$P_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(2)}}{2(1)}$$
$$P_1 = -1, \qquad P_2 = -2$$

Entonces

$$H(s) = \frac{4}{s^2 + 3s + 2} = \frac{4}{(s+1)(s+2)}$$

el sistema es estable, ya que los 2 polos de $H(s)$ caen en la parte izquierda del plano s (los 2 polos tienen parte real negativa).



Para obtener la respuesta del sistema a $x(t) = u(t)$:

Primero, de tablas se obtiene que $X(s) = \frac{1}{s}$, luego se tiene que:

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{4}{(s+1)(s+2)}\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$Y(s) = \frac{4}{s(s+1)(s+2)}$$

Como es un función racional propia, es posible realizar la expansión en fracciones parciales de $Y(s)$:

$$\frac{4}{s(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}$$

Multiplicando ambos lados de la ec. anterior por $s(s+1)(s+2)$ se obtiene:

$$4 = A(s+1)(s+2) + Bs(s+2) + Cs(s+1)$$

con $s = -1, \quad 4 = B(-1)(1) \quad \Rightarrow \quad B = -4$

con $s = -2, \quad 4 = C(-2)(-1) \quad \Rightarrow \quad C = 2$

con $s = 0, \quad 4 = A(1)(2) \quad \Rightarrow \quad A = 2$

$$Y(s) = \frac{2}{s} - \frac{4}{s+1} + \frac{2}{s+2}$$

Aplicando la T. Inversa de Laplace a la ecuación anterior se obtiene:

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s} - \frac{4}{s+1} + \frac{2}{s+2}\right\}$$

$$y(t) = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}$$

Mediante tablas

$$y(t) = 2u(t) - 4e^{-t}u(t) + 2e^{-2t}u(t)$$

$$y(t) = [2 - 4e^{-t} + 2e^{-2t}]u(t)$$

Ejemplo:
Dado el sistema LTI causal con función de transferencia

$$H(\underline{s}) = \frac{5}{\underline{s}^2 + 2\underline{s} + 5}$$

determinar si el sistema es estable y obtener la respuesta del sistema a la entrada $x(t) = u(t)$.

Para este sistema $Q(\underline{s}) = \underline{s}^2 + 2\underline{s} + 5 = a\underline{s}^2 + b\underline{s} + c$, y sus polos son:

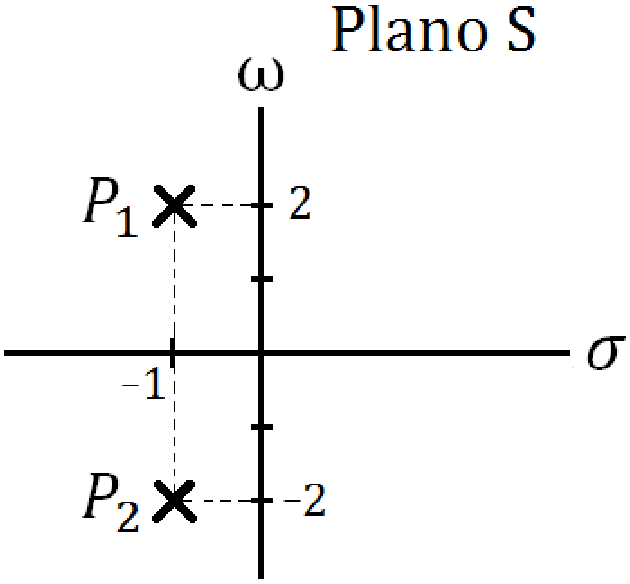
$$P_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(5)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm 4j}{2}$$

$$P_{1,2} = -1 \pm 2j$$

Entonces

$$H(s) = \frac{5}{\underline{s}^2 + 2\underline{s} + 5} = \frac{5}{(\underline{s} - P_1)(\underline{s} - P_2)}, \qquad P_{1,2} = -1 \pm 2j$$

el sistema es estable, ya que los 2 polos de $H(\underline{s})$ caen en la parte izquierda del plano s (los 2 polos tienen parte real negativa (-1)).



Para obtener la respuesta del sistema a $x(t) = u(t)$:

Primero, de tablas se obtiene que $X(s) = \frac{1}{s}$, luego se tiene que:

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{5}{s^2 + 2s + 5}\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$Y(s) = \frac{5}{s(s^2 + 2s + 5)}$$

Entonces, se realiza expansión en fracciones parciales de $Y(s)$:

$$\frac{5}{\underline{s}\left(\underline{s}^2+2\underline{s}+5\right)}=\frac{A}{\underline{s}}+\frac{B\underline{s}+C}{\underline{s}^2+2\underline{s}+5}$$

Multiplicando ambos lados de la ec. anterior por $\underline{s}\left(\underline{s}^2+2\underline{s}+5\right)$ se obtiene:

$$5=A\left(\underline{s}^2+2\underline{s}+5\right)+\underline{s}\left(B\underline{s}+C\right)$$

con $s=0,\qquad 5=A(5)\quad\Rightarrow\quad A=1$

con $s=1,\qquad 5=1(8)+1(B+C\ )\quad\Rightarrow\quad B+C=-3$

con $s=-1,\qquad 5=1(4)-(-B+C)\quad\Rightarrow\quad B-C=\ 1$

$$B=-1,\qquad C=-2$$

Entonces

$$Y(s)=\frac{1}{\underline{s}}+\frac{-\underline{s}-2}{\underline{s}^2+2\underline{s}+5}$$

O bien

$$Y(s) = \frac{1}{\underline{s}} - \frac{\underline{s} + 2}{\underline{s}^2 + 2\underline{s} + 5}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Bs+C}{s^2+\beta s+\gamma}\right\} = e^{-at}[A_1\cos(\omega_0 t) + A_2\,\mathrm{sen}(\omega_0 t)]u(t)$$

$$a = 0.5\beta = 0.5(2) = 1$$

$$\omega_0 = 0.5\sqrt{4\gamma - \beta^2} = 0.5\sqrt{4(5) - (2)^2} = 2$$

$$A_1 = B = 1, \qquad A_2 = \frac{2C - B\beta}{2\omega_0} = \frac{2(2) - (1)(2)}{2(2)} = 0.5$$

Aplicando a $Y(s)$ la T. de Laplace inversa "por tablas", se obtiene:

$$y(t) = u(t) - e^{-t}\left[\cos(2t) + \tfrac{1}{2}sen(2t)\right]u(t)$$

Ejemplo:
Dado el sistema LTI causal con función de transferencia

$$H(s) = \frac{2s^2 + 10s + 9}{s^3 + 5s^2 + 8s + 4}$$

determinar si el sistema es estable y obtener $h(t)$.

Para este sistema se tiene que

$$\begin{aligned} Q(s) &= s^3 + 5s^2 + 8s + 4 \\ &= (s+1)(s+2)^2 \end{aligned}$$

y sus polos son:

$$P_1 = -1, \qquad P_2 = P_3 = -2$$

Como todos los polos tienen parte real negativa, el sistema es estable.

Expansión en fracciones parciales de $H(s)$:

$$\frac{2s^2+10s+9}{s^3+5s^2+8s+4}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{(s+2)^2}$$

Se puede comprobar que (tarea moral):

$$A=1, \qquad B=1, \qquad C=3$$

Por lo que

$$H(s)=\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+2}+\frac{3}{(s+2)^2}$$

y de tablas

$$h(t)=[e^{-t}+e^{-2t}+3te^{-2t}]u(t)$$

Ejemplo (con CI no nulas)
Dado el sistema representado por la siguiente EDL de orden $N = 1$

$$y'(t) + 2y(t) = 2x(t)$$

con condiciones iniciales no nulas, $y(0) \neq 0$. Obtener la respuesta del sistema a $x(t) = u(t)$.

Aplicando la T. de Laplace y su propiedad de linealidad se obtiene

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} + 2\mathcal{L}\{y(t)\} = 2\mathcal{L}\{x(t)\}$$

Aplicando la propiedad de diferenciación en el tiempo de la T. de Laplace se obtiene

$$sY(s) - y(0) + 2Y(s) = 2X(s)$$

$$sY(s) + 2Y(s) = 2X(s) + y(0)$$

$$(s+2)Y(s) = 2X(s) + y(0)$$

$$Y(s) = \frac{2}{s+2}X(s) + \frac{1}{s+2}y(0)$$

De tablas, para $x(t) = u(t)$ se tiene que $X(s) = \frac{1}{s}$ y

$$Y(s) = \frac{2}{(s+2)s} + y(0)\frac{1}{s+2}$$

Entonces donde sea necesario, se procede a realizar la expansión en fracciones parciales de los sumandos de $Y(s)$:

$$\frac{2}{(s+2)s} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s}$$

Multiplicando ambos lados de la ec. anterior por $(s+2)s$ se obtiene:

$$2 = As + B(s+2)$$

con $s = 0, \qquad 2 = B(2) \quad \Rightarrow \quad B = 1$

con $s = -2, \qquad 2 = A(-2) \quad \Rightarrow \quad A = -1$

De esta forma se obtiene que

$$Y(s) = \frac{-1}{s+2} + \frac{1}{s} + y(0)\frac{1}{s+2}$$

Aplicando la T. de Laplace inversa por tablas se obtiene

$$y(t) = -e^{-2t}u(t) + u(t) + y(0)e^{-2t}u(t)$$

$$y(t) = \underbrace{[1 - e^{-2t}]u(t)}_{y_{zs}(t)\ \text{res. de estado 0}} \quad + \quad \underbrace{y(0)e^{-2t}u(t)}_{y_{zi}(t)\ \text{res. de entrada 0}}$$

Representación de los sistemas LTI discretos mediante la transformada Z

Transformada Z

La transformada Z de una secuencia $x[n]$ se define como:

$$\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} \qquad (8)$$

$X(z)$ es una función de la variable compleja $z = re^{j\Omega}$. La relación entre $x[n]$ y $X(z)$ tambien se puede denotar como:

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(z)$$

Para la transformada Z inversa se tiene la expresión

$$\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint X(z)z^{n-1}dz$$

Ejemplo:
Obtener la transformada Z de $x[n] = a^n u[n]$.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{a^n u[n]}_{x[n]} z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} (az^{-1})^n$$

como $\sum_{n=0}^{N} b^n = \dfrac{1-b^{N+1}}{1-b}$ $\quad b \neq 1 \quad b \in \mathbb{C}$ entonces

$$X(z) = \lim_{N\to\infty} \frac{1-(az^{-1})^{N+1}}{1-az^{-1}} = \frac{1}{1-az^{-1}}, \qquad \left|az^{-1}\right| < 1$$

$$\mathcal{Z}\{a^n u[n]\} = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \qquad |z| > |a| \quad \text{(ROC)}$$

ROC: región de convergencia de la T. Z (en el plano Z).

Principales propiedades de la transformada Z		
Propiedad	Secuencia	Transformada Z
	$x[n]$ $x_1[n]$ $x_2[n]$	$X(z)$ $X_1(z)$ $X_2(z)$
Linealidad	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1(z) + bX_2(z)$
Convolución	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$
Desplazamiento en n	$x[n-a]$	$z^{-a}X(z)$
Escalamiento en Z	$a^n x[n]$	$X(a^{-1}z)$
Diferenciación en Z	$nx[n]$	$-z\dfrac{dX(z)}{dz}$

Transformadas Z de secuencias elementales		
Secuencia	Transformada Z	ROC
$\delta[n]$	1	El plano z
$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$\rho^n\, cos(\Omega_0 n)\, u[n]$	$\frac{1-(\rho cos\Omega_0)z^{-1}}{1-(2\rho cos\Omega_0)z^{-1}+\rho^2 z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > \rho$
$\rho^n\, sen(\Omega_0 n)\, u[n]$	$\frac{(\rho sen\Omega_0)z^{-1}}{1-(2\rho cos\Omega_0)z^{-1}+\rho^2 z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > \rho$

Transformadas Z de secuencias elementales		
Secuencia	Transformada Z	ROC
$\delta[n]$	1	El plano z
$u[n]$	$\frac{z}{z-1}$	$\lvert z\rvert > 1$
$a^n u[n]$	$\frac{z}{z-a}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$na^n u[n]$	$\frac{az}{(z-a)^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$\rho^n \cos(\Omega_0 n)\, u[n]$	$\frac{z^2-(\rho\cos\Omega_0)z}{z^2-(2\rho\cos\Omega_0)z+\rho^2}$	$\lvert z\rvert > \rho$
$\rho^n \operatorname{sen}(\Omega_0 n)\, u[n]$	$\frac{(\rho\operatorname{sen}\Omega_0)z}{z^2-(2\rho\cos\Omega_0)z+\rho^2}$	$\lvert z\rvert > \rho$

Transformada Z inversa útil en el método de expansión en fracciones parciales, válida cuando $z^2 + \beta z + \gamma$ tiene raíces complejas conjugadas (i.e. $\beta^2 - 4\gamma < 0$):

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{Bz^2+Cz}{z^2+\beta z+\gamma}\right\} = \rho^n[A_1 \cos(\Omega_0 n) + A_2 \operatorname{sen}(\Omega_0 n)]u[n]$$

Donde

$$\rho = \sqrt{\gamma}, \qquad \Omega_0 = \cos^{-1}\left(\frac{-\beta}{2\sqrt{\gamma}}\right)$$

y

$$A_1 = B, \qquad A_2 = \frac{2C - B\beta}{2\rho sen\Omega_0}$$

<u>Función de transferencia de sistemas discretos LTI</u>

Como ya se estudió, para un sistema LTI discreto, con respuesta al impulso $h[n]$, se tiene en el dominio del tiempo que:

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

Aplicando la transformada Z y su propiedad de convolución a la ec. anterior, se tiene en el dominio de la transformada que:

$$X(z) \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow Y(z)$$

$$Y(z) = X(z)H(z)$$

$\mathcal{Z}\{h[n]\} = H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)}$ es la <u>función de transferencia del sistema</u>.

Ejemplo

Dado un sistema LTI con respuesta al impulso $h[n] = 0.5^n u[n]$, determinar la respuesta del sistema a la entrada $x[n] = u[n]$.

Sol.

De tablas de la transformada Z se tiene que:

$$X(z) = \frac{z}{z-1} \quad \text{y} \quad H(z) = \frac{z}{z-0.5}$$

Entonces

$$Y(z) = X(z)H(z) = \left(\frac{z}{z-1}\right)\left(\frac{z}{z-0.5}\right)$$

Como $Y(z)/z$ es una función racional propia, para obtener $y[n]$ mediante el uso de tablas de la T.Z, se procede a realizar la expansión en fracciones parciales de:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z}{(z-1)(z-0.5)}$$

$$\frac{z}{(z-1)(z-0.5)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-0.5}$$

Multiplicando ambos lados de la ec. anterior por $(\mathrm{z}-1)(z-0.5)$ se obtiene:

$$z = A(z-0.5) + B(z-1)$$

De la ec. anterior

con $\quad z = 1, \qquad 1 = A(0.5) \qquad \Rightarrow \quad A = 2$

con $\quad z = 0.5, \quad 0.5 = B(-0.5) \quad \Rightarrow \quad B = -1$

$$Y(z) = \frac{2z}{z-1} - \frac{z}{z-0.5}$$

Aplicando la T. Z. inversa a la ec. anterior, "por tablas", se obtiene:

$$y[n] = 2u[n] - 0.5^n u[n] = \underline{[2-0.5^n]u[n]}$$

Para obtener $H(z)$ en el caso de un sistema LTI discreto representado mediante una EDL junto con CI nulas:

Se aplica la transformada Z a ambos lados de la EDL (4)

$$\mathcal{Z}\left\{\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k]\right\} = \mathcal{Z}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]\right\}$$

Utilizando las propiedades de linealidad y de desplazamiento en n de la transformada Z en ambos lados de la ec. anterior se obtiene:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X(z)$$

o bien $$Y(z)\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = X(z)\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}$$

Finalmente, de la ecuación anterior se obtiene:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{z^N \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} = P(z)}{z^N \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = Q(z)} \qquad (9)$$

Cuando el sist. representado por $H(z)$ es causal se tiene que $N \geq M$, lo que implica que $P(z)$ y $Q(z)$ son polinomios. Las raíces de $P(z)$ se conocen como los ceros del sistema. Las raíces de $Q(z)$ se conocen como los polos del sistema. En el plano z, cada cero se representa con una "o" y cada polo se representa con una "×".

Teorema de estabilidad

Un sist. causal con $H(z)$ racional es estable ($h[n]$ es absolutamente sumable) si y solo si todos los polos de $H(z)$ caen dentro del círculo unitario del plano z (i.e. todos los polos tienen magnitud menor a 1).

Ejemplo:
Dado el sistema LTI causal representado por la siguiente EDL de orden $N = 3$.

$$y[n] + 0.5y[n-1] - 4y[n-2] - 2y[n-3] = x[n] + x[n-1]$$

Obtener $H(z)$ y determinar si el sistema es estable.

Primero

$$\mathcal{Z}\{y[n] + 0.5y[n-1] - 4y[n-2] - 2y[n-3]\} = \mathcal{Z}\{x[n] + x[n-1]\}$$

De las propiedades de linealidad y de desplazamiento en el tiempo se obtiene

$$Y(z) + 0.5z^{-1}Y(z) - 4z^{-2}Y(z) - 2z^{-3}Y(z) = X(z) + z^{-1}X(z)$$

O bien $\quad (1 + 0.5z^{-1} - 4z^{-2} - 2z^{-3})\,Y(z) = (1 + z^{-1})X(z)$

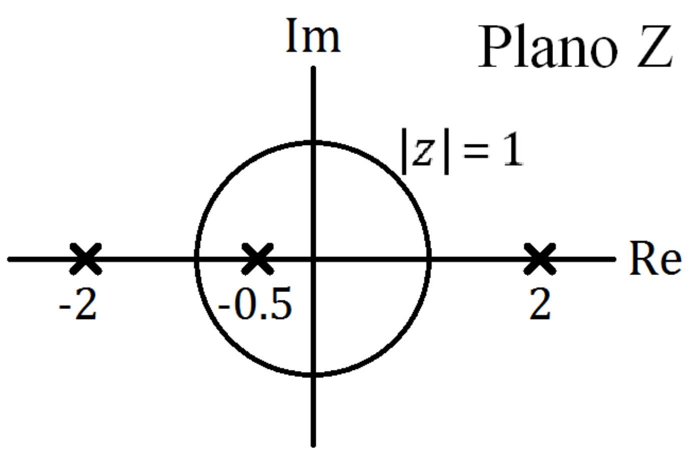
Finalmente

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + z^{-1}}{1 + 0.5z^{-1} - 4z^{-2} - 2z^{-3}} = \frac{z^3 + z^2}{z^3 + 0.5z^2 - 4z - 2}$$

Para este sistema $Q(z) = z^3 + 0.5z^2 - 4z - 2$, y sus polos son:

$$P_1 = -2,\ P_2 = -0.5,\ P_3 = 2$$

el sistema no es estable, ya que los polos P_1 y P_3 de $H(z)$ caen fuera del círculo unitario.



Ejemplo:
Dado el sistema LTI causal representado por la siguiente EDL de orden N=1

$$y[n] - 0.3y[n-1] = x[n]$$

Obtener $H(z)$, determinar si el sistema es estable, y obtener la respuesta del sistema a $x[n] = 0.3^n u[n]$.

Primero

$$\mathcal{Z}\{y[n] - 0.3y[n-1]\} = \mathcal{Z}\{x[n]\}$$

Utilizando las propiedades de linealidad y desplazamiento en el tiempo se obtiene

$$Y(z) - 0.3z^{-1}Y(z) = X(z)$$

O bien

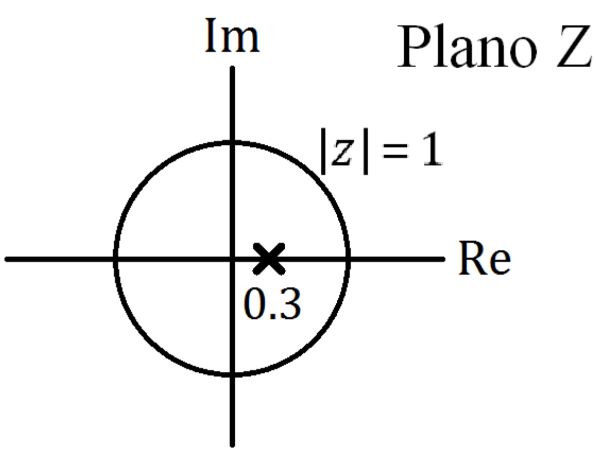
$$(1 - 0.3z^{-1})Y(z) = X(z)$$

Finalmente

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - 0.3z^{-1}} = \frac{z}{z - 0.3}$$

Para este sistema $Q(z) = z - 0.3$, y su polo es $P_1 = 0.3$

El sistema es estable ya que su polo se encuentra dentro del circulo unitario.



Para obtener la respuesta del sistema a $x[n] = 0.3^n u[n]$:

Primero, de tablas se tiene que $X(z) = \frac{z}{z-0.3}$, luego se tiene que:

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{z}{z-0.3}\left(\frac{z}{z-0.3}\right)$$

Entonces, para garantizar que se trabaja con una función racional propia, se procede a realizar la expansión en fracciones parciales de

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z}{(z-0.3)^2}$$

$$\frac{z}{(z-0.3)^2} = \frac{A}{z-0.3} + \frac{B}{(z-0.3)^2}$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación anterior por $(z-0.3)^2$ se obtiene:

$$z = A(z-0.3) + B$$

con $z = 0.3,$ $\qquad 0.3 = B$

con $z = 0,$ $\qquad 0 = A(-0.3) + 0.3 \quad \Rightarrow \quad A = 1$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{z-0.3} + \frac{0.3}{(z-0.3)^2}$$

entonces

$$Y(z) = \frac{z}{z-0.3} + \frac{0.3z}{(z-0.3)^2}$$

aplicando a $Y(z)$ la T. Z inversa "por tablas", se obtiene:

$$y[n] = (0.3)^n u[n] + n(0.3)^n u[n]$$

$$y[n] = (1+n)(0.3)^n u[n]$$

Ejemplo:
Dado el sistema LTI causal representado por la siguiente EDL de orden N=2

$$y[n] + 2.5y[n-1] + y[n-2] = 9x[n-1] + 9x[n-2]$$

Obtener $H(z)$, determinar si el sistema es estable, y obtener la respuesta del sistema a $x[n] = u[n]$.

Primero

$$\mathcal{Z}\{y[n] + 2.5y[n-1] + y[n-2]\} = \mathcal{Z}\{9x[n-1] + 9x[n-2]\}$$

Utilizando las propiedades de linealidad y desplazamiento en el tiempo se obtiene

$$Y(z) + 2.5z^{-1}Y(z) + z^{-2}Y(z) = 9z^{-1}X(z) + 9z^{-2}X(z)$$

O bien

$$(1 + 2.5z^{-1} + z^{-2})Y(z) = (9z^{-1} + 9z^{-2})X(z)$$

Finalmente

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{9z^{-1} + 9z^{-2}}{1 + 2.5z^{-1} + z^{-2}} = \frac{9z + 9}{z^2 + 2.5z + 1}$$

Para este sistema $Q(z) = z^2 + 2.5z + 1 = az^2 + bz + c$, y sus polos son:

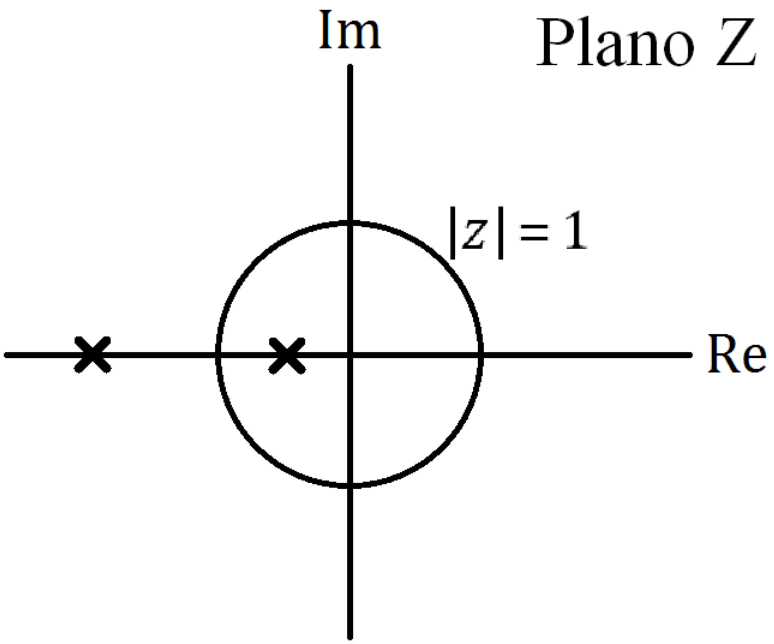
$$P_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2.5 \pm \sqrt{(2.5)^2 - 4}}{2(1)} = \frac{-2.5 \pm 1.5}{2}$$

$$P_1 = -0.5, \qquad P_2 = -2$$

Entonces

$$H(z) = \frac{9z + 9}{z^2 + 2.5z + 1} = \frac{9z + 9}{(z + 0.5)(z + 2)}$$

El sistema no es estable ya que uno de sus polos cae fuera del circulo unitario.



Para obtener la respuesta del sistema a $x[n] = u[n]$:

Primero, de tablas se obtiene que $X(z) = \frac{z}{z-1}$, luego se tiene que:

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{9z + 9}{(z + 0.5)(z + 2)}\left(\frac{z}{z - 1}\right)$$

Entonces, para garantizar que se trabaja con una función racional propia, se procede a realizar la expansión en fracciones parciales de

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{9z + 9}{(z + 0.5)(z + 2)(z - 1)}$$

$$\frac{9z+9}{(z+0.5)(z+2)(z-1)} = \frac{A}{z+0.5} + \frac{B}{z+2} + \frac{C}{z-1}$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación anterior por $(z+0.5)(z+2)(z-1)$ se obtiene:

$$9z+9 = A(z+2)(z-1) + B(z+0.5)(z-1) + C(z+0.5)(z+2)$$

con $z = -0.5$, $\quad 4.5 = A(1.5)(-1.5) \quad \Rightarrow \quad A = -2$

con $z = -2$, $\quad -9 = B(-1.5)(-3) \quad \Rightarrow \quad B = -2$

con $z = 1$, $\quad 18 = C(1.5)(3) \quad \Rightarrow \quad C = 4$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{-2}{z+0.5} + \frac{-2}{z+2} + \frac{4}{z-1}$$

entonces

$$Y(z) = -2\,\frac{z}{z+0.5} - 2\,\frac{z}{z+2} + 4\,\frac{z}{z-1}$$

aplicando a $Y(z)$ la T. Z inversa "por tablas", se obtiene:

$$y[n] = -2(-0.5)^n u[n] - 2(-2)^n u[n] + 4u[n]$$

$$y[n] = [\,4 - 2(-0.5)^n - 2(-2)^n\,]u[n]$$

Ejemplo:

Dado el sistema LTI causal con función de transferencia

$$H(z) = \frac{3z + 2}{z^2 - z + 0.5}$$

determinar si el sistema es estable y obtener su respuesta al escalón.

Para este sistema $Q(z) = z^2 - z + 0.5 = az^2 + bz + c$, y sus polos son:

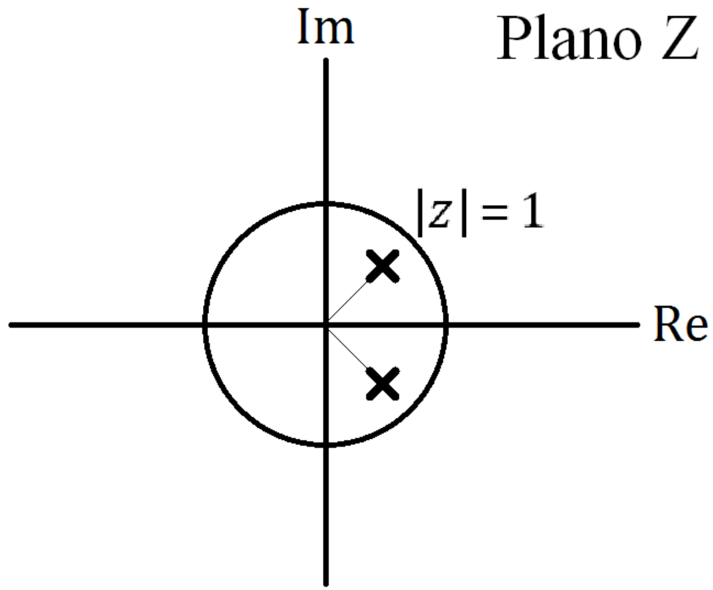
$$P_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 2}}{2(1)} = \frac{1}{2} \pm j\frac{1}{2}$$

$$P_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\pm \frac{j\pi}{4}}$$

Entonces

$$H(z) = \frac{3z+2}{z^2 - z + 0.5}, \qquad P_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\pm \frac{j\pi}{4}}$$

Este sistema es estable ya que los dos polos de $H(z)$ caen dentro del círculo unitario (i.e. los 2 polos tienen magnitud menor a 1).



Para obtener la respuesta del sistema a $x[n] = u[n]$:

Primero, de tablas se obtiene que $X(z) = \frac{z}{z-1}$, luego se tiene que:

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{3z + 2}{z^2 - z + 0.5}\left(\frac{z}{z - 1}\right)$$

Entonces, se procede a realizar la expansión en fracciones parciales de

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{3z + 2}{(z - 1)(z^2 - z + 0.5)}$$

$$\frac{3z+2}{(z-1)(z^2-z+0.5)} = \frac{A}{z-1} + \frac{Bz+C}{z^2-z+0.5}$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación anterior por $(z-1)(z^2-z+0.5)$ se obtiene:

$$3z+2 = A(z^2-z+0.5) + (Bz+C)(z-1)$$

con $z = 1, \quad 5 = A(0.5) \quad \Rightarrow \quad A = 10$

con $z = 0, \quad 2 = 10(0.5) + C(-1) \quad \Rightarrow \quad C = 3$

con $z = -1, \quad -1 = 10(2.5) + (-B+3)(-2) \quad \Rightarrow \quad B = -10$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{10}{z-1} + \frac{-10z+3}{z^2-z+0.5}$$

$$Y(z) = 10\frac{z}{z-1} - \frac{10z^2 - 3z}{z^2 - z + 0.5}$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{Bz^2+Cz}{z^2+\beta z+\gamma}\right\} = \rho^n[A_1\cos(\Omega_0 n) + A_2\operatorname{sen}(\Omega_0 n)]u[n]$$

$$\rho = \sqrt{\gamma} = \sqrt{0.5}, \quad \Omega_0 = \cos^{-1}\left(\frac{-\beta}{2\sqrt{\gamma}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{0.5}}\right) = \frac{\pi}{4},$$

$$A_1 = B = 10, \quad A_2 = \frac{2C - B\beta}{2\rho sen\Omega_0} = \frac{2(-3)-(10)(-1)}{2\sqrt{0.5}sen(\pi/4)} = \frac{4}{1} = 4$$

Aplicando a $Y(z)$ la T. Z inversa "por tablas", se obtiene:

$$y[n] = \left[10 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\left[10\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) + 4\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}n\right)\right]\right]u[n]$$

Discretización de sistemas continuos

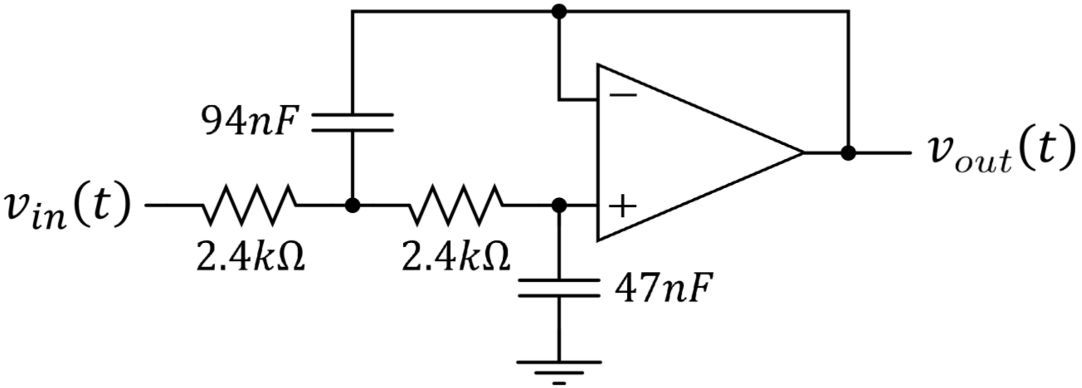
Es posible transformar un sistema continuo $H_c(s)$, en un sistema discreto $H_d(z)$, mediante la ecuación:

$$H_d(z) = H_c(s)\Big|_{s = \frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)}$$

Donde T es el periodo de muestreo utilizado, y $s = \frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$ es la Transformación bilineal entre los planos S y Z.

La transformación bilineal surge de aproximar mediante muestreo periódico e integración numérica trapezoidal, la ec. diferencial de un sistema LTI continuo mediante una ecuación en diferencias de un sistema LTI discreto.

Ejemplo



El circuito eléctrico mostrado en la figura anterior implementa un sistema LTI continuo (filtro paso-bajas Butterworth de orden 2 con frec. de corte $F_c = 1000$[Hz]) con función de transferencia:

$$H_c(s) = \frac{a^2}{s^2 + \sqrt{2}\, a\, s + a^2}, \qquad a = 2\pi 1000$$

Con $F_s = 44.1[k\text{Hz}]$, discretizar el sistema anterior utilizando la transformación bilineal y obtener la EDL correspondiente.

Solución

Con la transformación bilineal es posible discretizar un sistema LTI continuo hacia un sistema discreto LTI IIR mediante la ecuación:

$$H_d(z) = H_c(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)}$$

Para el problema a resolver:

$$H_d(z) = \frac{a^2}{s^2+\sqrt{2}\,a\,s+a^2}\Bigg|_{s=\frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)}$$

$$H_d(z) = \frac{a^2}{\left(\frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)\right)^2+\sqrt{2}\,a\left(\frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)\right)+a^2}$$

$$H_d(z) = \frac{a^2(z+1)^2}{\frac{4}{T^2}(z-1)^2 + 2\sqrt{2}\frac{a}{T}\ (z-1)(z+1) + a^2(z+1)^2}$$

$$= \frac{a^2(z^2+2z+1)}{\frac{4}{T^2}(z^2-2z+1) + \frac{2\sqrt{2}a}{T}(z^2-1) + a^2(z^2+2z+1)}$$

$$= \frac{z^2+2z+1}{\frac{4}{a^2T^2}(z^2-2z+1) + \frac{2\sqrt{2}}{aT}(z^2-1) + \ (z^2+2z+1)}$$

$$= \frac{z^2+2z+1}{\left(\frac{4}{(aT)^2} + \frac{2\sqrt{2}}{aT} + 1\right)z^2 + \left(2 - \frac{8}{(aT)^2}\right)z + \left(\frac{4}{(aT)^2} - \frac{2\sqrt{2}}{aT} + 1\right)}$$

Con $Fs = 44100$ ($T = 1/44100$) y como $a = 2\pi 1000$, la ecuación anterior se reduce a

$$\boxed{H_d(z) = \frac{z^2 + 2z + 1}{218z^2 - 392z + 178.2}}$$

A continuación se obtiene la ecuación en diferencias correspondiente a $H_d(z)$:

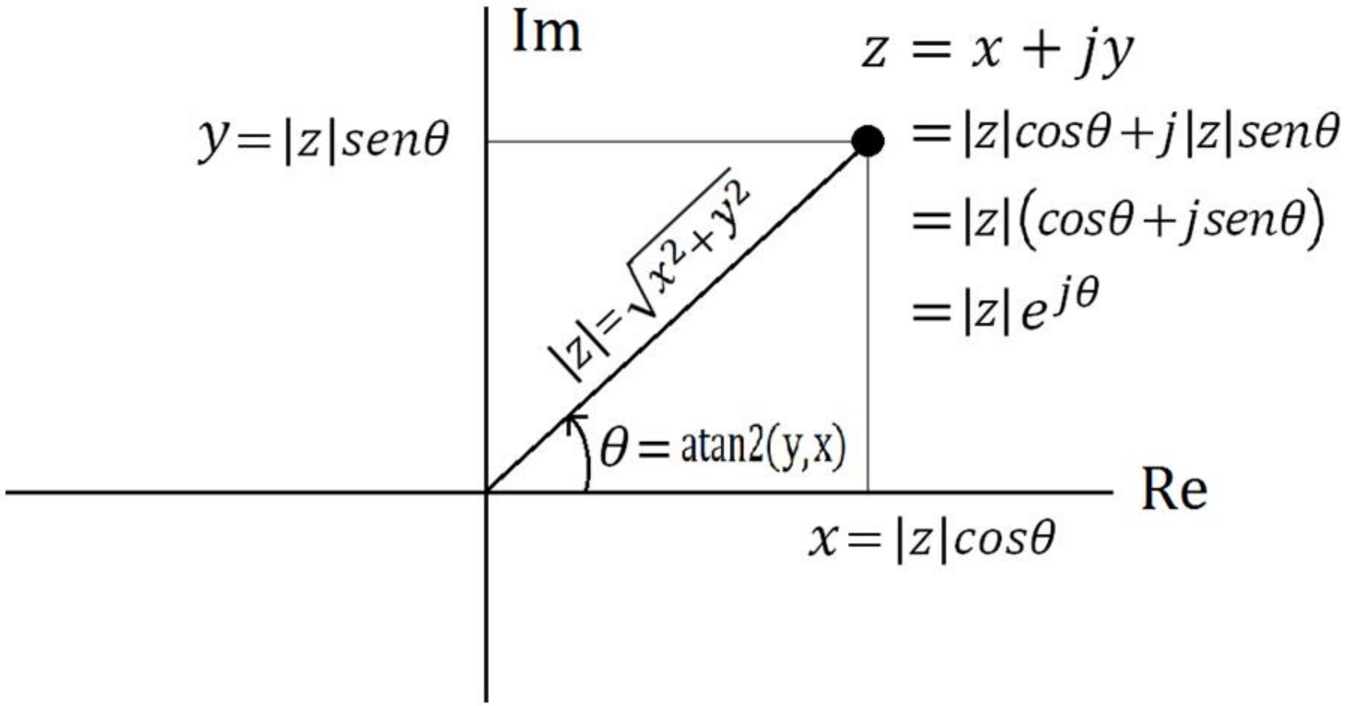
$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{218 - 392z^{-1} + 178.2z^{-2}}$$

$$(218 - 392z^{-1} + 178.2z^{-2})Y(z) = (1 + 2z^{-1} + z^{-2})X(z)$$

O bien

$$\boxed{218y[n] - 392y[n-1] + 178.2y[n-2] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2]}$$

Forma magnitud y fase de un número complejo



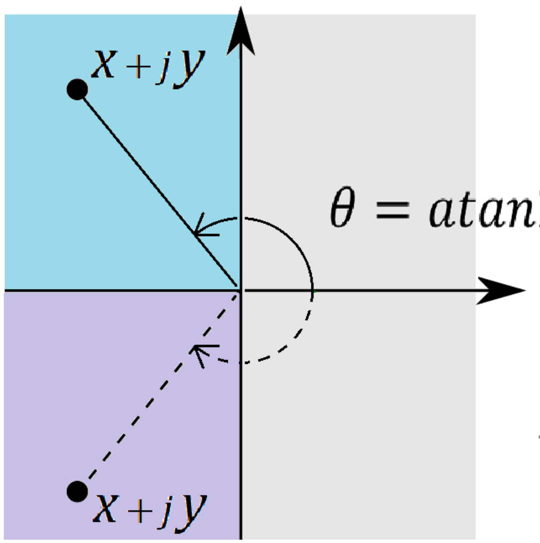
Donde

j : es la unidad imaginaria y se cumple que $j^2 = -1$

$e^{j\theta} = \cos\theta + j\text{sen}\theta$: es la formula de Euler

atan2 : es la función arcotangente de dos argumentos.

Función arcotangente de dos argumentos



$$\theta = atan2(y,x) = \begin{cases} \tan^{-1}(y/x) & si\ x \geq 0, y \neq 0 \\ \tan^{-1}(y/x) + \pi & si\ x < 0, y \geq 0 \\ \tan^{-1}(y/x) - \pi & si\ x < 0, y < 0 \end{cases}$$

$$-\pi < \theta \leq \pi$$

Al analizar sistemas LTI es útil que para $Z, Z_1, Z_2 \in \mathbb{C}$ se tiene que:

$$Z = Z_1 Z_2 \qquad |Z| = |Z_1||Z_2| \qquad \measuredangle Z = \measuredangle Z_1 + \measuredangle Z_2$$

$$Z = \frac{Z_1}{Z_2} \qquad |Z| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|} \qquad \measuredangle Z = \measuredangle Z_1 - \measuredangle Z_2$$