

Teoremas de redes eléctricas

Víctor Manuel Sánchez Esquivel

Índice general

5.1.	Introducción	4
5.2.	Teorema de Sustitución	4
5.3.	Teorema de Tellegen	8
5.4.	Teorema de Superposición	10
5.5.	Teorema de Thévenin y Norton	13
5.6.	Teorema de Reciprocidad	19
5.7.	Teorema de Máxima Transferencia de Energía	22

5.1. Introducción

En este capítulo se estudian teoremas muy generales sobre redes eléctricas, de gran utilidad y aplicación en el estudio, análisis y síntesis de las mismas. Se pueden emplear en una ingente cantidad de redes eléctricas que se encuentran en la práctica y conducen a soluciones simples y elegantes. Esta generalidad y simplicidad pueden ser engañosas; ya que frecuentemente no se percibe el alcance de su aplicación o se malinterpreta su significado.

La principal suposición subyacente es la unicidad de la solución de las redes eléctricas para el conjunto de entradas y condiciones iniciales dadas. La razón primigenia de su empleo es que la red eléctrica modificada es más simple o sencilla de estudiar y analizar que la red eléctrica original.

5.2. Teorema de Sustitución

Este teorema es de carácter general y se puede aplicar a redes eléctricas lineales o no lineales, variantes o invariantes en el tiempo. Su aplicación se restringe a redes eléctricas de parámetros concentrados o sea que satisfagan las leyes de Kirchhoff y que además sean determinísticas, es decir, que no se tenga incertidumbre acerca de los voltajes y las corrientes de rama.

El teorema asevera lo siguiente. Considere la figura 5.1a, en donde se muestra la red eléctrica η compuesta por el circuito eléctrico η_R que a su vez está formado por elementos posiblemente no lineales y variantes en el tiempo, conectado al circuito eléctrico η_L el cual no necesariamente es lineal.

1. Si la red eléctrica η tiene solución única $v = \hat{v}(t)$ para todo t , entonces η_L puede sustituirse por una fuente de voltaje de valor $\hat{v}(t)$ sin que se afecten los voltajes y corrientes de rama dentro de η_R , siempre y cuando el circuito modificado η_v de la figura 5.1b tenga solución única para todo t .
2. Si la red eléctrica η tiene solución única $i = \hat{i}(t)$ para todo t , entonces η_L puede sustituirse por una fuente de corriente de valor $\hat{i}(t)$ sin que se afecten los voltajes y corrientes de rama dentro de η_R , siempre y cuando el circuito modificado η_i de la figura 5.1c tenga solución única para todo t .

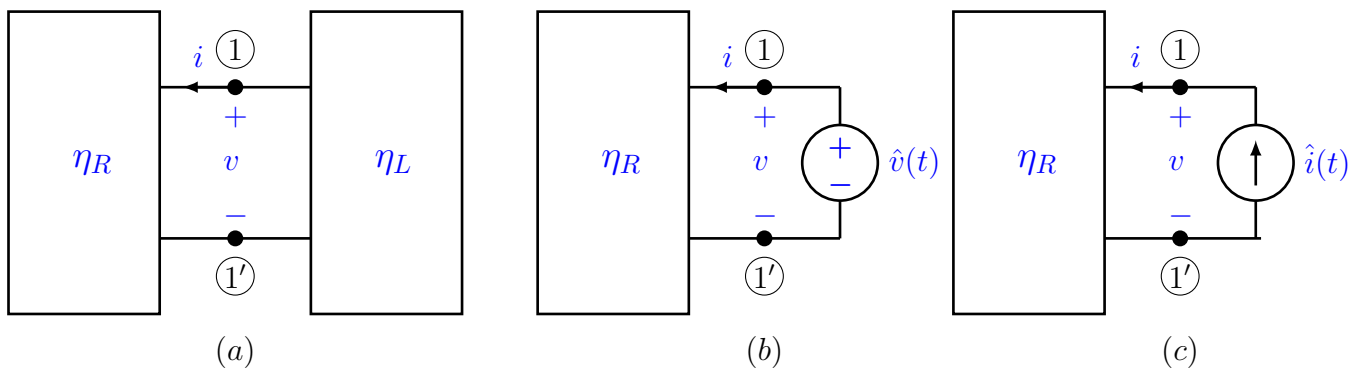


Figura 5.1: (a) Red eléctrica η . (b) Red eléctrica modificada η_v . (c) Red eléctrica modificada η_i .

Ejemplo 5.1 Determine la función de transferencia del circuito eléctrico que se muestra en la figura 5.2a.

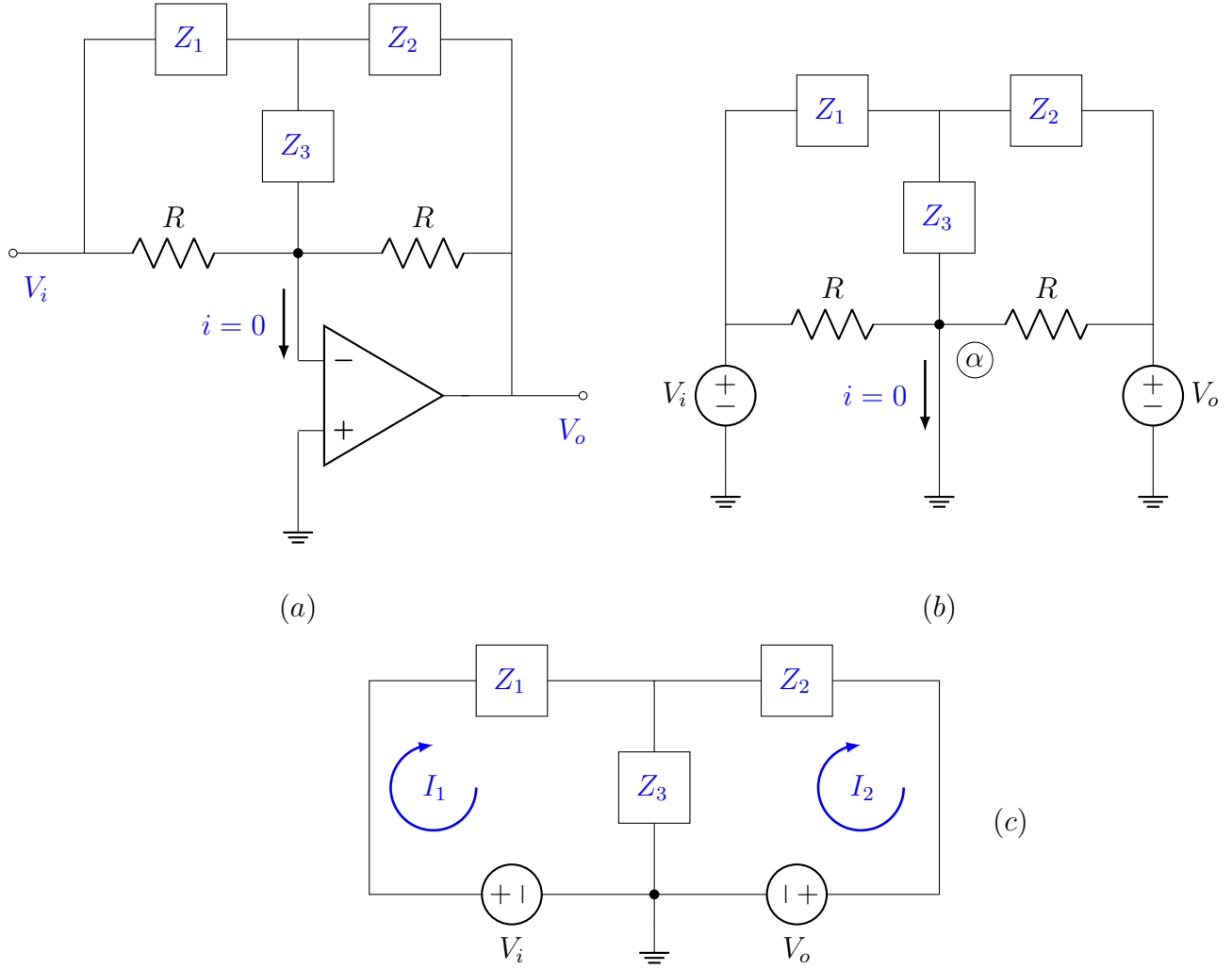


Figura 5.2: Etapa básica de un ecualizador.

Aplicando el teorema de sustitución y considerando las características esenciales del amplificador operacional, se obtiene el circuito de la figura 5.2b. A continuación, dado que las fuentes independientes de voltaje y los resistores están en paralelo, al aplicar nuevamente el teorema de sustitución se tiene el circuito de la figura 5.2c.

La ecuación de mallas del circuito eléctrico de la figura 5.2c es

$$\begin{bmatrix} Z_1 + Z_3 & -Z_3 \\ -Z_3 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_i \\ -V_o \end{bmatrix}$$

Resolviendo para las corrientes de malla

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} Z_2 + Z_3 & Z_3 \\ Z_3 & Z_1 + Z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_i \\ -V_o \end{bmatrix} \quad \text{donde} \quad \Delta = Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3$$

De la LCK, en el nodo $\textcircled{a}$ del circuito de la figura 5.2b, considerando las direcciones de referencia asociadas, se tiene

$$I_1 - I_2 + \frac{V_i}{R} + \frac{V_o}{R} = 0$$

$$\frac{Z_2}{\Delta} V_i + \frac{Z_1}{\Delta} V_o + \frac{V_i}{R} + \frac{V_o}{R} = 0$$

agrupando términos

$$\left(\frac{Z_2}{\Delta} + \frac{1}{R}\right) V_i + \left(\frac{Z_1}{\Delta} + \frac{1}{R}\right) V_o = 0$$

finalmente

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{\frac{Z_2}{\Delta} + \frac{1}{R}}{\frac{Z_1}{\Delta} + \frac{1}{R}}$$

Prueba del teorema

Inicialmente la red eléctrica η_L se trata como si fuera una sola rama. Las ramas de η_R se etiquetan consecutivamente desde 1 hasta $b - 1$ y la rama restante b corresponde a la red η_L , es decir, la fuente de voltaje $\hat{v}(t)$ o la fuente de corriente $\hat{i}(t)$. Las ecuaciones de la red eléctrica η están dadas por:

De la ley de corrientes de Kirchhoff, (LCK)

$$[A] \begin{bmatrix} \underline{j}_R \\ j_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Y de la ley de voltajes de Kirchhoff, (LVK)

$$\begin{bmatrix} \underline{v}_R \\ v_b \end{bmatrix} - [A]^T [\underline{e}] = \begin{bmatrix} \underline{0} \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

El punto de operación de la red eléctrica η se encuentra a partir de las ecuaciones de rama siguientes

$$\underline{f}(\underline{v}_R, \underline{j}_R, t) = \underline{0} \quad (5.3)$$

$$f_b(v_b, j_b, t) = 0 \quad (5.4a)$$

A continuación se considera la red eléctrica de la figura 5.1b. Las ecuaciones que la caracterizan son las ecuaciones de voltaje y de corriente anteriores, de la ecuación (5.1) a la (5.3), y además la ecuación

$$v_b - \hat{v}(t) = 0 \quad (5.4b)$$

que corresponde a la fuente *ideal* de voltaje.

Por otra parte, sean los vectores

$$[\hat{\underline{e}}(t)] \quad \begin{bmatrix} \underline{\hat{v}}_R(t) \\ \hat{v}_b(t) \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} \hat{\underline{j}}_R(t) \\ \hat{j}_b(t) \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

que denotan la *solución única* de las ecuaciones (5.1) a la (5.4a). Sin embargo, dado que las ecuaciones de voltaje, de corriente y del punto de operación de las redes eléctricas de las figuras 5.1a y 5.1b son idénticas; las ecuaciones (5.5) son también una solución de las ecuaciones (5.1) a la (5.3) y de la ecuación (5.4b) ya que cualquier $j_b(t)$ satisfará a la ecuación (5.5), pues se trata de una fuente ideal de voltaje.

Pero por hipótesis, la red eléctrica de la figura 5.1b tiene solución única, por consiguiente, las ecuaciones (5.5) son también la solución de la red eléctrica en la que se ha aplicado el teorema de sustitución.

Una prueba similar es posible llevar a cabo para la red eléctrica de la figura 5.1c.

5.3. Teorema de Tellegen

El teorema establece que en una red eléctrica de n nodos y b ramas se cumple

$$\sum_{k=1}^b v_k j_k = 0 \quad (5.6)$$

donde v_k y j_k representan el voltaje y la corriente eléctrica de la k -ésima rama, respectivamente. Teniendo en cuenta la expresión anterior, una forma equivalente de teorema de Tellegen es

$$[\mathbf{V}]_k^T [\mathbf{J}]_k = 0 \quad (5.7)$$

donde $[\mathbf{V}]_k$ y $[\mathbf{J}]_k$ son los vectores de voltajes y corrientes eléctricas de rama, respectivamente.

Este teorema está relacionado con el principio de conservación de la energía. Ya que el producto $v_k j_k$ representa la potencia que se suministra o se consume en la k -ésima rama. La ecuación (5.6) nos dice que la potencia que se suministra a una red eléctrica es igual a la potencia que se consume en dicha red.

Este teorema es de carácter general y puede aplicarse a una red eléctrica lineal o no lineal, variante o invariante en el tiempo. La única restricción es que se deben satisfacer las leyes de Kirchhoff, es decir que la red eléctrica debe ser de parámetros concentrados y determinística.

Ejemplo 5.2 Considere la gráfica orientada que se muestra en la figura 5.3. Se selecciona en *forma arbitraria* los valores de la corriente j_1 , j_2 y j_3 y se calculan j_4 , j_5 y j_6 de forma tal que la LCK se satisfaga.

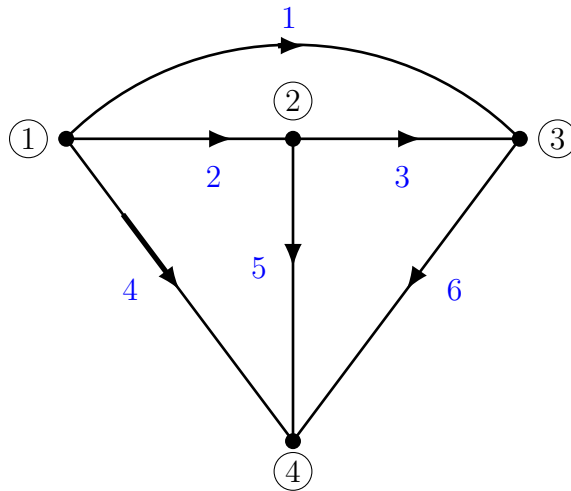


Figura 5.3: Gráfica orientada con cuatro nodos y seis ramas.

Sean

$$j_1 = 1[A] \quad j_2 = 2[A] \quad \text{y} \quad j_3 = 3[A]$$

entonces

$$j_4 = -3[A] \quad j_5 = -1[A] \quad \text{y} \quad j_6 = 4[A]$$

A continuación se seleccionan *arbitrariamente* v_4 , v_5 y v_6 y se encuentran v_1 , v_2 y v_3 tal que la LVK se satisfaga (se debe advertir que las direcciones de referencia están asociadas).

Sean

$$v_4 = 4[V] \quad v_5 = 5[V] \quad \text{y} \quad v_6 = 6[A]$$

así que

$$v_1 = -2[V] \quad v_2 = -1[V] \quad \text{y} \quad v_3 = -1[V]$$

Ahora es fácil verificar

$$\sum_{k=1}^6 v_k j_k = 0$$

Seleccione otro conjunto de valores de voltajes y corrientes de rama $\hat{v}_k(t)$ y $\hat{j}_k(t)$ y repita el ejercicio anterior, con los valores propuestos y los anteriores, es decir

$$\sum_{k=1}^6 \hat{v}_k \hat{j}_k = \sum_{k=1}^6 \hat{v}_k j_k = \sum_{k=1}^6 v_k \hat{j}_k = 0$$

¿Qué se puede deducir?

Prueba del teorema

En una gráfica conectada G , seleccione un nodo de referencia, por lo cual la matriz de incidencia reducida $[\mathbf{A}]$ se define sin ambigüedad. Por otra parte dado que $[\mathbf{J}]_k$ satisface la LCK, se tiene

$$[\mathbf{A}][\mathbf{J}]_k = 0 \tag{5.8}$$

De la misma manera $[\mathbf{V}]_k$ satisface la LVK y considerando direcciones de referencia asociadas, para un vector de voltajes de nodo $[\mathbf{E}]_n$, se cumple

$$[\mathbf{V}]_k = [\mathbf{A}]^T [\mathbf{E}]_n \tag{5.9}$$

Sustituyendo estas dos últimas ecuaciones en la ecuación (5.7), resulta

$$[\mathbf{V}]_k^T [\mathbf{J}]_k = \left[[\mathbf{A}]^T [\mathbf{E}]_n \right]^T [\mathbf{J}]_k = [\mathbf{E}]_n^T \left[[\mathbf{A}]^T \right]^T [\mathbf{J}]_k = [\mathbf{E}]_n^T [\mathbf{A}][\mathbf{J}]_k = 0 \tag{5.10}$$

5.4. Teorema de Superposición

Este teorema se aplica únicamente a redes eléctricas *lineales*, variantes o invariantes en el tiempo y de parámetros concentrados. El teorema establece que *la respuesta de estado cero* de una red eléctrica debido a varias fuentes independientes de entrada actuando simultáneamente, es igual a la suma de las respuestas de estado cero debidas a cada una de las fuentes independientes de entrada actuando por separado.

Ejemplo 5.3 Considere la red eléctrica lineal de la figura 5.4. La red se encuentra en el estado inicial cero, esto es, $v(0^-) = 0$. Las fuentes independientes son $i_s(t) = Iu_{-1}(t)$ [A] y $e_s(t) = E\delta(t)$ [V], donde I y E son constantes. El voltaje en el capacitor es la respuesta o la salida que se quiere conocer.

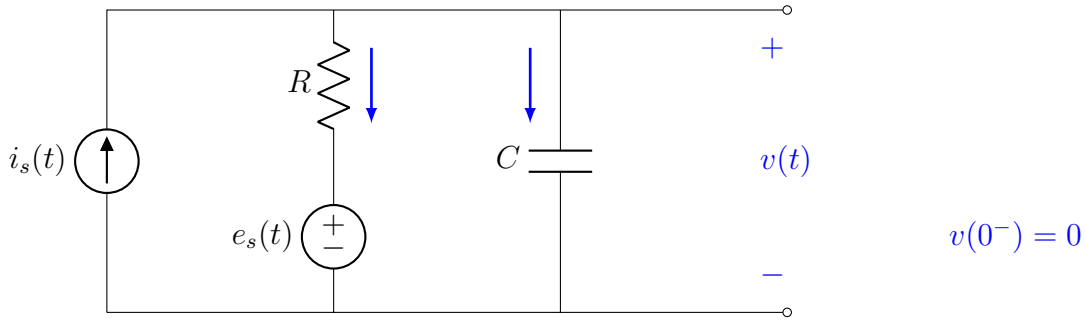


Figura 5.4: Red eléctrica de primer orden con dos fuentes independientes

La ecuación diferencial que modeliza a la red eléctrica se obtiene a continuación.

Las leyes de conjunto son

$$i_s(t) = i_R(t) + i_C(t) \quad (5.11)$$

y

$$e_s(t) + v_R(t) = e_s(t) + i_R(t)R = v(t) \quad (5.12)$$

de donde

$$i_R(t) = \frac{1}{R}[v(t) - e_s(t)] \quad (5.13)$$

sustituyendo la ecuación (5.13) en la (5.11) y teniendo presente que $i_C(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$, se tiene

$$i_s(t) = \frac{v(t) - e_s(t)}{R} + C\frac{dv(t)}{dt}$$

acomodando términos, resulta

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [v(t)] &= \left[-\frac{1}{RC} \right] [v(t)] + \left[\frac{1}{C} \quad \frac{1}{RC} \right] \begin{bmatrix} i_s(t) \\ e_s(t) \end{bmatrix} \\ [y(t)] &= [1] [v(t)] \end{aligned}$$

La matriz de transición de estados o matriz exponencial, se encuentra auxiliándose con la transformada de Laplace

$$\underline{\Phi}(t) = e^{\underline{A}t} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(s\underline{I} - \underline{A})^{-1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + \frac{1}{RC}}\right\} = e^{-\frac{1}{RC}t}$$

Por consiguiente, el voltaje en el capacitor es

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_0^t [1] e^{-\frac{1}{RC}(t-\sigma)} \begin{bmatrix} \frac{1}{C} & \frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s(\sigma) \\ e_s(\sigma) \end{bmatrix} d\sigma \\ v(t) &= e^{-\frac{1}{RC}t} \int_0^t e^{\frac{1}{RC}\sigma} \begin{bmatrix} \frac{1}{C} & \frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Iu_{-1}(\sigma) \\ E\delta(\sigma) \end{bmatrix} d\sigma \\ v(t) &= e^{-\frac{1}{RC}t} \left[\int_0^t e^{\frac{1}{RC}\sigma} \frac{1}{C} Iu_{-1}(\sigma) d\sigma + \int_0^t e^{\frac{1}{RC}\sigma} \frac{1}{RC} E\delta(\sigma) d\sigma \right] \\ v(t) &= \frac{I}{C} e^{-\frac{1}{RC}t} \int_0^t e^{\frac{1}{RC}\sigma} d\sigma + \frac{E}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t} \int_0^t e^{\frac{1}{RC}\sigma} \delta(\sigma) d\sigma \\ v(t) &= IRe^{-\frac{1}{RC}t} \left[e^{\frac{1}{RC}t} - 1 \right] + \frac{E}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t} \\ v(t) &= IR \left[1 - e^{-\frac{1}{RC}t} \right] + \frac{E}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t} [V] \quad \text{para } t \geq 0 \end{aligned}$$

es factible verificar que la suma de las respuestas de estado cero debidas a $i_s(t)$ y $e_s(t)$ actuando por separado proporciona la misma respuesta anterior, como presupone el teorema de superposición.

Prueba del teorema

La respuesta de estado cero $\underline{y}_{zs}(t)$, de una red eléctrica cuyo modelo en variables de estado es

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) &= \underline{A}(t)\underline{x}(t) + \underline{B}(t)\underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) &= \underline{C}(t)\underline{x}(t) + \underline{D}(t)\underline{u}(t) \end{aligned} \tag{5.14}$$

está dada por la siguiente expresión

$$\underline{y}_{zs}(t) = \underline{C}(t) \int_{t_0}^t \underline{\Phi}(t, \sigma) \underline{B}(\sigma) \underline{u}(\sigma) d\sigma + \underline{D}(t) \underline{u}(t) \tag{5.15}$$

donde $\underline{u}(t)$ es el vector de entrada de dimensión $(r \times 1)$, de la forma $\underline{u}(t)^T = [u_1(t)u_2(t) \cdots u_r(t)]$ y que se puede expresar como

$$\underline{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u_2(t) \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^r \underline{u}_k(t) \tag{5.16}$$

y $\underline{\Phi}(t, \sigma)$ es la *matriz de transición de estados* de dimensión $(n \times n)$, la cual se determina a partir de la siguiente expresión

$$\underline{\Phi}(t, t_o) = \underline{I} + \int_{t_o}^t \underline{A}(\sigma) d\sigma + \int_{t_o}^t \underline{A}(\sigma_1) \int_{t_o}^{\sigma_1} \underline{A}(\sigma_2) d\sigma_2 d\sigma_1 + \dots \quad (5.17)$$

Por otra parte, la respuesta de estado cero $\underline{y}_{zs_i}(t)$ debida a la i -ésima fuente independiente, está dada por

$$\underline{y}_{zs_i}(t) = \underline{C}(t) \int_{t_o}^t \underline{\Phi}(t, \sigma) \underline{B}(\sigma) \underline{u}_i(\sigma) d\sigma + \underline{D}(t) \underline{u}_i(t) \quad (5.18)$$

Comparando las ecuaciones (5.15) y (5.18) y teniendo presente la ecuación (5.16), se tiene

$$\underline{y}_{zs}(t) = \sum_{i=1}^r \underline{y}_{zs_i}(t) \quad (5.19)$$

comprobándose el teorema.

Como comentario final, vale la pena notar que la ecuación (5.15) puede escribirse como ¹

$$\begin{aligned} \underline{y}_{zs}(t) &= \int_{t_o}^t [\underline{C}(t) \underline{\Phi}(t, \sigma) \underline{B}(\sigma) + \underline{D}(\sigma) \delta(t - \sigma)] \underline{u}(\sigma) d\sigma \\ \underline{y}_{zs}(t) &= \int_{t_o}^t \underline{H}(t, \sigma) \underline{u}(\sigma) d\sigma \end{aligned} \quad (5.20)$$

donde la matriz $\underline{H}(t, \sigma)$, recibe el nombre de *patrón de peso o matriz de respuesta al impulso de la red eléctrica o sistema*.

¹La propiedad de muestreo de la función impulso es $\int_{-\infty}^{\infty} f(t + \sigma) \delta(t) dt = f(\sigma)$, si $f(t)$ es continua en $t = \sigma$.

5.5. Teorema de Thévenin y Norton

Considere la *red eléctrica lineal* conectada a una *carga eléctrica arbitraria*, que se muestra en la figura 5.5.

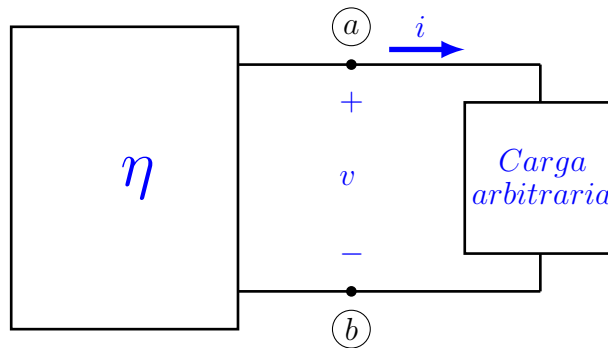


Figura 5.5: Red eléctrica lineal conectada a una carga arbitraria.

Es necesario *enfatizar* que no hay ningún tipo de acoplamiento entre la red eléctrica y la carga eléctrica arbitraria. El teorema afirma que la corriente eléctrica i y el voltaje v no se afectan si la red eléctrica lineal se reemplaza por su circuito equivalente de Thévenin o por su circuito equivalente de Norton. Es importante, además, hacer hincapié en el hecho de que no se hace ninguna suposición de la carga eléctrica arbitraria, puede ser lineal o no lineal y variante o invariante en el tiempo.

El circuito equivalente de Thévenin consiste de una red eléctrica de dos terminales η_o en serie con una fuente independiente de voltaje de valor e_{oc} . El voltaje e_{oc} es el voltaje que aparece en las terminales de la red eléctrica η cuando se desconecta la carga arbitraria; y es causado por todas las fuentes independientes y las condiciones iniciales presentes en dicha red eléctrica η . El circuito eléctrico η_o se obtiene de la red eléctrica original η al cancelar todas las fuentes independientes y anulando todas las condiciones iniciales. *Las fuentes dependientes no se modifican*. El circuito equivalente de Thévenin se muestra en la figura 5.6.

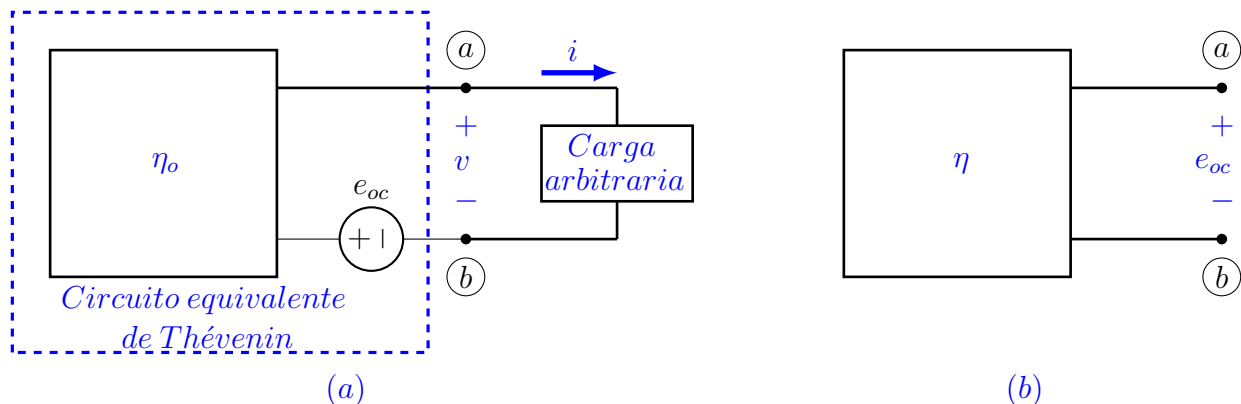


Figura 5.6: (a) Circuito eléctrico equivalente de Thévenin. (b) Voltaje de circuito abierto e_{oc} .

El circuito equivalente de Norton consiste de una red eléctrica de dos terminales η_o en paralelo con una fuente independiente de corriente de valor i_{sc} . La corriente eléctrica i_{sc} es la corriente que fluye

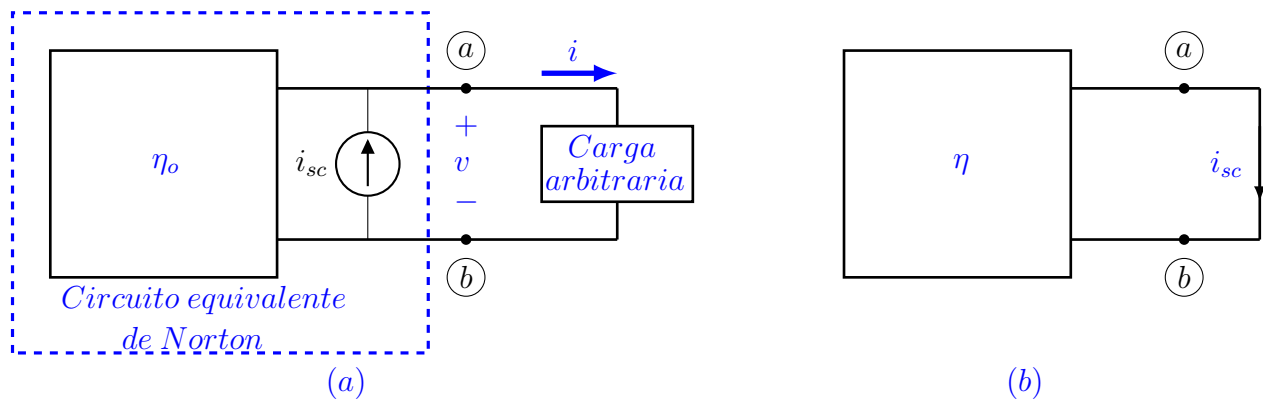


Figura 5.7: (a) Circuito eléctrico equivalente de Norton. (b) Corriente de corto circuito i_{sc} .

entre las terminales del circuito η cuando se pone la carga eléctrica arbitraria en corto circuito; y es causada por todas las fuentes independientes y las condiciones iniciales presentes en la red eléctrica η . El circuito eléctrico η_o se obtiene de la red eléctrica original η al cancelar todas las fuentes independientes y anulando todas las condiciones iniciales. *Las fuentes dependientes no se modifican*. El circuito equivalente de Norton se muestra en la figura 5.7.

Caso particular

Cuando la red eléctrica η además de ser lineal es invariante en el tiempo, resulta más conveniente trabajar con la transformada de Laplace.

Sea $E_{oc}(s)$ la transformada de Laplace del voltaje de circuito abierto $e_{oc}(t)$ presente en las terminales $\textcircled{a}$ - $\textcircled{b}$ de la red eléctrica η cuando ninguna corriente eléctrica fluye desde la red eléctrica. También, sea $I_{sc}(s)$ la transformada de Laplace de la corriente eléctrica de corto circuito $i_{sc}(t)$ que fluye desde la red eléctrica η cuando se ponen en corto circuito sus terminales $\textcircled{a}$ - $\textcircled{b}$. Asimismo, sea $Z_{eq}(s) = 1/Y_{eq}(s)$ la impedancia de la red eléctrica η , vista desde la carga arbitraria, al cancelar tanto las fuentes independientes como las condiciones iniciales.

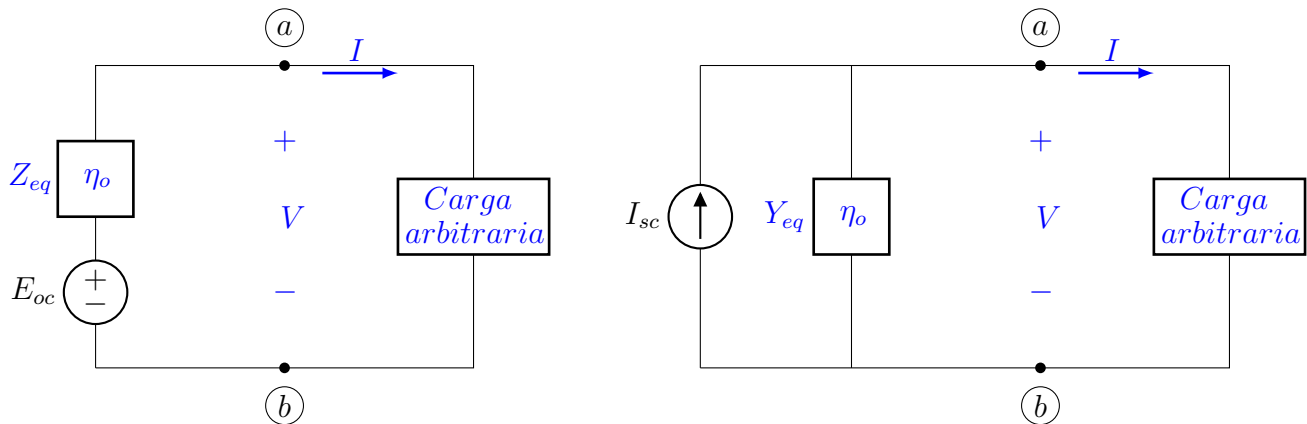


Figura 5.8: Circuito eléctrico equivalente de Thévenin y circuito equivalente de Norton, de una red eléctrica lineal e invariante en el tiempo.

La relación entre las transformadas de Laplace $I_{sc}(s)$ y $E_{oc}(s)$ es

$$E_{oc}(s) = Z_{eq}(s)I_{sc}(s)$$

o

$$I_{sc}(s) = Y_{eq}(s)E_{oc}(s)$$

Bajo estas condiciones, para cualquier tipo de carga eléctrica arbitraria, su voltaje $V(s)$ y su corriente eléctrica $I(s)$, transformadas de Laplace de $v(t)$ e $i(t)$ respectivamente, no se modifican cuando la red eléctrica η se sustituye ya sea por su circuito equivalente de Thévenin o su circuito equivalente de Norton, como se ilustra en la figura 5.8.

Ejemplo 5.4 Considere el circuito eléctrico equivalente de señal pequeña de un transistor en configuración de emisor común, que se muestra en la figura 5.9, donde $i_s(t) = 10^{-5} \cos \omega t$ [A] y

$$\begin{aligned} r_\pi &= 10^3 \, \Omega & r_c &= 10^4 \, \Omega & r_o &= 10^6 \, \Omega \\ C_\pi &= 10^{-10} \, F & C_o &= 10^{-11} \, F & g_m &= 10^{-1} \, S \\ \omega &= 10^7 \, \frac{\text{rad}}{\text{s}} \end{aligned}$$

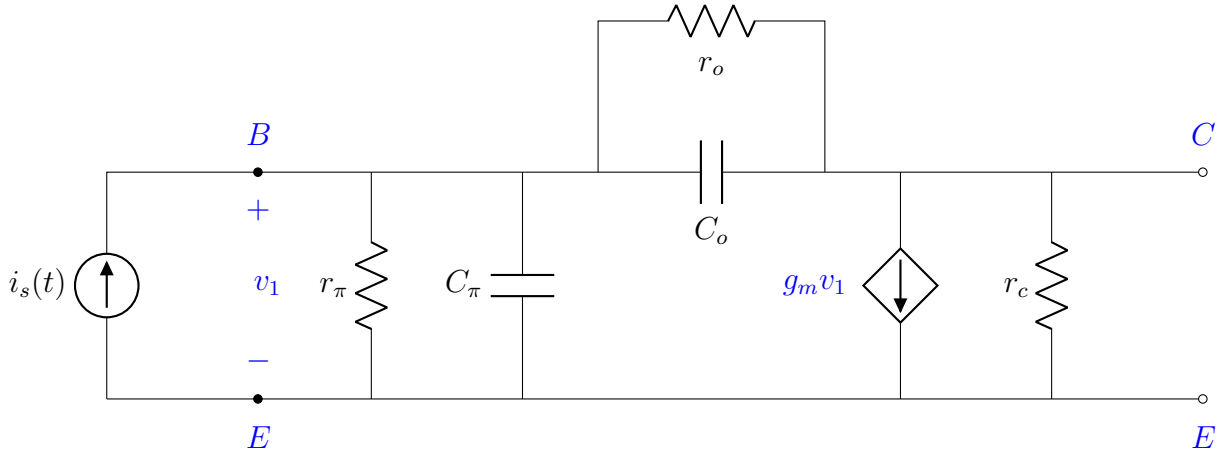


Figura 5.9: Modelo de señal pequeña de un transistor en el modo de emisor común.

Si el circuito está en estado sinusoidal permanente, encuentre

- El circuito equivalente de Thévenin de la red eléctrica a la izquierda de los nodos C y E .
- El circuito equivalente de Norton de la red eléctrica a la izquierda de los nodos C y E .

Empleando el *método abreviado* (análisis por nodos), es posible determinar el voltaje de circuito abierto $E_{oc} = V_{CE}$

La ecuación de nodos que se obtiene por inspección es

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{r_o} + \frac{1}{r_\pi} + j\omega(C_o + C_\pi) & -\left(\frac{1}{r_o} + j\omega C_o\right) \\ -\left(\frac{1}{r_o} + j\omega C_o\right) & \frac{1}{r_c} + \frac{1}{r_o} + j\omega C_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{BE} \\ \mathbf{V}_{CE} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_s \\ -g_m \mathbf{V}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_s \\ -g_m \mathbf{V}_{BE} \end{bmatrix}$$

reacomodando

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{r_o} + \frac{1}{r_\pi} + j\omega(C_o + C_\pi) & -\left(\frac{1}{r_o} + j\omega C_o\right) \\ g_m - \left(\frac{1}{r_o} + j\omega C_o\right) & \frac{1}{r_c} + \frac{1}{r_o} + j\omega C_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{BE} \\ \mathbf{V}_{CE} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_s \\ 0 \end{bmatrix}$$

y resolviendo para determinar el fasor del voltaje *colector-emisor* (voltaje de circuito abierto) $\mathbf{E}_{oc} = \mathbf{V}_{CE}$, se tiene

$$\mathbf{V}_{CE} = \frac{97.9279 \times 10^{-3}}{\sqrt{2}} \angle 90.51^\circ$$

Debido a la presencia de la fuente dependiente de corriente, no es posible conocer de manera directa la red eléctrica “*relajada*” o red eléctrica equivalente de estado cero y entrada cero. Una posibilidad es por medio del voltaje de circuito abierto $\mathbf{E}_{oc}$ (ya se calculó) y la corriente de corto circuito $\mathbf{I}_{sc}$ del circuito de la figura 5.10.

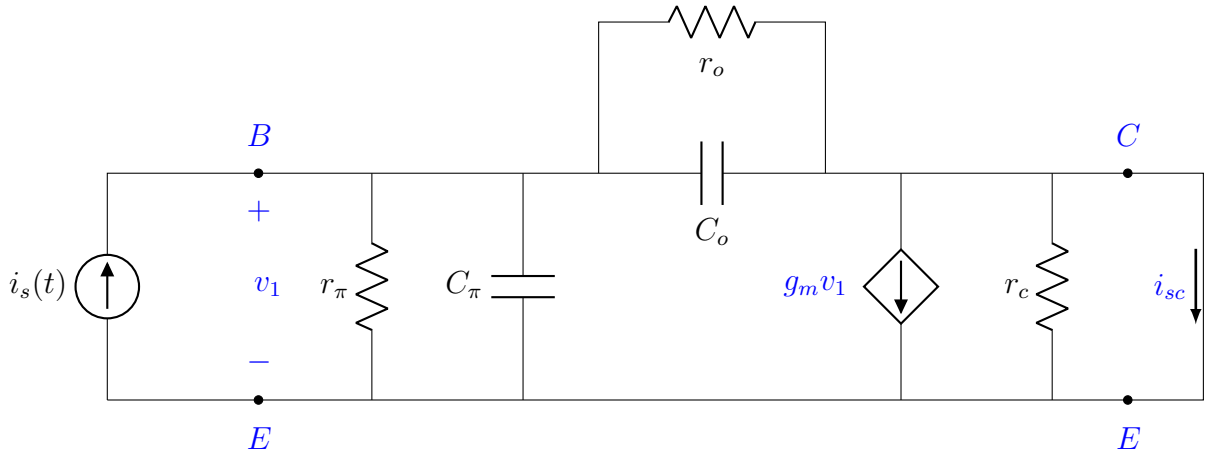


Figura 5.10: Obtención de la corriente de corto circuito i_{sc} .

Para ello se calcula, inicialmente, el fasor del voltaje v_1 . Por consiguiente, de la ecuación de nodos

$$\mathbf{V}_1 = \frac{\mathbf{I}_s}{\frac{1}{r_o} + \frac{1}{r_\pi} + j\omega(C_o + C_\pi)} = \frac{6.7237 \times 10^{-3}}{\sqrt{2}} \angle -47.6978^\circ$$

ahora, notando que

$$\left(\frac{1}{r_o} + j\omega C_o\right) \mathbf{V}_1 = g_m \mathbf{V}_1 + \mathbf{I}_{sc}$$

despejando el fasor correspondiente a la corriente de corto circuito I_{sc}

$$I_{sc} = \left(-g_m + \frac{1}{r_o} + j\omega C_o \right) V_1 = \frac{672.3621 \times 10^{-6}}{\sqrt{2}} \angle 132.224^\circ$$

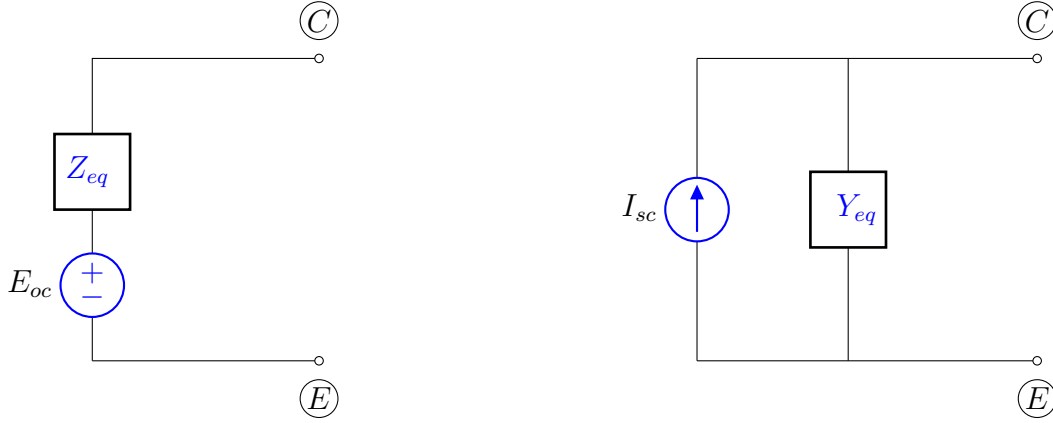


Figura 5.11: Circuitos equivalentes de Thévenin y Norton de la red eléctrica del ejemplo 5.4.

así, se tiene finalmente

$$Z_{eq} = \frac{E_{oc}}{I_{sc}} = 145.6475 \angle -41.7349^\circ \quad Y_{eq} = \frac{I_{sc}}{E_{oc}} = 6.8659 \times 10^{-3} \angle 41.7349^\circ$$

Los circuitos buscados se muestran en la figura 5.11.

Prueba del teorema

Únicamente, se verifica la validez del circuito equivalente de Thévenin. La prueba correspondiente para el circuito equivalente de Norton, se puede desarrollar de forma similar.

Primero, se sustituyen todas las condiciones iniciales por fuentes independientes, de manera tal que la red eléctrica no contenga energía inicial y sea factible aplicar el teorema de superposición.

A continuación, empleando el teorema de sustitución, la carga arbitraria se suple por una fuente independiente de corriente de valor i .

Como la red eléctrica se ha supuesto lineal, se puede recurrir al teorema de superposición, para determinar el voltaje v . Este voltaje v es la respuesta de estado cero debida a dos conjuntos de fuentes independientes; la primera es la fuente independiente de corriente i que ha sustituido a la carga arbitraria y la otra son las fuentes independientes de la red eléctrica η .

La respuesta de estado cero que causa la fuente de corriente es

$$v_i(t) = \int_0^t h(t, \tau) i(\tau) d\tau$$

donde $h(t, \tau)$ es la respuesta al impulso de la red eléctrica relajada η_o en el tiempo t cuando se aplica un impulso unitario en el tiempo $t = \tau$.

Para determinar el voltaje ocasionado por las fuentes independientes en la red eléctrica η , se ponen en circuito abierto sus terminales, para suprimir la fuente de corriente i (que ha sustituido a la carga arbitraria). Este voltaje de circuito abierto, se denota como e_{oc} .

Considerando, nuevamente, que la red eléctrica η es lineal, el voltaje $v(t)$ resulta ser

$$v(t) = v_i(t) + e_{oc}(t) = \int_0^t h(t, \tau) i(\tau) d\tau + e_{oc}(t)$$

Ahora considere el circuito equivalente de Thévenin, en la figura 5.12. Para la malla que se muestra, de la segunda ley de Kirchhoff se tiene

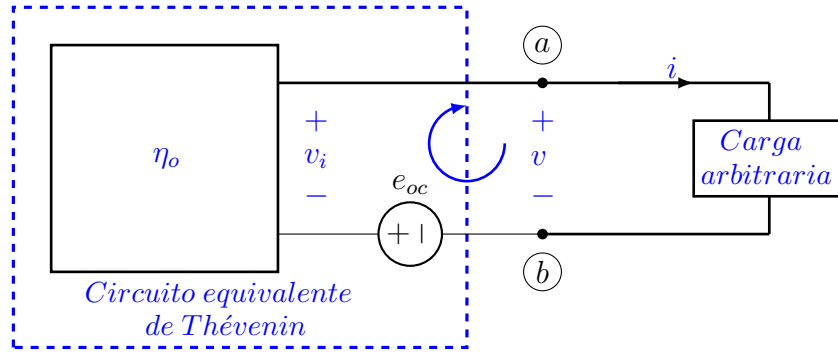


Figura 5.12: Circuito eléctrico equivalente de Thévenin.

$$v(t) = v_i(t) + e_{oc}(t) = \int_0^t h(t, \tau) i(\tau) d\tau + e_{oc}(t)$$

que es exactamente la misma ecuación que ya se ha obtenido antes.

5.6. Teorema de Reciprocidad

El teorema que se estudia a continuación tiene una aplicación más restringida, pues sólo se destina a redes lineales e invariantes en el tiempo y que además no contengan fuentes dependientes ni *giradores*. El quid fundamental del teorema es que cuando se aplica a un sistema físico, la entrada y la salida se pueden intercambiar sin que se modifique la señal de la respuesta del sistema para una señal de entrada dada. La línea telefónica constituye el prototipo de lo anterior.

Considere una red eléctrica lineal e invariante en el tiempo, constituida por resistores, inductores, inductores acoplados, capacitores y transformadores. Se acostumbra, emplear el símbolo η_R para designar a las redes eléctricas que satisfacen estas condiciones.

1. Aserción. Considere las configuraciones de redes eléctricas que se muestran en la figura 5.13.

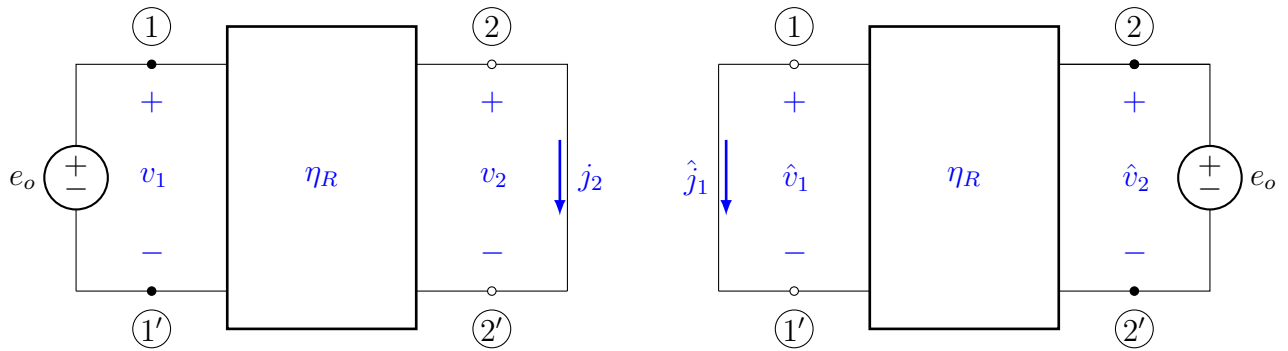


Figura 5.13: Primer aserto del teorema de reciprocidad.

El teorema de reciprocidad afirma que para cualquier topología y valores de los elementos de la red eléctrica η_R y para toda forma de onda de la fuente independiente de voltaje e_o , las corrientes eléctricas de corto circuito

$$j_2(t) = \hat{j}_1(t) \quad \forall t$$

En términos de la función de transferencia

$$Y_{21}(s) \triangleq \frac{J_2(s)}{E_o(s)} = Y_{12}(s) \triangleq \frac{\hat{J}_1(s)}{E_o(s)}$$

2. Aserción. Considere las configuraciones de redes eléctricas que se muestran en la figura 5.14

El teorema de reciprocidad afirma que para cualquier topología y valores de los elementos de la red eléctrica η_R y para toda forma de onda de la fuente independiente de corriente i_o , los voltajes de circuito abierto

$$v_2(t) = \hat{v}_1(t) \quad \forall t$$

De igual manera, en términos de la función de transferencia

$$Z_{21}(s) \triangleq \frac{V_2(s)}{I_o(s)} = Z_{12}(s) \triangleq \frac{\hat{V}_1(s)}{I_o(s)}$$

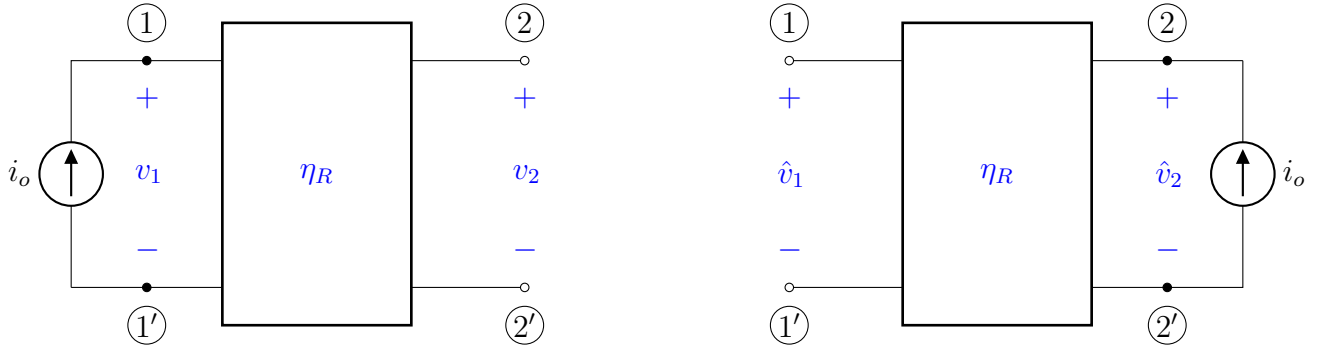


Figura 5.14: Segundo aserto del teorema de reciprocidad.

3. Aserción. Considere las configuraciones de redes eléctricas que se muestran en la figura 5.15

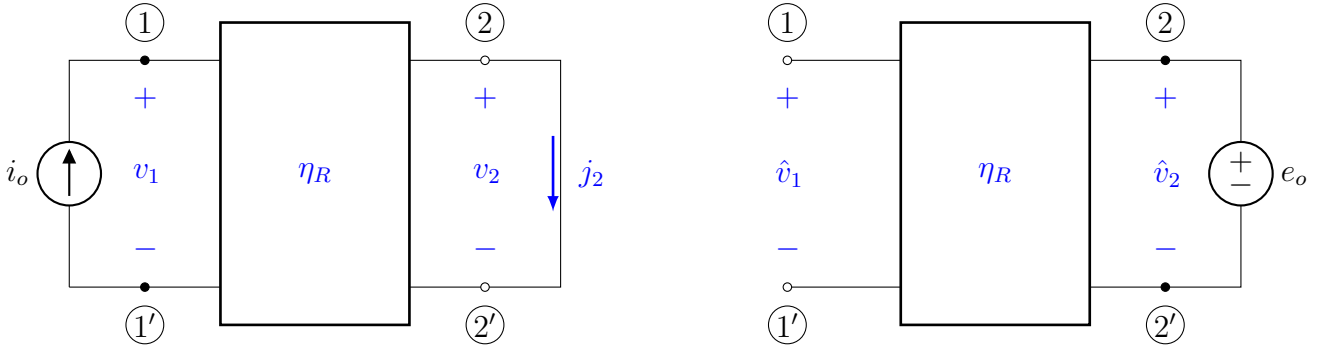


Figura 5.15: Tercer aserto del teorema de reciprocidad.

El teorema de reciprocidad afirma que para cualquier topología y valores de los elementos de las redes eléctricas η_R y para toda forma de onda de las fuentes independientes, si $i_o(t)$ y $e_o(t)$ son iguales para todo t , entonces

$$j_2(t) = \hat{v}_1(t) \quad \forall t$$

En términos de la función de transferencia

$$H_i(s) \triangleq \frac{J_2(s)}{I_o(s)} = H_v(s) \triangleq \frac{\hat{V}_1(s)}{E_o(s)}$$

Prueba del teorema

La validez de este teorema se verifica a partir del teorema de Tellegen. De acuerdo a las configuraciones planteadas por el teorema y considerando direcciones de referencia asociadas, es obvio que

$$V_1(s)\hat{J}_1(s) + V_2(s)\hat{J}_2(s) + \sum_{k=3}^b V_k(s)\hat{J}_k(s) = 0 \quad (5.21)$$

y

$$\hat{V}_1(s)J_1(s) + \hat{V}_2(s)J_2(s) + \sum_{k=3}^b \hat{V}_k(s)J_k(s) = 0 \quad (5.22)$$

Si la k -ésima rama de la red eléctrica es un resistor, un capacitor o un inductor, entonces es cierto que

$$V_k(s)\hat{J}_k(s) = J_k(s)Z_k(s)\hat{J}_k(s) = J_k(s)\hat{V}_k(s) \quad (5.23)$$

donde $Z_k(s)$ es la impedancia de la k -ésima rama. Si las ramas m y n fueran dos inductores acoplados o las ramas de un transformador ideal, entonces

$$V_m(s)\hat{J}_m(s) + V_n(s)\hat{J}_n(s) = \hat{V}_m(s)J_m(s) + \hat{V}_n(s)J_n(s) \quad (5.24)$$

Teniendo presente las ecuaciones (5.23) y (5.24), se puede inferir que las sumas de las ecuaciones (5.21) y (5.22) son iguales y por consiguiente

$$V_1(s)\hat{J}_1(s) + V_2(s)\hat{J}_2(s) = \hat{V}_1(s)J_1(s) + \hat{V}_2(s)J_2(s) \quad (5.25)$$

1. Aserción. En la primera condición, $V_1(s) = E_o(s)$ y $V_2(s) = 0$. En la segunda condición $\hat{V}_2(s) = E_o(s)$ y $\hat{V}_1(s) = 0$. Así, de la ecuación (5.25) se tiene

$$E_o(s)\hat{J}_1(s) = E_o(s)J_2(s)$$

2. Aserción. En la primera condición, $J_1(s) = -I_o(s)$ y $J_2(s) = 0$. En la segunda condición $\hat{J}_2(s) = -I_o(s)$ y $\hat{J}_1(s) = 0$. Así, de la ecuación (5.25) se tiene

$$-V_2(s)I_o(s) = -\hat{V}_1(s)I_o(s)$$

3. Aserción. En la primera condición, $J_1(s) = -I_o(s)$ y $V_2(s) = 0$. En la segunda condición $\hat{V}_2(s) = E_o(s)$ y $\hat{J}_1(s) = 0$. Así, de la ecuación (5.25) se tiene

$$\frac{\hat{V}_1(s)}{E_o(s)} = \frac{J_2(s)}{I_o(s)}$$

5.7. Teorema de Máxima Transferencia de Energía

Suponga que un generador suministra energía a una carga eléctrica como muestra la figura 5.16. Sea la impedancia del generador en términos de su parte real (*resistencia*) y su parte imaginaria (*reactancia*).

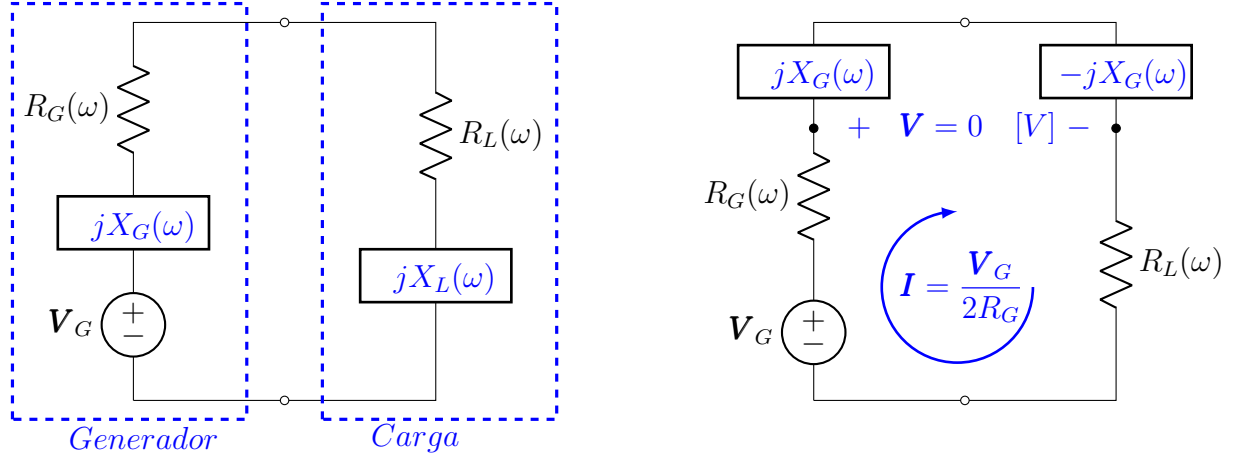


Figura 5.16: El generador suministra energía eléctrica a una carga eléctrica arbitraria.

$$Z_G(j\omega) = R_G(\omega) + jX_G(\omega)$$

También, sea la impedancia de la carga eléctrica de la forma

$$Z_L(j\omega) = R_L(\omega) + jX_L(\omega)$$

Si el generador proporciona un voltaje cuya representación fasorial es $\mathbf{V}_G$. ¿Qué impedancia (de la carga eléctrica) $Z_L(j\omega)$ recibirá la máxima potencia, suponiendo que la parte real y la parte imaginaria de $Z_L(j\omega)$ se pueden ajustar independientemente?

Como se sabe, la potencia promedio que se entrega a la carga eléctrica $Z_L(j\omega)$ es

$$P = \frac{1}{2} I_m^2 R_L(\omega) \quad (5.26)$$

Empleando fasores

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_G}{R_G(\omega) + jX_G(\omega) + R_L(\omega) + jX_L(\omega)} = \frac{\mathbf{V}_G}{[R_G(\omega) + R_L(\omega)] + j[X_G(\omega) + X_L(\omega)]}$$

la amplitud de la señal de la corriente eléctrica es

$$I_m = \frac{V_m}{\sqrt{[R_G(\omega) + R_L(\omega)]^2 + [X_G(\omega) + X_L(\omega)]^2}} \quad (5.27)$$

Por lo que la potencia promedio es

$$P = \frac{1}{2} \frac{R_L(\omega) V_m^2}{[R_G(\omega) + R_L(\omega)]^2 + [X_G(\omega) + X_L(\omega)]^2} \quad (5.28)$$

De la ecuación anterior, es obvio que si se quiere que P tenga un valor máximo es necesario que

$$X_L(\omega) = -X_G(\omega) \quad (5.29)$$

por lo que

$$P = \frac{V_m^2}{2} \frac{R_L(\omega)}{[R_G(\omega) + R_L(\omega)]^2} \quad (5.30)$$

Para encontrar el valor de R_L que hace a P máxima, se deriva la ecuación (5.30) con respecto a R_L , se iguala a cero y se resuelve para R_L . Así

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dR_L} &= \frac{V_m^2}{2} \frac{[R_G(\omega) + R_L(\omega)]^2 - 2[R_G(\omega) + R_L(\omega)]R_L(\omega)}{[R_G(\omega) + R_L(\omega)]^4} \\ \frac{dP}{dR_L} &= \frac{V_m^2}{2} \frac{R_G(\omega) - R_L(\omega)}{[R_G(\omega) + R_L(\omega)]^3} = 0 \end{aligned}$$

lo que implica

$$R_L(\omega) = R_G(\omega) \quad (5.31)$$

Entonces el generador entrega a la carga eléctrica una potencia activa máxima de

$$P \Big|_{\text{máxima}} = \frac{1}{8} \frac{V_m^2}{R_G(\omega)} \quad (5.32)$$

cuando la impedancia de la carga eléctrica es igual al complejo conjugado de la impedancia del generador; o sea

$$Z_L(\omega) = R_G(\omega) - jX_G(j\omega) \quad (5.33)$$

Cuando esta condición se satisface, se dice que la impedancia de la carga eléctrica está *apareada* con la impedancia del generador, o simplemente que la carga eléctrica está *apareada* con el generador.

Si la carga eléctrica está apareada con el generador, la corriente eléctrica en el circuito eléctrico de la figura 5.16 es

$$I = \frac{1}{2} \frac{V_G}{R_G(\omega)}$$

y la potencia promedio que entrega el generador es

$$P_G = \frac{1}{4} \frac{V_m^2}{R_G(\omega)}$$

Ejemplo 5.5 ¿Cuál debe ser el valor de la impedancia $Z_L(j\omega)$ del circuito eléctrico de la figura 5.17, para que la energía que consume por unidad de tiempo sea máxima? ¿Cuál es la potencia activa que se suministra a esta carga?

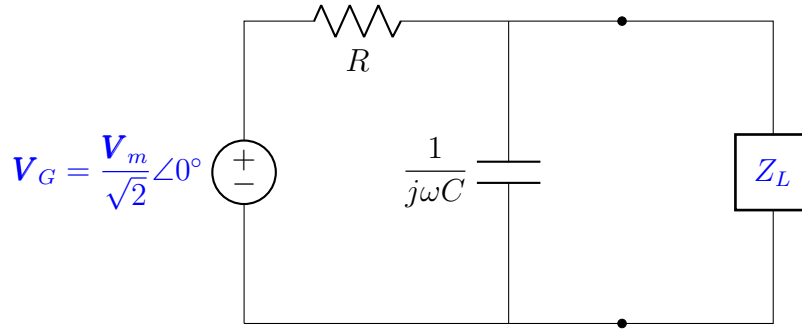


Figura 5.17: Generador alimentando a una carga arbitraria.

Primero se encuentra el circuito equivalente de Thévenin de la red eléctrica vista por la carga eléctrica $Z_L(j\omega)$, el cual se muestra en la figura 5.18a. El fasor correspondiente al voltaje de circuito abierto es

$$\mathbf{E}_{oc}(j\omega) = \frac{(1/(j\omega C))}{R + 1/(j\omega C)} \mathbf{V}_G = \frac{1}{1 + j\omega RC} \mathbf{V}_G$$

y la impedancia equivalente

$$Z_{Th}(j\omega) = \frac{R(1/(j\omega C))}{R + 1/(j\omega C)}$$

Si se desea suministrar la máxima potencia promedio a la carga $Z_L(j\omega)$, ésta debe ser el complejo conjugado de la impedancia del circuito equivalente de Thévenin, es decir del circuito RC .

$$\begin{aligned} Z_L(j\omega) &= Z_{Th}(j\omega) \Big|_{j \text{ sustituida por } -j} = Z_{Th}(-j\omega) \\ Z_L(j\omega) &= \frac{R(1/(-j\omega C))}{R + 1/(-j\omega C)} = \frac{R(j/(\omega C))}{R + j/(\omega C)} = \frac{R(j\omega L)}{R + j\omega L} \end{aligned} \quad (5.34)$$

Es evidente, de la ecuación anterior que la $Z_L(j\omega)$ que se busca, representa un resistor R conectado en paralelo con un inductor, cuya inductancia es $L = 1/\omega^2 C$. El circuito eléctrico resultante se muestra en la figura 5.18b.

Para calcular la potencia que se suministra a la carga, es necesario determinar $R_L(\omega)$, la parte real de $Z_L(j\omega)$. De la ecuación (5.34) se obtiene

$$\begin{aligned} Z_L(j\omega) &= \frac{R}{1 - j\omega CR} = \frac{R}{1 - j\omega CR} \frac{1 + j\omega CR}{1 + j\omega CR} = \frac{R}{1 + (\omega CR)^2} + j \frac{\omega CR^2}{1 + (\omega CR)^2} \\ Z_L(j\omega) &= R_L(\omega) + jX_L(\omega) \end{aligned}$$

Y la máxima potencia promedio es por tanto

$$P \Big|_{\text{máxima}} = \frac{1}{8} \frac{V_m^2}{R_L(\omega)} \quad [\text{W}]$$

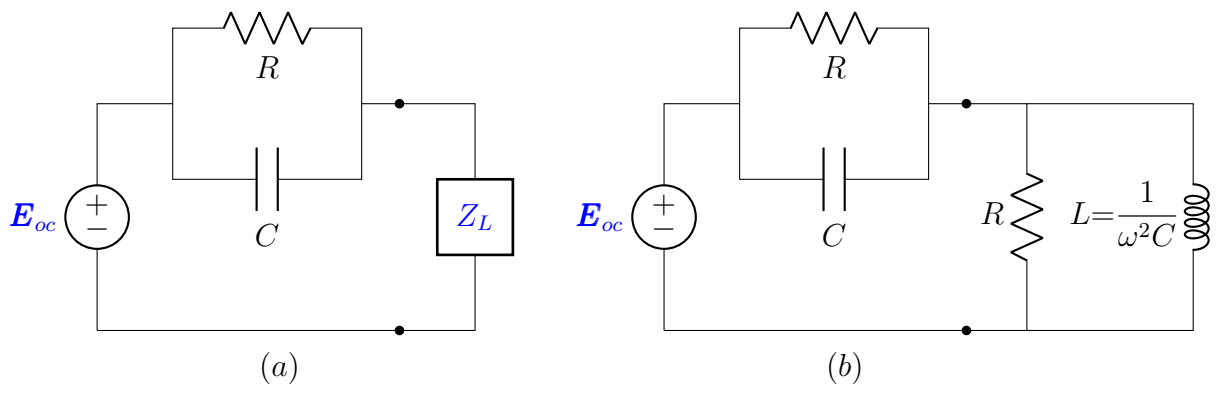


Figura 5.18: (a) Circuito equivalente de Thévenin. (b) Circuito con la impedancia de la carga eléctrica apareada con la impedancia del generador.