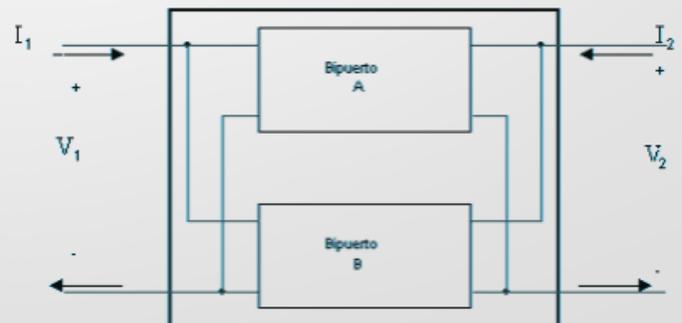
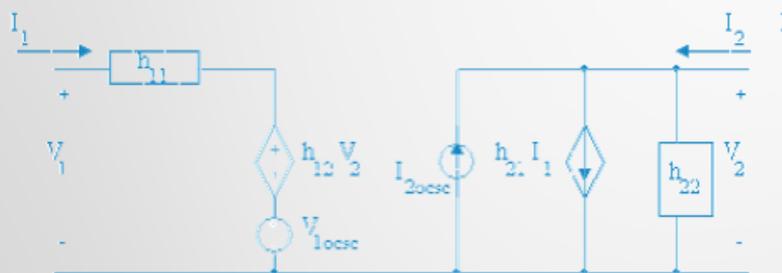




# Bipertos

**Gloria Mata Hernández**



- **Departamento de Ingeniería de Control**
- **División de Ingeniería Eléctrica**

# CONTENIDO

<b>BIPUERTOS .....</b>	<b>3</b>
IV.1 Redes Eléctricas de dos puertos .....	3
IV.2 Representación matricial de bipuertos .....	3
IV.2.1 Circuito Equivalente con Parámetros de Impedancia (Z) .....	4
IV.2.2 Circuito Equivalente con Parámetros de Admitancia (Y).....	6
IV.2.3 Circuito Equivalente con Parámetros Híbridos (H) .....	8
IV.2.4 Circuito Equivalente con Parámetros Híbridos Inversos(G).....	9
IV.2.5 Circuitos Equivalentes con parámetros de Transmisión y Transmisión inversa (T y T')....	10
IV.2.6 Relación entre Parámetros del Bipuerto.....	11
IV.2.7 Análisis del bipuerto terminado .....	<b>¡Error! Marcador no definido.</b>
IV.3 Conexiones entre Bipuertos .....	16
IV.3.1 Conexión en Cascada .....	16
IV.3.2 Conexión en Serie .....	17
IV.3.4 Conexión Serie-Paralelo.....	18
IV.3.5 Conexión Paralelo-Serie.....	19
IV.4 Redes Básicas de Bipuertos.....	19
IV.5 Modelo Lineal y Función de Transferencia del Transformador .....	19
IV.5.1 El Transformador Ideal .....	25

## IV.1 Redes Eléctricas de dos puertos

Las redes eléctricas con dos terminales especificadas, que incluyen fuentes e impedancias pueden representarse mediante circuitos equivalentes de Thévenin y Norton, los cuales simplifican el análisis de circuitos con respecto a ese par de terminales. El concepto de circuito equivalente puede generalizarse a redes de tres y cuatro terminales, éstas últimas llamadas bipuertos.

El bipuerto es una red eléctrica, la cual tiene dos pares de terminales, uno que representa la entrada y el otro la salida, por lo que es de gran utilidad cuando se requieren conocer las características externas de la red; en caso contrario, los métodos de análisis de redes permiten determinar los voltajes y corrientes en cualquiera de sus elementos.

El análisis de redes mediante la técnica de bipuertos permite caracterizar por completo la red, con o sin fuentes externas y carga conectada a la red, es decir, permite determinar características como funciones de transferencia, impedancias, equivalentes de Thévenin y Norton, entre otros, y determinar circuitos equivalentes que simplifican grandemente el análisis de una red compleja.

La figura 1 muestra el bloque constitutivo de un bipuerto lineal e invariante en el tiempo (LIT) el cual puede incluir impedancias, fuentes dependientes, independientes y/o fuentes debidas a condiciones iniciales de los elementos que integran la red del bipuerto, con terminales 1-1' y 2-2' agrupadas en pares. El bipuerto debe cumplir con la propiedad de que la corriente neta que entra a cada par de terminales es cero, es decir,  $i_1 = i_{1'}$  e  $i_2 = i_{2'}$ . En esta figura se indican las polaridades de referencia de los voltajes y las direcciones de referencia de las corrientes.



Figura 1 Bloque que constituye un bipuerto

El análisis de circuitos mediante bipuertos puede llevarse a cabo de dos formas: la analítica, calculando los voltajes y corrientes en sus terminales si se conoce el circuito que integra el bipuerto; y a través de la medición de los voltajes y corrientes en sus terminales considerando el bipuerto como una caja negra.

## IV.2 Representación matricial de bipuertos

En el análisis con bipuertos, las únicas variables de interés son las que definen los puertos  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $v_1$  y  $v_2$ . La descripción más general del bipuerto se lleva a cabo en a través de la Transformada de Laplace de las variables, mediante el uso de la variable  $s$ . Un caso particular es el análisis en estado senoidal permanente en el cual se puede hacer uso de los fasores. En este sentido, las variables del bipuerto las denotaremos como  $V_1, V_2, I_1$  e  $I_2$  correspondiendo a la Transformada de Laplace de  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $v_1$  y  $v_2$ .

De estas cuatro variables dos son dependientes y dos independientes. Las posibles combinaciones se listan en la Tabla 1 junto con los parámetros del circuito equivalente con el cual están asociados. De manera particular, hay seis formas en las que se combinan las cuatro variables, generando seis conjuntos de ecuaciones las cuales pueden considerarse como tres pares de relaciones mutuamente inversas.

El primer conjunto de variables (parámetros Z) relaciona los voltajes de entrada y salida,  $V_1$  y  $V_2$  del bipuerto como funciones de las corrientes de entrada y salida,  $I_1$  y  $I_2$  del mismo, el segundo conjunto (parámetros Y) proporciona las relaciones inversas, esto es, las corrientes de entrada y salida,  $I_1$  y  $I_2$  del bipuerto como funciones de los voltajes de entrada y salida,  $V_1$  y  $V_2$  del

mismo. Los pares de variables de los parámetros  $H$  y  $G$  son relaciones inversas al igual que los parámetros de  $T$  y  $T'$ , como se observa en la Tabla 1.

**Tabla 1 Variables de Entrada y de Salida de un Bipuerto**

<i>Variables dependientes</i>	<i>Variables independientes</i>	<i>Parámetros del circuito equivalente</i>
$V_1, V_2$	$I_1, I_2$	Impedancia ( $Z$ )
$I_1, I_2$	$V_1, V_2$	Admitancia ( $Y$ )
$V_1, I_2$	$I_1, V_2$	Híbridos ( $H$ )
$I_1, V_2$	$V_1, I_2$	Híbridos ( $G$ )
$V_1, I_1$	$V_2, -I_2$	Transmisión ( $T$ )
$V_2, I_2$	$V_1, -I_1$	Transmisión inversa ( $T'$ )

## IV.2.1 Circuito Equivalente con Parámetros de Impedancia ( $Z$ )

El caso general de análisis del bipuerto LIT de la figura 1, es el que incluye impedancias, fuentes independientes y dependientes. Para determinar la red equivalente con parámetros de impedancia, consideremos los voltajes  $V_1$  y  $V_2$  como las variables dependientes, y las corrientes  $I_1$  e  $I_2$ , así como las fuentes independientes  $V_{1CA}$  y  $V_{2CA}$  (si existen), dentro del bipuerto como las variables independientes, obteniendo el par de Ecs.(1).

$$\begin{aligned} V_1 &= z_{11}I_1 + z_{12}I_2 + V_{1CA} \\ V_2 &= z_{21}I_1 + z_{22}I_2 + V_{2CA} \end{aligned} \quad (1)$$

las cuales se pueden expresar en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{1CA} \\ V_{2CA} \end{bmatrix} \quad (1a)$$

o bien

$$V = ZI + V_{CA} \quad (1b)$$

donde la matriz

$$Z = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}$$

es la matriz de impedancias a circuito abierto,  $z_{ij}$  son llamados parámetros de impedancia a circuito abierto y  $V_{CA}$  es el vector de Voltajes a Circuito Abierto debido a las fuentes independientes dentro del bipuerto.

Ya que la red es lineal, se puede aplicar el principio de superposición para obtener los voltajes  $V_1$  y  $V_2$  a través de las contribuciones de cada fuente independiente actuando una a la vez.

Las componentes de  $V_1$  y  $V_2$  causadas por las fuentes independientes dentro de la red se determinan haciendo  $I_1 = I_2 = 0$  (terminales 1 y 2 en circuito abierto), como se ilustra en la figura 2. Los valores resultantes de  $V_1$  y  $V_2$  se llaman voltajes a circuito abierto, esto es:

$$V_{1CA} = V_1 \Big|_{I_1=0, I_2=0} \quad (2)$$

$$V_{2CA} = V_2 \Big|_{I_1=0, I_2=0} \quad (3)$$



Figura 2  $V_{1CA}$  y  $V_{2CA}$  se determinan haciendo  $I_1 = I_2 = 0$ .

La componente de  $V_1$  debida a la corriente  $I_1$  se determina haciendo  $I_2=0$  (terminal 2 abierta) y todas las fuentes independientes dentro del bipuerto también se fijan a cero en la Ec.(1), esta condición se muestra en la figura 3. Por lo que, la contribución de  $V_1$  debida a  $I_1$  es

$$V_1 \Big|_{\substack{I_2=0 \\ FII=0}} = z_{11} I_1 \quad (4)$$

donde  $FII=0$  denota las **F**uentes **I**ndependientes **I**nternas fijadas a cero y  $z_{11}$  es la impedancia de entrada en el puerto 1 con el puerto 2 a circuito abierto. A partir de la Ec.(4) se determina  $z_{11}$  y de manera similar se determinan el resto de las constantes de proporcionalidad.

Las constantes  $z_{11}$ ,  $z_{21}$ ,  $z_{12}$  y  $z_{22}$  se llaman parámetros **z** o de impedancia a circuito abierto del bipuerto y se describen como



Figura 3 Los parámetros  $z_{11}$  y  $z_{21}$  se determinan haciendo cero  $I_2$  y todas las fuentes independientes internas.



Figura 4 Los parámetros  $z_{12}$  y  $z_{22}$  se determinan haciendo cero  $I_1$  y todas las fuentes independientes internas.

$$\begin{aligned} z_{11} &= \frac{V_1}{I_1} \Big|_{\substack{I_2=0 \\ FII=0}} & z_{12} &= \frac{V_1}{I_2} \Big|_{\substack{I_1=0 \\ FII=0}} \\ z_{21} &= \frac{V_2}{I_1} \Big|_{\substack{I_2=0 \\ FII=0}} & z_{22} &= \frac{V_2}{I_2} \Big|_{\substack{I_1=0 \\ FII=0}} \end{aligned} \quad (5)$$

$z_{11}$  Impedancia de entrada vista desde el puerto 1 cuando el puerto 2 está abierto

$z_{21}$  Impedancia de transferencia cuando el puerto 2 está abierto

$z_{12}$  Impedancia de transferencia inversa cuando el puerto 1 está abierto

$z_{22}$  Impedancia de salida vista desde el puerto 2 cuando el puerto 1 está abierto

Por lo tanto, los parámetros de impedancia pueden ser *calculados* o *medidos* abriendo primero el puerto 2 y determinado los cocientes  $V_1/I_1$  y  $V_2/I_1$ , como se indica en la figura 3, y luego abriendo el puerto 1 y determinando los cocientes  $V_1/I_2$  y  $V_2/I_2$ , como se muestra en la figura 4.

Las Ecs.(2),(3) y (5) sintetizadas en la Ec.(1b), caracterizan por completo al bipuerto de la figura 1.

Un caso especial de importancia del bipuerto de la figura 1 es el aquel que no contiene fuentes independientes dentro de él.

En este caso  $V_{CA} = 0$  y la Ec.(1a) se modifica a

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

o bien

$$V = ZI$$

de manera que se siguen cumpliendo las mismas condiciones analizadas, quedando ahora los parámetros de impedancia como

$$\begin{aligned} z_{11} &= \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} & z_{12} &= \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0} \\ z_{21} &= \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0} & z_{22} &= \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0} \end{aligned} \quad (7)$$

Existen varios circuitos equivalentes que cumplen con el par de Ecs.(1), por lo que el bipuerto de la figura 1 puede reemplazarse por las redes de la figura 5, ya sea que el bipuerto contenga o no fuentes independientes internamente.

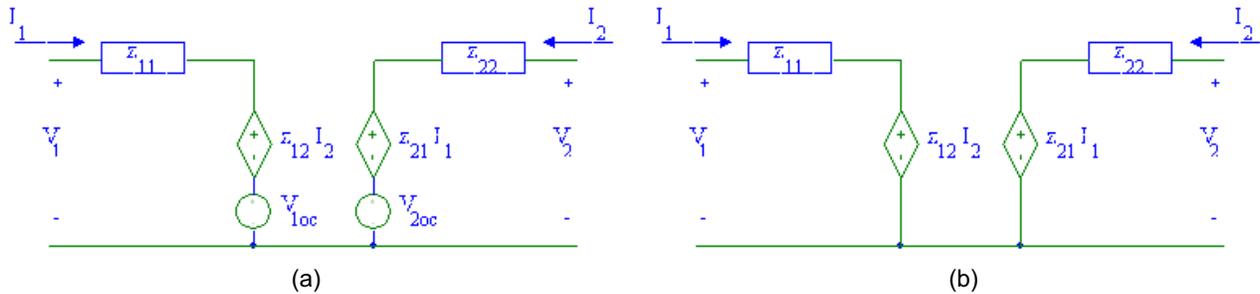


Figura 5 Red equivalente del bipuerto con parámetros de impedancia (a) con fuentes independientes (b) sin fuentes independientes

#### IV.2.2 Circuito Equivalente con Parámetros de Admitancia (Y)

Otra forma de obtener un equivalente del bipuerto de la figura 1, es tomando las corrientes  $I_1$  e  $I_2$  como variables dependientes y los voltaje  $V_1$ ,  $V_2$  así como las fuentes independientes (si existen) dentro del bipuerto como las variables independientes. Esta consideración permite plantear el par de ecuaciones de parámetros de admitancia.

$$\begin{aligned} I_1 &= y_{11}V_1 + y_{12}V_2 - I_{1CC} \\ I_2 &= y_{21}V_1 + y_{22}V_2 - I_{1CC} \end{aligned} \quad (8)$$

que en forma matricial quedan como

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I_{1CC} \\ I_{1CC} \end{bmatrix} \quad (8a)$$

o bien

$$I = YV - I_{CC} \quad (8b)$$

donde

$$Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$$

es la matriz de admitancias de corto circuito con parámetros  $y_{ij}$ ,  $I_{CC}$  es el vector de corrientes de corto circuito y representa las contribuciones de las corrientes que salen del bipuerto debidas a las fuentes independientes y condiciones iniciales (si existen) de los elementos dentro del bipuerto.

De nuevo, se aplica el principio de superposición para plantear las ecuaciones para  $I_1$  e  $I_2$  como una combinación lineal de las componentes de corriente causadas por las fuentes de voltaje externas y las fuentes independientes dentro del bipuerto. Esto es, las componentes  $I_{1CC}$  e  $I_{2CC}$  se determinan haciendo  $V_1 = V_2 = 0$  (poniendo en corto las terminales 1-1' y 2-2'), como se ilustra en la figura 6. Las corrientes resultantes de  $I_{1CC}$  e  $I_{2CC}$  se llaman corrientes de corto circuito, esto es:

$$I_{1CC} = -I_1 \Big|_{V_1=0, V_2=0} \quad (9)$$

$$I_{2CC} = -I_2 \Big|_{V_1=0, V_2=0} \quad (10)$$

A partir de las Ecs.(8), la componente de  $I_1$  debida al voltaje  $V_1$  se determinan haciendo cero tanto  $V_2$  (corto circuito en las terminales 2-2') como todas las fuentes independientes dentro del bipuerto, esto también se muestra en la figura 7(a), por lo que, la contribución de  $I_1$  debida a  $V_1$  es

$$I_1 \Big|_{V_2=0, FII=0} = y_{11} V_1 \quad (11)$$

donde  $FII=0$  denota las fuentes independientes internas fijadas a cero y  $y_{11}$  es la admitancia de entrada en el puerto 1 con el puerto 2 en corto circuito.

A partir de la Ec.(11) y las conexiones de la figura 7 se determina  $y_{11}$  y de manera similar se calculan el resto de las constantes de proporcionalidad, obteniendo:



Figura 6 Las corrientes  $I_{1CC}$  e  $I_{2CC}$  se determinan haciendo  $V_1 = V_2 = 0$ .

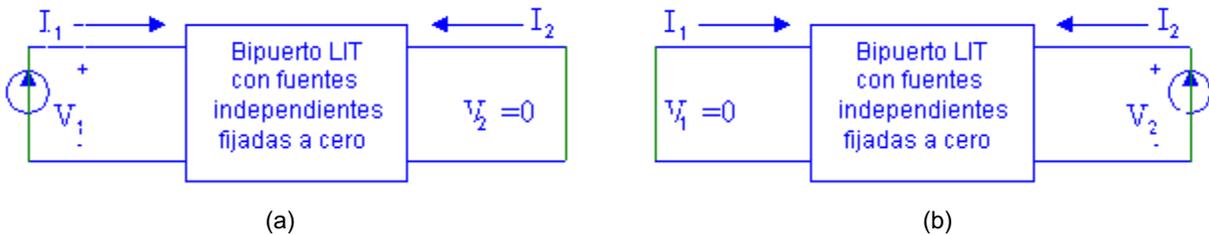


Figura 7 Conexiones para determinar los parámetros  $y_{ij}$ . (a)  $y_{11}$  y  $y_{21}$ , (b)  $y_{12}$  y  $y_{22}$

$$y_{11} = \frac{I_1}{V_1} \Big|_{V_2=0, FII=0} \quad y_{12} = \frac{I_1}{V_2} \Big|_{V_1=0, FII=0} \quad (12)$$

$$y_{21} = \frac{I_2}{V_1} \Big|_{V_2=0, FII=0} \quad y_{22} = \frac{I_2}{V_2} \Big|_{V_1=0, FII=0}$$

Las constantes  $y_{11}$ ,  $y_{21}$ ,  $y_{12}$  y  $y_{22}$  se llaman parámetros  $y$  o de admitancia en corto circuito del bipuerto y se describen como

- $y_{11}$  Admitancia de entrada vista desde el puerto 1 cuando el puerto 2 está en corto circuito
- $y_{21}$  Admitancia de transferencia cuando el puerto 2 está en corto circuito
- $y_{12}$  Admitancia de transferencia inversa cuando el puerto 1 está en corto circuito
- $y_{22}$  Admitancia de salida vista desde el puerto 2 cuando el puerto 1 está en corto circuito

De lo anterior, los parámetros de admitancia pueden ser *calculados* o *medidos* poniendo en corto circuito el puerto 2 y determinando los cocientes  $I_1/V_1$  e  $I_2/V_1$  y luego poniendo en corto el puerto 1 y determinando los cocientes  $I_1/V_2$  e  $I_2/V_2$ . Las Ecs.(9),(10) y (12) sintetizadas en la Ec.(8b), también caracterizan por completo al bipuerto de la figura 1, desde el punto de vista de admitancias. Además se verifica que

$$Y = Z^{-1}$$

De manera similar al análisis de impedancias, si el bipuerto de la figura 1 no contiene fuentes independientes dentro de él, entonces  $I_{CC}=0$ , de manera que se siguen cumpliendo las mismas condiciones analizadas para los parámetros de admitancia, quedando ahora como

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

o bien

$$I = YV \quad (13a)$$

en cuyo caso los parámetros cambian a

$$\begin{aligned} y_{11} &= \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0} & y_{12} &= \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0} \\ y_{21} &= \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0} & y_{22} &= \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0} \end{aligned} \quad (14)$$

Al igual que con los parámetros de impedancias, existen varios circuitos equivalentes que obedecen las Ecs.(8) o las Ecs.(13), por lo que el bipuerto de la figura 1 puede también representarse mediante la red equivalente de la figura 8(a) si el bipuerto contiene fuentes independientes o por el de la figura 8(b) si no las incluye.

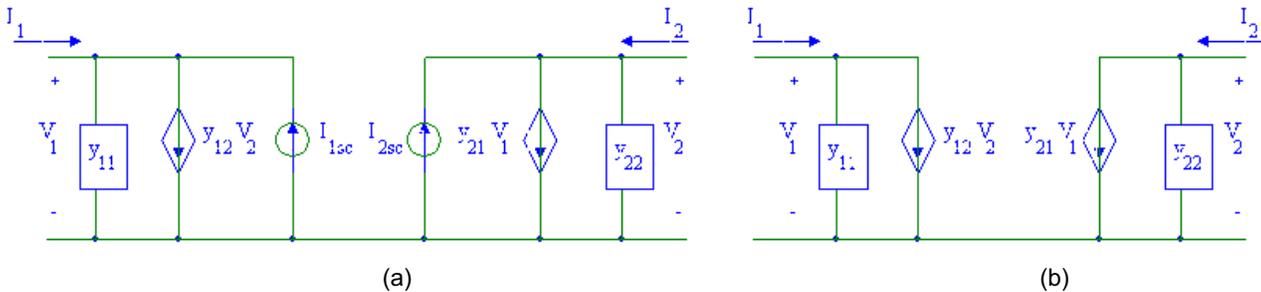


Figura 8 Circuitos equivalentes del bipuerto: (a) con fuentes independientes (b) sin fuentes independientes.

### IV.2.3 Circuito Equivalente con Parámetros Híbridos (H)

Se puede obtener un tercer circuito equivalente del bipuerto de la figura 1 si se consideran como variables independientes a  $I_1$  y  $V_2$  y como variables dependientes a  $V_1$ ,  $I_2$  y las contribuciones de voltaje y corriente debidos a las fuentes dentro del bipuerto. El par de ecuaciones en forma matricial queda como

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{1CACC} \\ -I_{2CACC} \end{bmatrix} \quad (15)$$

o bien

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (15a)$$

para el caso en el que el bipuerto no contenga fuentes independientes internamente. En ambos pares de ecuaciones, Ecs.(15) y (15a), la matriz híbrida  $H$  es

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$$

Las cantidades  $h_{11}$ ,  $h_{21}$ ,  $h_{12}$  y  $h_{22}$  son los parámetros híbridos del bipuerto de la figura 1 y se determinan a partir de las Ecs.(15), de manera similar a los parámetros descritos anteriormente, como

$$h_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{\substack{V_2=0 \\ FII=0}}$$

$$h_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{\substack{V_2=0 \\ FII=0}}$$

$$h_{12} = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{\substack{I_1=0 \\ FII=0}}$$

$$h_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{\substack{I_1=0 \\ FII=0}}$$

Al aplicar la superposición a  $V_1$  e  $I_2$ , éstos pueden expresarse como la combinación lineal de  $V_1$ ,  $V_2$  así como de  $V_{2CACC}$  e  $I_{1CACC}$ , el voltaje y la corriente debidos a las fuentes independientes dentro del bipuerto. Al igual que en los parámetros de impedancia y admitancia,  $FII=0$  denota que todas las fuentes independientes internas se fijan a cero. Las unidades de  $h_{11}$  y  $h_{22}$  son ohms y siemens, respectivamente, mientras que  $h_{12}$  y  $h_{21}$  son adimensionales. El hecho de que los cuatro parámetros no tengan las mismas unidades es la razón por la que estos parámetros se llaman híbridos. A partir de la Ecs.(16) se determina que  $V_{1CACC}$  e  $I_{2CACC}$  están dados por

$$V_{1CACC} = V_1 \Big|_{\substack{I_1=0 \\ V_2=0}}$$

$$I_{2CACC} = -I_2 \Big|_{\substack{I_1=0 \\ V_2=0}}$$

$V_{1CACC}$  e  $I_{2CACC}$  se interpretan como el voltaje  $V_1$  y la corriente  $I_2$ , respectivamente, medidos o calculados cuando la corriente  $I_1=0$  (circuito abierto) y el voltaje  $V_2=0$  (corto circuito).

La expresión de los parámetros híbridos cambia ligeramente si no existen fuentes independientes dentro del bipuerto, es decir, se elimina la condición de fuentes internas y los parámetros se calculan mediante

$$h_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{V_2=0}$$

$$h_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{V_2=0}$$

$$h_{12} = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_1=0}$$

$$h_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{I_1=0}$$

Los circuitos equivalentes asociados con el par de Ecs.(15) se muestran en la figura 9. En estos parámetros están asociados a una impedancia de entrada  $h_{11}$ , una admitancia de salida  $h_{22}$ , una ganancia de voltaje  $h_{12}$  y una ganancia de corriente  $h_{21}$ . El circuito equivalente del bipuerto con fuentes independientes se muestra en la figura 9(a), mientras que en la figura 9(b) se presenta el modelo que no incluye fuentes independientes dentro del bipuerto.

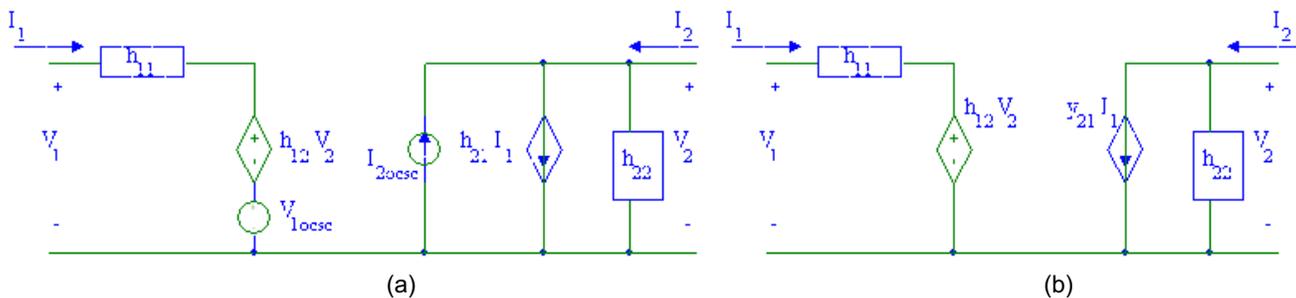


Figura 9 Circuitos equivalentes del bipuerto con parámetros  $h$  (a) con fuentes independientes (b) sin fuentes independientes.

#### IV.2.4 Circuito Equivalente con Parámetros Híbridos Inversos(G)

La segunda matriz híbrida es la de los parámetros Híbridos Inversos  $G$ , la forma matricial está dada por

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -I_{1CACC} \\ V_{2CACC} \end{bmatrix} \quad (16)$$

si el bipuerto contiene fuentes independientes, o bien

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (16a)$$

para el caso en el que el bipuerto no contenga fuentes independientes dentro de él. En ambos casos

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$$

es la matriz Híbrida Inversa  $G$  cuyos elementos son los parámetros  $g_{ij}$ ,  $I_{1CACC}$  y  $V_{2CACC}$  se interpretan como la corriente  $I_1$  y el voltaje  $V_2$ , respectivamente, medidos o calculados al hacer  $V_1 = 0$  (terminales 1-1' en corto circuito) e  $I_2 = 0$  (terminal 2-2' abiertas). También puede verificarse que

$$G = H^{-1}$$

Los parámetros  $G$  del bipuerto que contiene fuentes independientes internas se determinan mediante:

$$g_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{\substack{I_2=0 \\ IIS=0}} \quad g_{12} = \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{\substack{V_1=0 \\ IIS=0}}$$

$$g_{21} = \left. \frac{V_2}{V_1} \right|_{\substack{I_2=0 \\ IIS=0}} \quad g_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{\substack{V_1=0 \\ IIS=0}}$$

mientras que los parámetros  $G$  del bipuerto sin fuentes independientes internas están dados por

$$g_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{I_2=0} \quad g_{12} = \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{V_1=0}$$

$$g_{21} = \left. \frac{V_2}{V_1} \right|_{I_2=0} \quad g_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{V_1=0}$$

## IV.2.5 Circuitos Equivalentes con parámetros de Transmisión y Transmisión inversa (T y T')

Los dos últimos parámetros equivalentes del bipuerto de la figura 1 son los de Transmisión  $T$  y Transmisión inversa  $T'$ , la forma matricial<sup>1</sup> del primero relaciona las variables de entrada  $V_1$  e  $I_1$  con las variables de salida  $V_2$  y  $-I_2$ . En este caso la variable de salida es  $-I_2$  en lugar de  $I_2$  (más adelante, en la conexión en cascada, se justifica el cambio de signo).

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

definiendo la matriz de transmisión  $T$ , también llamada matriz de parámetros ABCD, como

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

De nuevo, aplicando superposición se determinan los parámetros de transmisión, quedando como

$$t_{11} = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{-I_2=0} \quad t_{12} = \left. \frac{V_1}{-I_2} \right|_{V_2=0}$$

$$t_{21} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{-I_2=0} \quad t_{22} = \left. \frac{I_1}{-I_2} \right|_{V_2=0}$$

Finalmente, si tomamos las variables de entrada  $V_1$  y  $-I_1$  como dependientes y las variables de salida  $V_2$  e  $I_2$  como independientes, se tiene en forma matricial<sup>2</sup> las ecuaciones de los parámetros de transmisión inversa

<sup>1</sup> Debido a que simultáneamente no se pueden hacer cero las variables de entrada  $V_2$  y  $-I_2$ , este bipuerto está restringido a una red LTI que no contenga fuentes independientes.

<sup>2</sup> De manera similar a la nota 1 para los parámetros  $T$ : ya que simultáneamente no se pueden hacer cero las variables de entrada  $V_1$  y  $-I_1$ , el bipuerto está restringido a una red LTI que no contenga fuentes independientes.

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t'_{11} & t'_{12} \\ t'_{21} & t'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ -I_1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

definiendo la matriz de transmisión inversa  $T'$ , también llamada matriz de parámetros A'B'C'D', como

$$T' = \begin{bmatrix} t'_{11} & t'_{12} \\ t'_{21} & t'_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix}$$

determinando en este caso los parámetros de transmisión inversos bajo las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} t'_{11} &= \left. \frac{V_2}{V_1} \right|_{-I_1=0} & t'_{12} &= \left. \frac{V_2}{-I_1} \right|_{V_1=0} \\ t'_{21} &= \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{-I_1=0} & t'_{22} &= \left. \frac{I_2}{-I_1} \right|_{V_1=0} \end{aligned}$$

De manera similar al procedimiento descrito para los parámetros de impedancia, admitancia, se han obtenido el resto de los parámetros, los cuales pueden determinarse mediante cálculo o medición.

Como se ha visto, los parámetros de puerto se obtiene ya sea abriendo o poniendo en corto circuito un puerto y corresponden a una impedancia, a una admitancia o a un cociente adimensional de voltajes o corrientes.

## IV.2.6 Relación entre Parámetros del Bipuerto

Ya que los seis conjuntos de ecuaciones derivados de las variables de la tabla 1, Ecs.(6),(13),(15a),(16a),(17) y (18), relacionan las mismas variables, los parámetros asociados con cualquier par de ecuaciones deben relacionarse con los parámetros de los demás pares. Esto es, si se conoce una matriz de parámetros se puede determinar las matrices restantes.

Cabe destacar que no todos los bipuertos tienen las seis representaciones. De hecho, dependiendo de la configuración de la red que forma el bipuerto, éste puede tener al menos una de las seis representaciones.

Debido a la manipulación algebraica que implica relacionar estos parámetros, se llevará a cabo la deducción entre los parámetros  $z$  y  $y$ , así como entre los parámetros  $z$  y  $t$ , tomando los conjuntos de ecuaciones del bipuerto que no contiene fuentes independientes internas. El proceso descrito es similar para el resto de las deducciones.

Para determinar los parámetros  $z$  en función de los parámetros  $y$  se resuelven las Ecs.(13) para  $V_1$  y  $V_2$  y se comparan los coeficientes de  $I_1$  e  $I_2$  del resultado obtenido con los coeficientes de las Ecs.(6). Esto es, a partir de las Ecs.(13) se obtiene

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} I_1 & y_{12} \\ I_2 & y_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix}} = \frac{y_{22}}{\Delta Y} I_1 - \frac{y_{12}}{\Delta Y} I_2 \quad (19)$$

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_{11} & I_1 \\ y_{21} & I_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix}} = -\frac{y_{21}}{\Delta Y} I_1 + \frac{y_{11}}{\Delta Y} I_2 \quad (20)$$

Al comparar las Ecs.(19) y (20) con el par de Ecs.(6) se obtienen los parámetros  $z$  en términos de los parámetros  $y$ .

$$\begin{aligned} z_{11} &= \frac{y_{22}}{\Delta Y} & z_{12} &= -\frac{y_{12}}{\Delta Y} \\ z_{21} &= -\frac{y_{21}}{\Delta Y} & z_{22} &= \frac{y_{11}}{\Delta Y} \end{aligned}$$

Para determinar los parámetros  $z$  en función de los parámetros  $t$ , se modifica el par de Ecs.(17) en la forma de el par de Ecs.(6) y se comparan los coeficientes. Esto es, a partir de la segunda ecuación del par de Ecs. (17) se obtiene

$$V_2 = \frac{1}{t_{21}} I_1 + \frac{t_{22}}{t_{21}} I_2 \quad (21)$$

sustituyendo en la primera ecuación del par de Ecs. (17) se obtiene ahora

$$V_1 = \frac{t_{11}}{t_{21}} I_1 + \left( \frac{t_{11}t_{22}}{t_{21}} - t_{12} \right) I_2 \quad (22)$$

Comparando las Ecs.(21) y (22) con el par de Ecs.(6) se determinan las equivalencias

$$z_{11} = \frac{t_{11}}{t_{21}} \quad z_{12} = \frac{\Delta T}{t_{21}}$$

$$z_{21} = \frac{1}{t_{21}} \quad z_{22} = \frac{t_{22}}{t_{21}}$$

La Tabla 2 resume la conversión de todos los parámetros.

**Tabla 2 Conversión de parámetros de bipuertos**

	Z	Y	T	T'	H	G
Z	$z_{11} \quad z_{12}$ $z_{21} \quad z_{22}$	$\frac{y_{22}}{\Delta Y} \quad -\frac{y_{12}}{\Delta Y}$ $-\frac{y_{21}}{\Delta Y} \quad \frac{y_{11}}{\Delta Y}$	$\frac{t_{11}}{t_{21}} \quad \frac{\Delta T}{t_{21}}$ $\frac{1}{t_{21}} \quad \frac{t_{22}}{t_{21}}$	$\frac{t'_{22}}{t'_{21}} \quad \frac{1}{t'_{21}}$ $\frac{\Delta T'}{t'_{21}} \quad \frac{t'_{11}}{t'_{21}}$	$\frac{\Delta H}{h_{22}} \quad \frac{h_{12}}{h_{22}}$ $-\frac{h_{21}}{h_{22}} \quad \frac{1}{h_{22}}$	$\frac{1}{g_{11}} \quad -\frac{g_{12}}{h_{11}}$ $\frac{g_{21}}{g_{11}} \quad \frac{\Delta G}{g_{11}}$
Y	$\frac{z_{22}}{\Delta Z} \quad -\frac{z_{12}}{\Delta Z}$ $-\frac{z_{21}}{\Delta Z} \quad \frac{z_{11}}{\Delta Z}$	$y_{11} \quad y_{12}$ $y_{21} \quad y_{22}$	$\frac{t_{21}}{t_{12}} \quad -\frac{\Delta T}{t_{12}}$ $-\frac{1}{t_{12}} \quad \frac{t_{11}}{t_{12}}$	$\frac{t'_{11}}{t'_{12}} \quad -\frac{1}{t'_{12}}$ $-\frac{\Delta T'}{t'_{12}} \quad \frac{t'_{22}}{t'_{12}}$	$\frac{1}{h_{11}} \quad -\frac{h_{21}}{h_{11}}$ $\frac{h_{12}}{h_{11}} \quad \frac{\Delta H}{h_{11}}$	$\frac{\Delta G}{g_{22}} \quad -\frac{g_{12}}{g_{22}}$ $-\frac{g_{21}}{g_{22}} \quad \frac{1}{g_{22}}$
T	$\frac{z_{11}}{z_{21}} \quad \frac{\Delta Z}{z_{21}}$ $-\frac{1}{z_{21}} \quad \frac{z_{22}}{z_{21}}$	$-\frac{y_{22}}{y_{21}} \quad \frac{1}{y_{21}}$ $-\frac{\Delta Y}{y_{21}} \quad -\frac{y_{11}}{y_{21}}$	$t_{11} \quad t_{12}$ $t_{21} \quad t_{22}$	$\frac{t'_{22}}{\Delta T'} \quad \frac{t'_{12}}{\Delta T'}$ $\frac{t'_{21}}{\Delta T'} \quad \frac{t'_{11}}{\Delta T'}$	$-\frac{\Delta H}{h_{21}} \quad \frac{h_{11}}{h_{21}}$ $-\frac{h_{22}}{h_{21}} \quad -\frac{1}{h_{21}}$	$\frac{1}{g_{21}} \quad \frac{g_{22}}{g_{21}}$ $\frac{g_{11}}{g_{21}} \quad \frac{\Delta G}{g_{21}}$
T'	$\frac{z_{22}}{z_{12}} \quad \frac{\Delta Z}{z_{12}}$ $\frac{1}{z_{12}} \quad \frac{z_{11}}{z_{12}}$	$-\frac{y_{11}}{y_{12}} \quad -\frac{1}{y_{12}}$ $-\frac{\Delta Y}{y_{12}} \quad -\frac{y_{22}}{y_{12}}$	$\frac{t_{22}}{\Delta T} \quad \frac{t_{12}}{\Delta T}$ $\frac{t_{21}}{\Delta T} \quad \frac{t_{11}}{\Delta T}$	$t'_{11} \quad t'_{12}$ $t'_{21} \quad t'_{22}$	$\frac{1}{h_{12}} \quad \frac{h_{11}}{h_{12}}$ $\frac{h_{22}}{h_{12}} \quad \frac{\Delta H}{h_{12}}$	$-\frac{\Delta G}{g_{12}} \quad -\frac{g_{22}}{g_{12}}$ $-\frac{g_{11}}{g_{12}} \quad -\frac{1}{g_{12}}$
H	$\frac{\Delta Z}{z_{22}} \quad \frac{z_{12}}{z_{22}}$ $-\frac{z_{21}}{z_{22}} \quad \frac{1}{z_{22}}$	$\frac{1}{y_{11}} \quad -\frac{y_{12}}{y_{11}}$ $\frac{y_{21}}{y_{11}} \quad \frac{\Delta Y}{y_{11}}$	$\frac{t_{12}}{t_{22}} \quad \frac{\Delta T}{t_{22}}$ $-\frac{1}{t_{22}} \quad \frac{t_{21}}{t_{22}}$	$\frac{t'_{12}}{t'_{11}} \quad \frac{1}{t'_{11}}$ $-\frac{\Delta T'}{t'_{11}} \quad \frac{t'_{21}}{t'_{11}}$	$h_{11} \quad h_{12}$ $h_{21} \quad h_{22}$	$\frac{g_{22}}{\Delta G} \quad -\frac{g_{12}}{\Delta G}$ $-\frac{g_{21}}{\Delta G} \quad \frac{g_{11}}{\Delta G}$

G	$\frac{1}{z_{11}} \quad -\frac{z_{12}}{z_{11}}$	$\frac{\Delta Y}{y_{22}} \quad \frac{y_{12}}{y_{22}}$	$\frac{t_{21}}{t_{11}} \quad -\frac{\Delta T}{t_{11}}$	$\frac{t'_{21}}{t'_{22}} \quad -\frac{1}{t'_{22}}$	$\frac{h_{22}}{\Delta H} \quad -\frac{h_{12}}{\Delta H}$	$g_{11} \quad g_{12}$
	$\frac{z_{21}}{z_{11}} \quad \frac{\Delta Z}{z_{11}}$	$-\frac{y_{21}}{y_{22}} \quad \frac{1}{y_{22}}$	$\frac{1}{t_{11}} \quad \frac{t_{12}}{t_{11}}$	$\frac{\Delta T'}{t'_{22}} \quad \frac{t'_{12}}{t'_{22}}$	$-\frac{h_{21}}{\Delta H} \quad \frac{h_{11}}{\Delta H}$	$g_{21} \quad g_{22}$
El bipuerto es recíproco si	$z_{12} = z_{21}$	$y_{12} = y_{21}$	$\Delta T = 1$	$\Delta T' = 1$	$h_{12} = -h_{21}$	$g_{12} = -g_{21}$
El bipuerto es recíproco y simétrico si	$z_{11} = z_{22}$	$y_{11} = y_{22}$	$t_{11} = t_{22}$	$t'_{11} = t'_{22}$	$\Delta H = 1$	$\Delta G = 1$

## IV.2.7 Análisis del bipuerto terminado

El bipuerto terminado corresponde a las conexiones que se realizan externamente, es decir, de excitación por el puerto 1 y de carga en el puerto 2, como se muestra en la figura 10. En este caso  $Z_L$  es la impedancia de la carga,  $V_s$  representa el voltaje de la fuente y  $Z_s$  su impedancia interna. El análisis del circuito terminado implica expresar las corrientes y los voltajes de las terminales del bipuerto en función tanto de los parámetros, como de  $V_s$ ,  $Z_s$  y  $Z_L$ .



Figura 10 Bipuerto terminado

Existen seis características del bipuerto terminado que definen su comportamiento:

- $Z_{en} = V_1 / I_1$  Impedancia de entrada o la admitancia de entrada  $Y_{en} = I_1 / V_1$
- $I_2$  Corriente de salida
- $V_{Th}$  e  $Z_{Th}$  Voltaje e impedancia de Thévenin en las terminales del puerto 2
- $I_2 / I_1$  Ganancia de corriente
- $V_2 / V_1$  Ganancia de voltaje del bipuerto
- $V_2 / V_s$  Ganancia de voltaje con respecto a la excitación

La deducción de estas expresiones implica la manipulación algebraica de las dos ecuaciones del bipuerto, según los parámetros seleccionados, y las dos ecuaciones de restricción impuestas por las terminaciones. Para fines de ejemplificar este análisis, se obtendrán las seis características utilizando los parámetros  $z$ . En este caso, las cuatro ecuaciones son

$$V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \quad (23)$$

$$V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2 \quad (24)$$

$$V_1 = V_s - Z_s I_1 \quad (25)$$

$$V_2 = -Z_L I_2 \quad (26)$$

Las Ecs.(23) y (24) es el par de Ecs.(6), y las Ecs.(25) y (26) se obtienen aplicando LKV<sup>3</sup> en las terminales del bipuerto las cuales describen las restricciones en sus terminales.

Impedancia de entrada

Para determinar esta impedancia se igualan las Ecs.(24) y (26) y se despeja  $I_2$ , obteniendo

$$I_2 = \frac{-z_{21}I_1}{Z_L + z_{22}} \quad (27)$$

<sup>3</sup> Ley de Voltajes de Kirchhoff

Se sustituye la Ec.(27) en la Ec.(23) y se obtiene  $Z_{en} = V_1 / I_1$  :

$$Z_{en} = z_{11} - \frac{z_{12}z_{21}}{Z_L + z_{22}} \quad (28)$$

Corriente de salida  $I_2$

En este caso se igualan las Ecs.(23) y (25) y se despeja  $I_1$  , obteniendo

$$I_1 = \frac{V_s - z_{12}I_2}{Z_s + z_{11}} \quad (29)$$

Se sustituye la Ec.(29) en la (27) y se resuelve para  $I_2$  :

$$I_2 = \frac{-z_{21}V_s}{(Z_s + z_{11})(Z_L + z_{22}) - z_{12}z_{21}} \quad (30)$$

### **Voltaje $V_{Th}$ e impedancia $Z_{Th}$ de Thévenin en las terminales del puerto 2**

De acuerdo con el Teorema de Thévenin,  $V_{Th}$  es el voltaje a circuito abierto en un par de terminales definidas, en este caso las terminales 2-2', que es igual a  $V_2$  cuando  $I_2=0$ . A partir de la Ec.(24) se obtiene

$$V_2|_{I_2=0} = z_{21}I_1 \quad (31)$$

Iguando las Ecs.(23) y (25), despejando  $I_1$  con la condición  $I_2=0$  y sustituyendo  $I_1$  en la Ec.(31) se tiene

$$V_2|_{I_2=0} = V_{Th} = \frac{z_{21}}{Z_s + z_{11}} V_s$$

La impedancia de Thévenin se puede obtener como la relación  $V_2 / I_2$  cuando todas las fuentes independientes son cero, en este caso  $V_s=0$ <sup>4</sup>. Para ello, se igualan las Ecs.(23) y (25) con la condición  $V_s=0$ .

$$-Z_s I_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2$$

se despeja  $I_1$

$$I_1 = \frac{-z_{12}I_2}{Z_s + z_{11}}$$

y se sustituye en la Ec.(24), esto es

$$V_2 = z_{21} \frac{-z_{12}I_2}{Z_s + z_{11}} + z_{22}I_2$$

o bien

$$\frac{V_2}{I_2} \Big|_{V_s=0} = Z_{Th} = \frac{-z_{12}z_{21}}{Z_s + z_{11}} + z_{22} \quad (32)$$

### **Ganancia de corriente $I_2 / I_1$**

Esta ganancia se obtiene de manera directa a partir de la Ec.(27)

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{-z_{21}}{Z_L + z_{22}} \quad (33)$$

### **Ganancia de voltaje $V_2 / V_1$**

Para obtener esta ganancia, se despeja  $I_2$  de la Ec.(26) y se sustituye en la Ec.(24)

$$V_2 = z_{21}I_1 - z_{22} \frac{V_2}{Z_L} \quad (34)$$

Se despeja  $I_2$  de la Ec.(26), se sustituye en la Ec.(23) y se despeja  $I_1$

<sup>4</sup> Esta forma de obtener la impedancia de Thévenin se utiliza para el caso en el que el bipuerto no contiene fuentes dependientes.

$$I_1 = \frac{V_1}{z_{11}} + \frac{z_{12}V_2}{z_{11}Z_L} \quad (35)$$

Se sustituye la Ec.(35) en la (34) y se resuelve para  $V_2 / V_1$

$$V_2 = z_{21} \left( \frac{V_1}{z_{11}} + \frac{z_{12}V_2}{z_{11}Z_L} \right) + z_{22} \frac{-V_2}{Z_L}$$

o bien

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{z_{21}Z_L}{z_{11}Z_L + z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}} = \frac{z_{21}Z_L}{z_{11}Z_L + \Delta z} \quad (36)$$

**Ganancia de voltaje  $V_2 / V_s$**

Finalmente, para obtener la ganancia de voltaje  $V_2 / V_s$  se igualan las Ecs.(23) y (25) y se despeja  $I_1$  :

$$I_1 = \frac{z_{12}V_2}{Z_L(z_{11} + Z_s)} + \frac{V_s}{z_{11} + Z_s} \quad (37)$$

a partir de la Ec.(26) se despeja  $I_2$  :

$$I_2 = -\frac{V_2}{Z_L} \quad (38)$$

y se sustituyen las Ecs.(37) y (38) en la (24) y se resuelve para  $V_2 / V_s$  obteniendo

$$\frac{V_2}{V_s} = \frac{z_{21}Z_L}{(z_{11} + Z_s)(z_{22} + Z_L) - z_{12}z_{21}} \quad (39)$$

La Tabla 3 lista las expresiones correspondientes en términos de los parámetros del bipuerto.

**Tabla 3 Características del Bipuerto Terminado**

Parámetros Z	Parámetros Y	Parámetros T
$Z_{en} = z_{11} - \frac{z_{12}z_{21}}{Z_L + z_{22}}$	$Y_{en} = \frac{y_{12}y_{21}}{1 + y_{22}Z_L}$	$Z_{en} = \frac{t_{11}Z_L + t_{12}}{t_{21}Z_L + t_{22}}$
$I_2 = \frac{-z_{21}V_s}{(Z_s + z_{11})(Z_L + z_{22}) - z_{12}z_{21}}$	$I_2 = \frac{y_{21}V_s}{1 + y_{22}Z_L + y_{11}Z_s + \Delta Y Z_s Z_L}$	$I_2 = \frac{-V_s}{t_{11}Z_L + t_{12} + t_{21}Z_s Z_L + t_{22}Z_s}$
$V_{Th} = \frac{z_{21}}{Z_s + z_{11}} V_s$	$V_{Th} = \frac{-y_{21}V_s}{y_{22} + \Delta Y Z_s}$	$V_{Th} = \frac{V_s}{t_{11} + t_{21}Z_s}$
$Z_{Th} = \frac{-z_{12}z_{21}}{Z_s + z_{11}} + z_{22}$	$Z_{Th} = \frac{1 + y_{11}Z_s}{y_{22} + \Delta Y Z_s}$	$Z_{Th} = \frac{t_{12} + t_{22}Z_s}{t_{11} + t_{21}Z_s}$
$\frac{I_2}{I_1} = \frac{-z_{21}}{Z_L + z_{22}}$	$\frac{I_2}{I_1} = \frac{y_{21}}{y_{11} + \Delta Y Z_L}$	$\frac{I_2}{I_1} = \frac{-1}{t_{21}Z_L + t_{22}}$
$\frac{V_2}{V_1} = \frac{z_{21}Z_L}{z_{11}Z_L + \Delta Z}$	$\frac{V_2}{V_1} = \frac{-y_{21}Z_L}{1 + z_{22}Z_L}$	$\frac{V_2}{V_1} = \frac{Z_L}{t_{11}Z_L + t_{12}}$
$\frac{V_2}{V_s} = \frac{z_{21}Z_L}{(z_{11} + Z_s)(z_{22} + Z_L) - z_{12}z_{21}}$	$\frac{V_2}{V_s} = \frac{y_{21}Z_L}{y_{12}y_{21}Z_s Z_L - (1 + y_{11}Z_s)(1 + y_{22}Z_L)}$	$\frac{V_2}{V_s} = \frac{Z_L}{Z_L(t_{11} + t_{21}Z_s) + t_{12} + t_{22}Z_s}$

Parámetros $T'$	Parámetros $H$	Parámetros $G$
$Z_{en} = \frac{t'_{22}Z_L + t'_{12}}{t'_{21}Z_L + t'_{11}}$	$Z_{en} = h_{11} - \frac{h_{12}h_{21}Z_L}{1 + h_{22}Z_L}$	$Y_{en} = g_{11} - \frac{g_{12}g_{21}}{Z_L + g_{22}}$
$I_2 = \frac{-V_s \Delta T'}{t'_{11}Z_s + t'_{21}Z_s Z_L + t'_{22}Z_L + t'_{12}}$	$I_2 = \frac{h_{21}V_s}{(1 + h_{22}Z_L)(Z_s + h_{11}) - h_{12}h_{21}Z_L}$	$I_2 = \frac{-g_{21}V_s}{(1 + g_{11}Z_s)(Z_L + g_{22}) - g_{12}g_{21}Z_s}$
$V_{Th} = \frac{V_s \Delta T'}{t'_{22} + t'_{21}Z_s}$	$V_{Th} = \frac{-h_{21}V_s}{h_{22}Z_s + \Delta H}$	$V_{Th} = \frac{g_{21}V_s}{1 + g_{11}Z_s}$
$Z_{Th} = \frac{t'_{11}Z_s + t'_{12}}{t'_{21}Z_s + t'_{22}}$	$Z_{Th} = \frac{Z_s + h_{11}}{z_{22}Z_s + \Delta H}$	$Z_{Th} = \frac{g_{12}g_{21}Z_s}{1 + g_{11}Z_s}$
$\frac{I_2}{I_1} = \frac{-\Delta T'}{t'_{21}Z_L + t'_{11}}$	$\frac{I_2}{I_1} = \frac{h_{21}}{1 + h_{22}Z_L}$	$\frac{I_2}{I_1} = \frac{-g_{21}}{g_{11}Z_L + \Delta G}$
$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\Delta T' Z_L}{t'_{22}Z_L + t'_{12}}$	$\frac{V_2}{V_1} = \frac{-h_{21}Z_L}{\Delta H Z_L + h_{11}}$	$\frac{V_2}{V_1} = \frac{g_{21}Z_L}{g_{22} + Z_L}$
$\frac{V_2}{V_s} = \frac{\Delta T' Z_L}{t'_{12} + t'_{11}Z_s + t'_{22}Z_L + t'_{21}Z_s Z_L}$	$\frac{V_2}{V_s} = \frac{-h_{21}Z_L}{(h_{11} + Z_s)(1 + h_{22}Z_L) - h_{12}h_{21}Z_L}$	$\frac{V_2}{V_s} = \frac{g_{21}Z_L}{(1 + g_{11}Z_s)(g_{22} + Z_L) - g_{12}g_{21}Z_s}$

### IV.3 Conexiones entre Bipuertos

El diseño y análisis de una red compleja puede facilitarse al seccionar la red. Si dichas secciones se modelan mediante bipuertos, la síntesis de la red completa se puede llevar a cabo a través de la interconexión de secciones más sencillas o de menor complejidad. En este sentido, los bipuertos se pueden interconectar en cinco formas diferentes:

- En cascada, descrita por los parámetros de transmisión  $t$
- En serie a través de los parámetros  $z$
- En paralelo mediante los parámetros  $y$
- En serie-paralelo con los parámetros  $h$
- En paralelo-serie mediante los parámetros  $g$

#### IV.3.1 Conexión en Cascada

La conexión en cascada es una de las más utilizadas en el análisis de redes complejas ya que se aplica cuando la salida de una red se conecta al puerto de entrada de otra red, como se indica en la figura 11, para ello se utilizan los parámetros de transmisión.

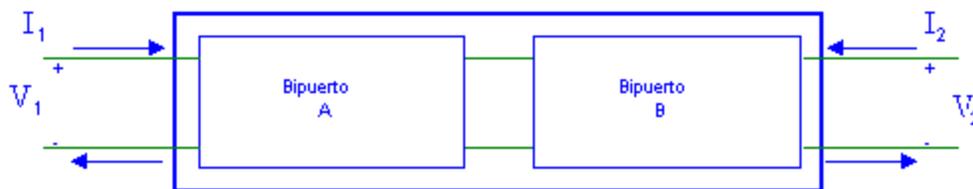


Figura 11 Conexión en cascada de 2 Bipuertos

Para el bipuerto A se cumple, de acuerdo con la Ec.(17)

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix}^A = T^A \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad (40)$$

y para el bipuerto B se tiene

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix}^B = T^B \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad (41)$$

y en la conexión intermedia se cumple<sup>5</sup>

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}^A = \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix}^B \quad (42)$$

Se observa además en la figura 11 que en la entrada y en la salida del bipuerto se cumple

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix}^A \quad (43)$$

Por lo tanto, sustituyendo la Ec.(40), (41) y (42) en la Ec.(43) se obtiene

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

en donde

$$T = T^A T^B$$

siendo  $T$  la matriz de transmisión equivalente. Esto es, la matriz de transmisión de una conexión de bipuertos en cascada se deriva de la multiplicación de las matrices de transmisión de cada bipuerto individual, tomando en cuenta el orden apropiado.

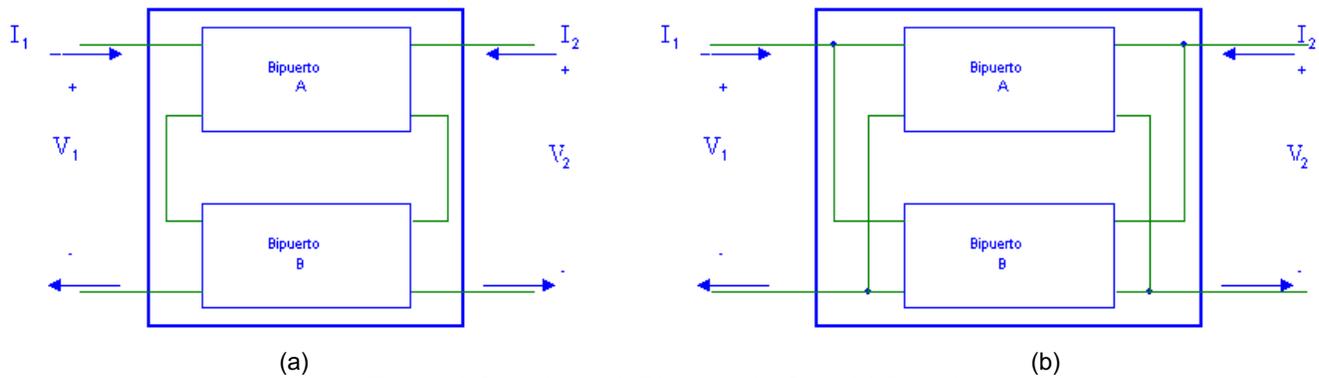


Figura 12 Conexiones de Bipuertos (a) Serie (b) Paralelo

### IV.3.2 Conexión en Serie

La conexión en serie de dos bipuertos se muestra en la figura 12(a). En este caso se emplean los parámetros  $z$  para representar cada red y se combinan en serie. Los dos bipuertos se describen a partir de la Ec.(6a) como

$$V^A = Z^A I^A$$

$$V^B = Z^B I^B$$

Sabemos que en una conexión en serie se cumple con  $I^A = I^B$  y dado que  $V = V^A + V^B$  se tiene

$$\begin{aligned} V &= Z^A I^A + Z^B I^B \\ &= (Z^A + Z^B) I \end{aligned}$$

de manera que

$$Z = Z^A + Z^B$$

Por lo tanto, los parámetros  $z$  de la red total son iguales a la suma de los parámetros  $z$  de los bipuertos individuales.

### IV.3.3 Conexión en Paralelo

La conexión en paralelo de dos bipuertos exige que  $V_1$  sea igual para los dos puertos entrada y de igual forma para  $V_2$  en los puertos de salida, como se muestra en la figura 12(b). Las matrices que define esta conexión son las correspondientes a la de admitancia  $Y$ , la Ec.(13a) por lo que se tiene para cada bipuerto

<sup>5</sup> Con el signo menos en  $I_2$  la corriente sale del bipuerto, lo cual justifica el signo negativo.

$$I^A = Y^A V^A$$

e

$$I^B = Y^B V^B$$

Así mismo, ya que se cumple con  $V = V^A = V^B$  y dado que  $I = I^A + I^B$  se tiene

$$\begin{aligned} I &= Y^A V^A + Y^B V^B \\ &= (Y^A + Y^B) V \end{aligned}$$

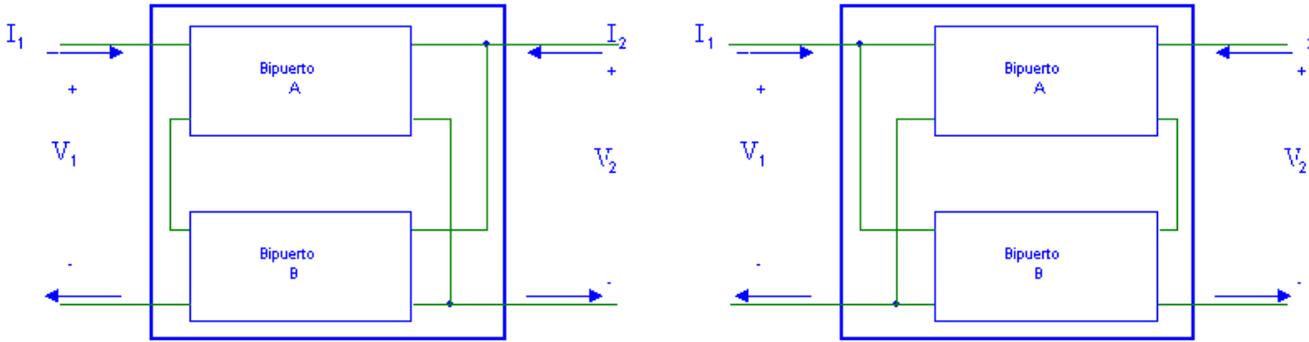
de donde

$$Y = Y^A + Y^B$$

Por lo tanto, para determinar los parámetros de una conexión en paralelo se suman los parámetros  $y$  de cada bipuerto individual para obtener los parámetros  $y$  equivalentes de la red total.

### IV.3.4 Conexión Serie-Paralelo

La conexión serie-paralelo de dos bipuertos es la que se muestra en la figura 13(a). Los parámetros que permiten analizar esta conexión son los parámetros  $h$ . En este caso los bipuertos deben cumplir con las siguientes restricciones:



(a) (b)  
Figura 13 Conexiones de Bipuertos (a) Serie-Paralelo (b) Paralelo-Serie

$$V_1 = V_1^A + V_1^B \tag{44}$$

$$I_1 = I_1^A = I_1^B$$

y

$$V_2 = V_2^A = V_2^B \tag{45}$$

$$I_2 = I_2^A + I_2^B$$

de manera que aplicando el par de Ecs.(15a) a las condiciones de las Ecs.(44) y (45) se obtiene

$$V_1 = h_{11}^A I_1^A + h_{12}^A V_2^A + h_{11}^B I_1^B + h_{12}^B V_2^B V_1$$

$$I_2 = h_{21}^A I_1^A + h_{22}^A V_2^A + h_{21}^B I_1^B + h_{22}^B V_2^B$$

o bien

$$V_1 = (h_{11}^A + h_{11}^B) I_1 + (h_{12}^A + h_{12}^B) V_2$$

$$I_2 = (h_{21}^A + h_{21}^B) I_1 + (h_{22}^A + h_{22}^B) V_2$$

en donde

$$H = H^A + H^B$$

es la matriz equivalente de una conexión serie-paralelo, la cual se obtiene sumando los parámetros  $h$  de los bipuertos individuales.

### IV.3.5 Conexión Paralelo-Serie

Esta conexión se muestra en la figura 13(b) y se describe mediante los parámetros  $\mathbf{g}$ . El procedimiento para encontrar la matriz equivalente es similar al de la conexión serie-paralelo. En este caso las restricciones de los bipuertos son las siguientes:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_1^A + I_1^B \\ V_2 &= V_2^A + V_2^B \end{aligned} \quad (46)$$

y

$$\begin{aligned} V_1 &= V_1^A = V_1^B \\ I_2 &= I_2^A = I_2^B \end{aligned} \quad (47)$$

de manera que aplicando el par de Ecs.(16a) a las condiciones de las Ecs.(46) y (47) se obtiene

$$\begin{aligned} I_1 &= \mathbf{g}_{11}^A V_1^A + \mathbf{g}_{12}^A I_2^A + \mathbf{g}_{11}^B V_1^B + \mathbf{g}_{12}^B I_2^B \\ V_2 &= \mathbf{g}_{21}^A V_1^A + \mathbf{g}_{22}^A I_2^A + \mathbf{g}_{21}^B V_1^B + \mathbf{g}_{22}^B I_2^B \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} I_1 &= (\mathbf{g}_{11}^A + \mathbf{g}_{11}^B) V_1 + (\mathbf{g}_{12}^A + \mathbf{g}_{12}^B) I_2 \\ V_2 &= (\mathbf{g}_{21}^A + \mathbf{g}_{21}^B) V_1 + (\mathbf{g}_{22}^A + \mathbf{g}_{22}^B) I_2 \end{aligned}$$

y en forma matricial queda expresada como

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

en donde

$$G = G^A + G^B$$

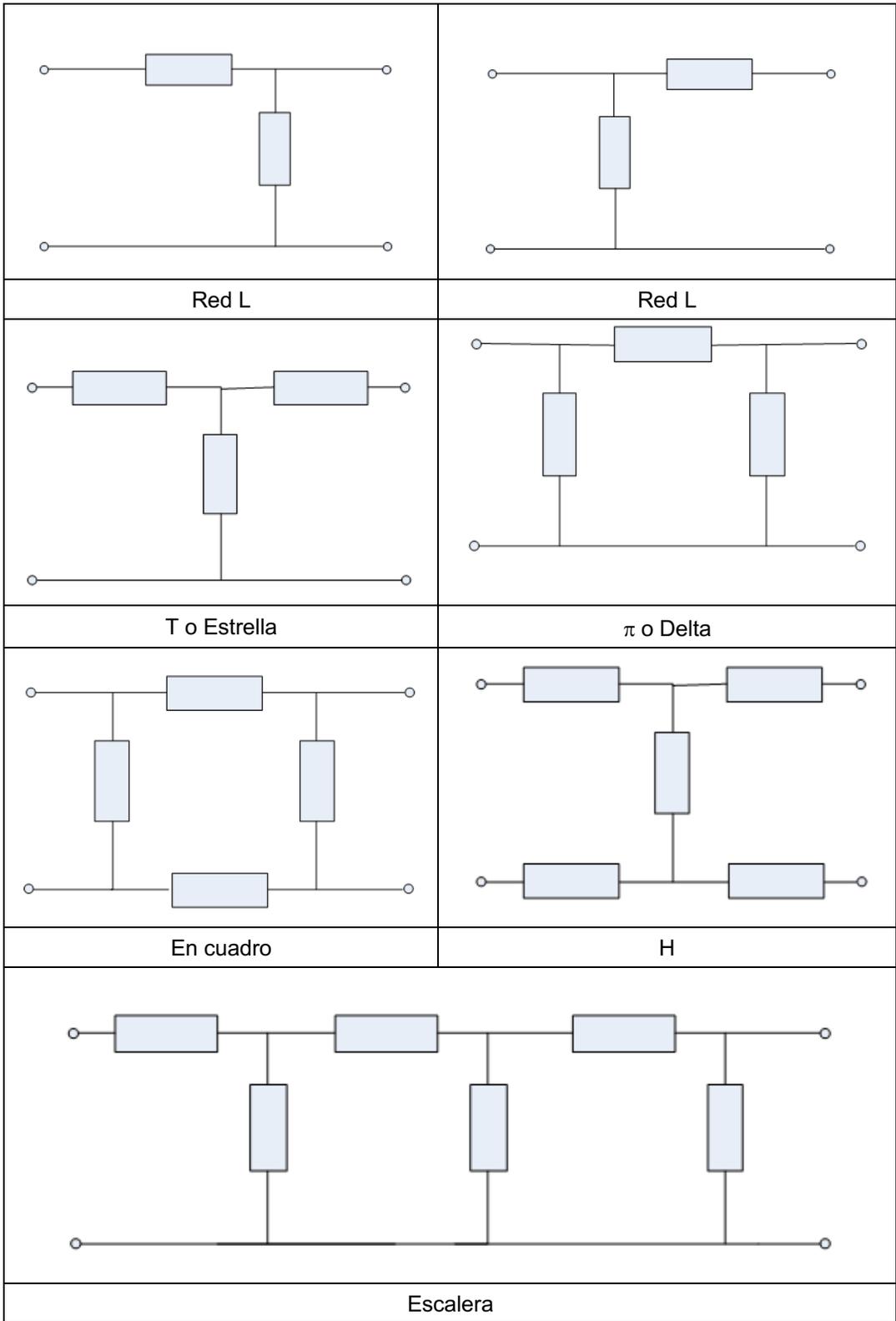
es la matriz equivalente de una conexión paralelo-serie, la cual se obtiene sumando los parámetros  $\mathbf{g}$  de los bipuertos individuales.

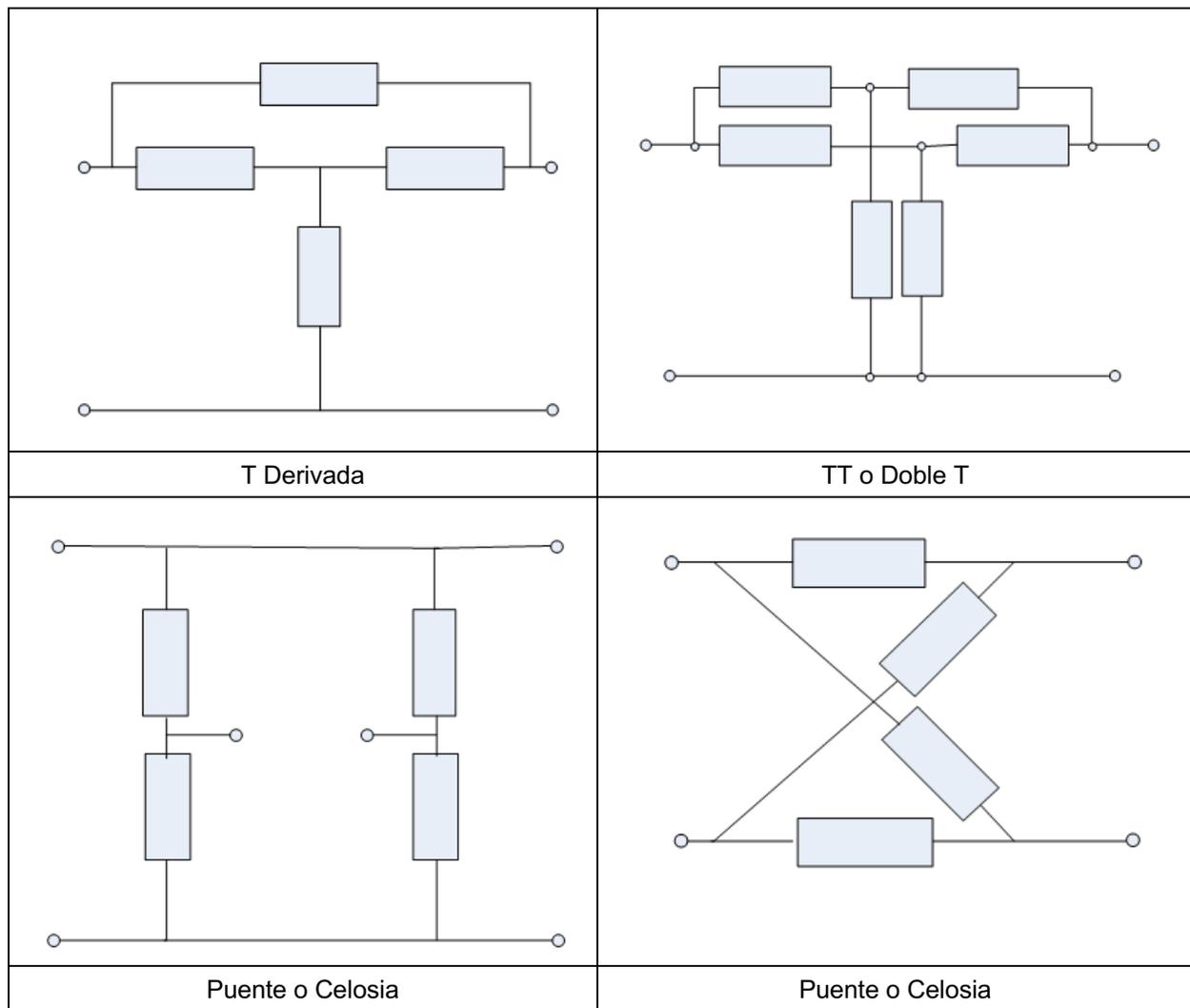
### IV.4 Redes Básicas de Bipuertos

Existen estructuras básicas de bipuertos, con las cuales se pueden construir redes más complejas. Si se conoce algún parámetro de una red básica de bipuerto, es posible determinar los parámetros de una red más compleja, mediante la aplicación las conexiones adecuadas, lo cual simplifica su análisis.

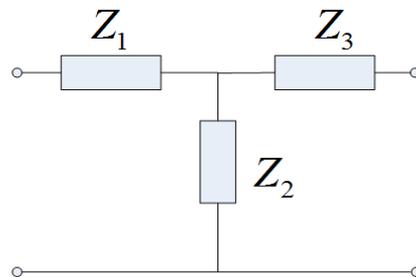
Las estructuras básicas de bipuertos se presentan en la Tabla 4.

**Tabla 4 Redes Básicas de Bipuerto**





**Ejemplo:** Determinar los Parámetros Z de la Red T mostrada



Los parámetros Z se obtienen con las expresiones siguientes:

$$Z_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{I_2=0}$$

$$Z_{12} = \frac{V_1}{I_2} \Big|_{I_1=0}$$

$$Z_{21} = \frac{V_2}{I_1} \Big|_{I_2=0}$$

$$Z_{22} = \frac{V_2}{I_2} \Big|_{I_1=0}$$

Cuyas conexiones se muestran en la figura 14

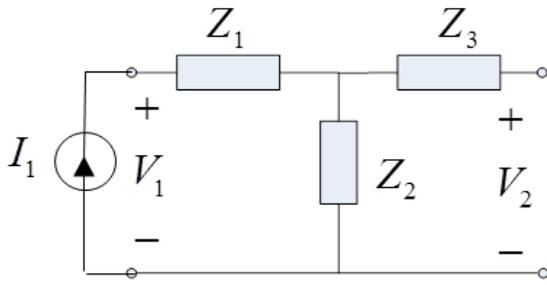


Figura 14(a)

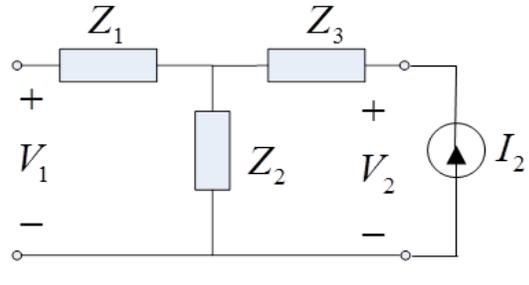


Figura 14(b)

De donde las impedancias son:

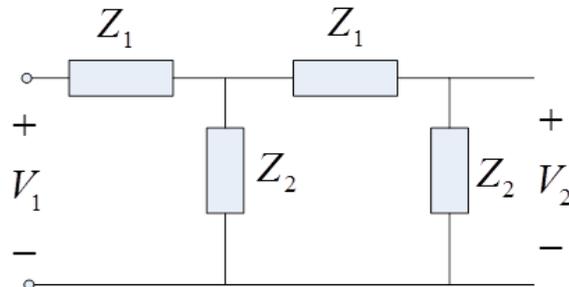
$$Z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = Z_1 + Z_2$$

$$Z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0} = Z_2$$

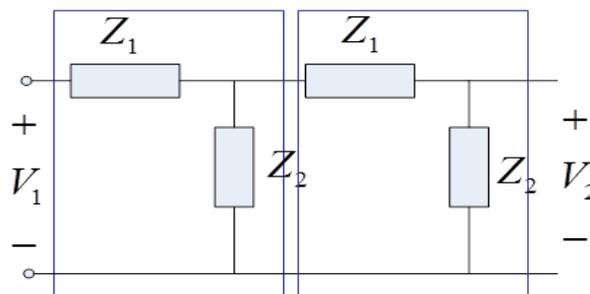
$$Z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0} = Z_2$$

$$Z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0} = Z_2 + Z_3$$

**Ejemplo:** Determinar la función de transferencia  $V_2/V_1$  a circuito abierto de la red en escalera



Se observa que hay dos configuraciones **L** en cascada.



Se obtienen los parámetros T a partir de los Z del Ejercicio anterior.

$$T = \begin{bmatrix} \frac{z_{11}}{\Delta Z} & \frac{\Delta Z}{z_{21}} \\ z_{21} & z_{21} \\ \frac{1}{z_{21}} & \frac{z_{22}}{z_{21}} \\ z_{21} & z_{21} \end{bmatrix} \longrightarrow T = \begin{bmatrix} \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2} & Z_1 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 \end{bmatrix}$$

Y como se explicó, para una conexión en cascada se cumple:

$$T = T^A T^B$$

O bien,

$$T = \begin{bmatrix} \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2} & Z_1 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2} & Z_1 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left( \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2} \right)^2 + \frac{Z_1}{Z_2} & Z_1^2 + Z_1 \\ \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2^2} + \frac{1}{Z_2} & Z_1 + 1 \end{bmatrix}$$

Por lo que, la función de transferencia a circuito abierto es

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{z_{21}}{z_{11}}$$

Y se observa que a partir de  $t_{11}$

$$t_{11} = \frac{z_{11}}{z_{21}} = \left( \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2} \right)^2 + \frac{Z_1}{Z_2}$$

De manera que la FTV para cualquier red en escalera de este tipo es:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{Z_2^2}{3Z_1 Z_2 + Z_1^2 + Z_2^2}$$

## IV.5 Modelo Lineal y Función de Transferencia del Transformador

El transformador es un dispositivo que se basa en el acoplamiento magnético de dos inductores. Se utiliza tanto en circuitos electrónicos como de potencia. En el primer caso su uso es para transformar la impedancia de la carga en un nuevo valor y acoplar la impedancia de la fuente para máxima transferencia de potencia; para proporcionar una aislamiento de voltajes de *cd* entre la fuente y la carga, y como circuitos de filtrado en conjunto con impedancias. En los circuitos de potencia se recurre a los transformadores para establecer niveles de voltaje de *ca* que faciliten la transmisión, la distribución y consumo de potencia eléctrica. Su principal análisis se enfoca en el estado senoidal permanente.

El transformador simple se forma cuando dos inductores lineales e invariantes en el tiempo se devanan en un solo núcleo para asegurar el acoplamiento magnético. La figura 14 muestra el modelo del circuito, en el cual se observa que el transformador se puede analizar como un bipuerto.

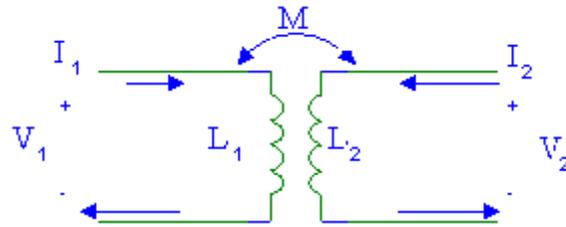


Figura 14 El transformador analizado como un bipuerto.

Ya que los inductores son lineales e invariantes en el tiempo, cada flujo magnético es una función lineal de las corrientes con coeficientes constantes. Esto es

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= L_1 i_1(t) + M_{12} i_2(t) \\ \varphi_2(t) &= M_{21} i_1(t) + L_2 i_2(t)\end{aligned}\quad (48)$$

donde las constantes están definidas como  $L_1$  la autoinductancia del devanado primario,  $L_2$  la autoinductancia del devanado secundario y  $M = M_{12} = M_{21}$  son las inductancias mutuas, las cuales a su vez están relacionadas con las autoinductancias mediante  $M = k\sqrt{L_1 L_2}$ , siendo  $k$  el coeficiente de acoplamiento magnético.

Al aplicar la ley de Faraday a las Ecs. (48) se obtiene

$$\begin{aligned}v_1(t) &= L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M_{12} \frac{di_2(t)}{dt} \\ v_2(t) &= M_{21} \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \frac{di_2(t)}{dt}\end{aligned}\quad (49)$$

o bien representando las Ecs.(49) en forma fasorial e impedancias quedan como

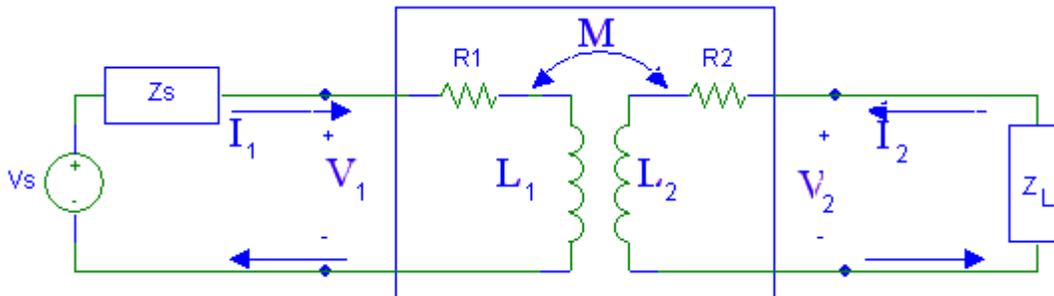


Figura 15 El transformador analizado como bipuerto terminado

$$\begin{aligned}V_1 &= j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 \\ V_2 &= j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2\end{aligned}\quad (50)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia angular,  $\zeta_1, \zeta_2, I_1, I_2$  son los valores de voltaje y corriente, respectivamente.

El par de Ecs.(50) corresponde al par de ecuaciones de los parámetros de impedancias, Ecs.(6).

Si se considera ahora un transformador lineal práctico, con resistencias  $R_1$  y  $R_2$  de los inductores del primario y secundario, con un circuito de excitación en las terminales del primario y una carga en las terminales del secundario, como en la figura 15, entonces la correspondiente matriz del par de Ecs.(50) cambia a

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (R_1 + j\omega L_1) & j\omega M \\ j\omega M & (R_2 + j\omega L_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

en donde la matriz de impedancias es

$$Z = \begin{bmatrix} (R_1 + j\omega L_1) & j\omega M \\ j\omega M & (R_2 + j\omega L_2) \end{bmatrix}$$

A partir de la matriz de impedancias  $Z$ , se determinarán cuatro características del transformador terminado de la figura 15, las cuales se pueden obtener aplicando las Ecs.(28), (33),(36) y (39)

**Impedancia de Entrada  $Z_{en}$**

$$Z_{en} = z_{11} - \frac{z_{12}z_{21}}{Z_L + z_{22}} = (R_1 + j\omega L_1) + \frac{\omega^2 M^2}{(Z_L + R_2 + j\omega L_2)} \quad (51)$$

**Ganancia de Corriente o Función de Transferencia de Corriente  $I_2 / I_1$**

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{-z_{21}}{Z_L + z_{22}} = \frac{-j\omega M}{Z_L + R_2 + j\omega L_2} \quad (52)$$

**Ganancia de Voltaje o Función de Transferencia de Voltaje  $V_2 / V_1$**

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{z_{21}Z_L}{z_{11}Z_L + z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}} = \frac{j\omega M Z_L}{(R_1 + j\omega L_1)(Z_L + R_2 + j\omega L_2) + \omega^2 M^2} \quad (53)$$

**Ganancia de Voltaje o Función de Transferencia de Voltaje  $V_2 / V_s$**

$$\frac{V_2}{V_s} = \frac{z_{21}Z_L}{(z_{11} + Z_s)(z_{22} + Z_L) - z_{12}z_{21}} = \frac{j\omega M Z_L}{(R_1 + j\omega L_1 + Z_s)(R_2 + j\omega L_2 + Z_L) + \omega^2 M^2}$$

## IV.5.1 El Transformador Ideal

El transformador ideal es un transformador sin pérdidas ( $R_1 = R_2 = 0$ ), con acoplamiento unitario ( $k=1$ ) y las autoinductancias son infinitas ( $L_1 = L_2 = \infty$ ), aunque su cociente es finito, relacionadas con la inductancia mutua mediante  $M = \sqrt{L_1 L_2}$ .

Un parámetro característico que describe al transformador ideal es la relación de vueltas  $n$  definido como

$$n = \frac{N_2}{N_1}$$

donde  $N_1$  y  $N_2$  son los números de vueltas del primario y secundario respectivamente. A su vez,  $n$  está relacionada con las autoinductancias  $L_1$  y  $L_2$  mediante

$$\frac{L_2}{L_1} = \left( \frac{N_2}{N_1} \right)^2 = n^2$$

Bajo estas consideraciones, a continuación, se determinarán las cuatro características del transformador con base en las que se obtuvieron para el transformador lineal práctico. Aplicando la Ec.(51) la impedancia queda como

$$\begin{aligned}
Z_{en} &= \lim_{L_1, L_2 \rightarrow \infty} j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{(Z_L + j\omega L_2)} \\
&= \lim_{L_1, L_2 \rightarrow \infty} \frac{j\omega L_1 Z_L + j\omega L_1 (j\omega L_2) + \omega^2 M^2}{Z_L + j\omega L_2} \\
&= \lim_{L_1, L_2 \rightarrow \infty} \frac{j\omega L_1 Z_L}{Z_L + j\omega L_2} = \lim_{L_1, L_2 \rightarrow \infty} Z_s + \frac{j\omega L_1 Z_L / L_2}{Z_L / L_2 + j\omega} \\
&= \frac{Z_L}{n^2}
\end{aligned}$$

La función de transferencia de corriente  $I_2 / I_1$  se determina a partir de la Ec.(52), tomando en cuenta la relación de vueltas  $n$ .

$$\begin{aligned}
\frac{I_2}{I_1} &= \lim_{L_1, L_2 \rightarrow \infty} \frac{-j\omega M}{Z_L + j\omega L_2} = \frac{-j\omega M / L_2}{Z_L / L_2 + j\omega} \\
\frac{I_2}{I_1} &= \lim_{L_1, L_2 \rightarrow \infty} \frac{-M}{L_2} = \frac{-\sqrt{L_1 L_2}}{L_2} \\
\frac{I_2}{I_1} &= -\frac{N_1}{N_2} = -\frac{1}{n}
\end{aligned}$$

La función de transferencia de voltaje  $V_2 / V_1$  se obtiene de la Ec.(53) quedando como

$$\begin{aligned}
\frac{V_2}{V_1} &= \lim_{L_1, L_2 \rightarrow \infty} \frac{j\omega M Z_L}{j\omega L_1 Z_L - \omega^2 L_1 L_2 + \omega^2 M^2} \\
&= \lim_{L_1, L_2 \rightarrow \infty} \frac{j\omega M Z_L / L_1}{j\omega} = \lim_{L_1, L_2 \rightarrow \infty} \frac{M}{L_1} \\
\frac{V_2}{V_1} &= \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = n \\
\frac{V_2}{V_1} &= \frac{N_2}{N_1}
\end{aligned}$$

Se observa que, una vez definidos los parámetros de un bipuerto se puede obtener de manera prácticamente directa las características externas que definen una red configurada como bipuerto.

## Conclusiones

Los circuitos y redes eléctricas se pueden analizar mediante la técnica de bipuertos cuidando las restricciones que lo definen. Los bipuertos permiten caracterizar una red eléctrica a través de sus parámetros, así mismo, los diversos circuitos equivalentes y formas de conexión que se derivan de los bipuertos facilitan grandemente en análisis de los circuitos eléctricos. Una gran variedad de aplicaciones utiliza esta técnica para su análisis y diseño, por mencionar algunas, la que se describe en este trabajo el transformador, filtros, circuitos resonantes, líneas de transmisión, y otras de carácter más específico.

## Bibliografía

Circuitos Eléctricos  
J. Nilsson, S. Riedel  
Pearson Educación, 2001

Basic Circuit Theory  
Ch. Desoer  
International Student Edition, 1969

Basic Circuit Analysis

D. Cunningham, j. Atuller  
International Student Edition, 1991

The Electrical Engineering Handbook  
R. Dorf  
CRC Press & IEEE Press, 1997

Circuitos Eléctricos: Introducción al Análisis y Diseño  
R. Dorf  
Alfaomega, 1995