

Redes eléctricas de dos puertos o bipuertos

Víctor Manuel Sánchez Esquivel



Índice general

6.1. Introducción	4
6.2. Parámetros z o de impedancia de circuito abierto	5
6.2.1. Bipuertos en serie	7
6.3. Parámetros y o de admitancia de corto circuito	8
6.3.1. Bipuertos en paralelo	9
6.4. Parámetros híbridos	12
6.4.1. Parámetros g	13
6.4.2. Parámetros h	14
6.5. Parámetros de transmisión o parámetros ABCD	15
6.5.1. Bipuertos en cascada	17
6.6. Aplicaciones	18

6.1. Introducción

Una aplicación que se encuentra frecuentemente en la práctica es el empleo de un instrumento que sirva para transmitir una señal de información. Dicho dispositivo al cual denominaremos red eléctrica de dos puertos o simplemente bipuerto, además de transmitir la señal, algunas veces, la debe amplificar, filtrar o modificar de alguna forma, otras veces también se utilizará para proporcionar un acoplamiento entre la señal de entrada y la señal de salida. La configuración general de un bipuerto se muestra en la figura 6.1a, en la que por conveniencia el subíndice 1 se asigna a las variables del puerto de la entrada y el subíndice 2 a las variables del puerto de la salida.

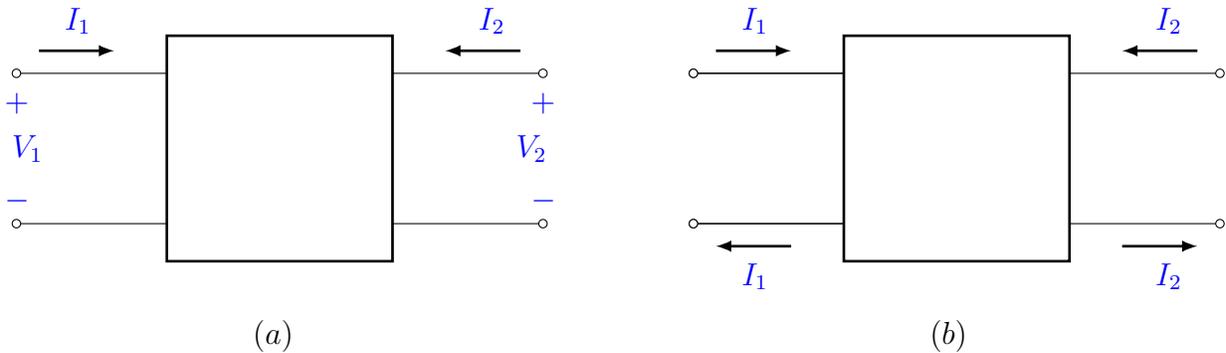


Figura 6.1: (a) Configuración general de un bipuerto. (b) Condición de las corrientes eléctricas de un bipuerto.

Como la configuración general del bipuerto tiene cuatro terminales, en teoría es posible definir una variable para cada una de las corrientes eléctricas en cada terminal. Para eliminar esta posibilidad, cada puerto de la red eléctrica debe satisfacer la siguiente condición: *la corriente que entra a una de las terminales de un puerto es, para todo tiempo, igual a la corriente que sale por la otra terminal del mismo puerto*; tal como muestra la figura 6.1b.

Puesto que ahora tenemos cuatro variables, a saber: I_1 , I_2 , V_1 y V_2 en lugar de las dos variables, esto es: I y V , que se requieren para describir una red eléctrica de un puerto, ahora se necesitan dos ecuaciones para relacionarlas. Estas ecuaciones tienen la siguiente forma general

$$\begin{aligned} U_1(s) &= k_{11}(s)W_1(s) + k_{12}(s)W_2(s) \\ U_2(s) &= k_{21}(s)W_1(s) + k_{22}(s)W_2(s) \end{aligned} \quad (6.1)$$

Donde las variables $U_1(s)$, $U_2(s)$, $W_1(s)$ y $W_2(s)$ pueden ser cualesquiera de las variables $I_1(s)$, $I_2(s)$, $V_1(s)$ o $V_2(s)$. Los $k_{ij}(s)$ se denominan parámetros de la red eléctrica y son funciones de las variables de la red eléctrica que las relacionan. Los posibles valores que pueden tomar $U_1(s)$ y $U_2(s)$ se muestran en la Tabla 6.1 y son el resultado de las combinaciones de cuatro elementos tomados de dos en dos. Una vez que $U_1(s)$ y $U_2(s)$ se especifican, $W_1(s)$ y $W_2(s)$ quedan determinados sin ambigüedad.

Cada caso de la Tabla 6.1 tiene propiedades específicas que lo hacen diferente de cualquier otro y adecuado para ciertas configuraciones de redes eléctricas. No obstante, se debe señalar que si se conoce un conjunto de parámetros es posible encontrar otro, si es que éste existe.

— Tabla 6.1 —				
Caso	$U_1(s)$	$U_2(s)$	$W_1(s)$	$W_2(s)$
1	$V_1(s)$	$V_2(s)$	$I_1(s)$	$I_2(s)$
2	$I_1(s)$	$I_2(s)$	$V_1(s)$	$V_2(s)$
3	$I_1(s)$	$V_2(s)$	$V_1(s)$	$I_2(s)$
4	$V_1(s)$	$I_2(s)$	$I_1(s)$	$V_2(s)$
5	$V_1(s)$	$I_1(s)$	$V_2(s)$	$-I_2(s)$
6	$V_2(s)$	$I_2(s)$	$V_1(s)$	$-I_1(s)$

6.2. Parámetros z o de impedancia de circuito abierto

Consideraremos el primer caso de la Tabla 6.1, esto es: $V_1(s)$ y $V_2(s)$ para las variables $U_1(s)$ y $U_2(s)$, y para $W_1(s)$ y $W_2(s)$, $I_1(s)$ e $I_2(s)$, respectivamente. Por lo que la ecuación (6.1) resulta tener la siguiente forma

$$\begin{aligned} V_1(s) &= z_{11}(s)I_1(s) + z_{12}(s)I_2(s) \\ V_2(s) &= z_{21}(s)I_1(s) + z_{22}(s)I_2(s) \end{aligned} \quad (6.2)$$

ya que los miembros del lado izquierdo del conjunto resultante tienen dimensiones de voltaje y las variables $W_1(s)$ y $W_2(s)$ tienen dimensiones de corriente, los parámetros $z_{ij}(s)$ deben tener dimensiones de impedancia. La ecuación (6.2) puede escribirse en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11}(s) & z_{12}(s) \\ z_{21}(s) & z_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = [\mathbf{Z}(s)] \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

donde la matriz $[\mathbf{Z}(s)]$ se denomina matriz de parámetros z y sus elementos $z_{ij}(s)$ reciben el nombre de parámetros z .

Para una red eléctrica dada, los parámetros z se pueden determinar aplicando un conjunto de entradas de prueba a la red eléctrica. Para ver esto, considere la primera ecuación de (6.2). Si el puerto de salida de la red eléctrica está en circuito abierto, entonces $I_2(s) = 0$, quedando la ecuación

$$V_1(s) = z_{11}(s)I_1(s) \Big|_{I_2(s)=0} \quad (6.4)$$

recordando que la *función de transferencia* se define como la *transformada de Laplace de la señal de salida/la transformada de Laplace de la señal de entrada*; la ecuación (6.4) sugiere que debe utilizarse como entrada una fuente independiente de corriente en el puerto de entrada y considerarse como salida el voltaje en el mismo puerto. Así, el parámetro $z_{11}(s)$ queda definido por la relación

$$z_{11}(s) = \frac{V_1(s)}{I_1(s)} \Big|_{I_2(s)=0} \quad (6.5)$$

Un procedimiento similar se puede seguir para calcular $z_{21}(s)$; por lo que

$$z_{21}(s) = \frac{V_2(s)}{I_1(s)} \Big|_{I_2(s)=0} \quad (6.6)$$

Los otros dos parámetros $z_{ij}(s)$ restantes, pueden encontrarse aplicando una fuente independiente de corriente en el otro puerto. En la figura 6.2 se muestran las condiciones necesarias para determinar tales parámetros.

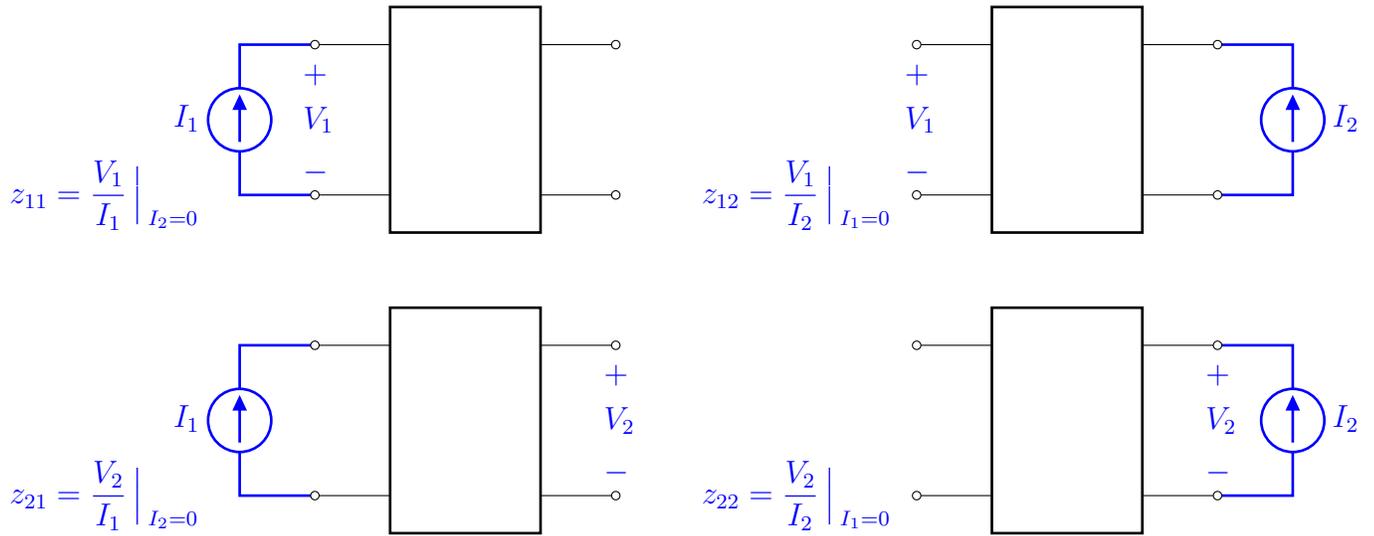


Figura 6.2: Condiciones de prueba para encontrar los parámetros $z_{ij}(s)$.

Ejemplo 6.1 Encuentre la matriz de impedancias de circuito abierto de la red eléctrica que se ilustra en la figura 6.3.

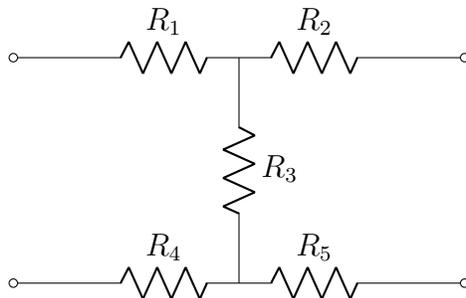


Figura 6.3: Red eléctrica resistiva.

A partir de las condiciones propuestas en la figura 6.2, la matriz de parámetros $z_{ij}(s)$ que se quiere obtener, resulta ser:

$$[\mathbf{Z}(s)] = \begin{bmatrix} R_1 + R_3 + R_4 & R_3 \\ R_3 & R_2 + R_3 + R_5 \end{bmatrix}$$

Una propiedad importante de los parámetros, es que si se conocen para una red eléctrica dada, puede determinarse cualquier otra función de red a partir de ellos. Por ejemplo, determinar la función de transferencia de voltaje de circuito abierto $\frac{V_2(s)}{V_1(s)}$.

La condición de circuito abierto implica que $I_2(s) = 0$, por lo que de la ecuación (6.2) se tiene

$$\begin{aligned} V_1(s) &= z_{11}(s)I_1(s) \\ V_2(s) &= z_{21}(s)I_1(s) \end{aligned} \tag{6.7}$$

de donde

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{z_{21}(s)}{z_{11}(s)} \quad (6.8)$$

Otro ejercicio podría ser, determinar la impedancia de entrada $Z_{entrada}(s) = \frac{V_1(s)}{I_1(s)}$ cuando el puerto de salida está en corto circuito.

Si el puerto de salida se encuentra en corto circuito entonces $V_2(s) = 0$ y de la ecuación (6.2) se tiene $z_{21}(s)I_1(s) + z_{22}(s)I_2(s) = 0$, por lo que

$$I_2(s) = -\frac{z_{21}(s)}{z_{22}(s)}I_1(s) \quad (6.9)$$

sustituyendo en la primera ecuación de (6.2), $V_1(s) = z_{11}(s)I_1(s) + z_{12}(s)I_2(s)$

$$Z_{entrada}(s) = \frac{V_1(s)}{I_1(s)} = z_{11}(s) - \frac{z_{12}(s)z_{21}(s)}{z_{22}(s)} \quad (6.10)$$

Un procedimiento similar se puede emplear para encontrar cualquier otra función de red.

6.2.1. Bipuertos en serie

En algunas configuraciones de redes eléctricas, es posible simplificar el cálculo de los parámetros, *descomponiendo* la red eléctrica en cuestión, en redes eléctricas más simples. Como ejemplo, considere el caso que se muestra en la figura 6.4 en donde se muestra la conexión de *bipuertos en serie*.

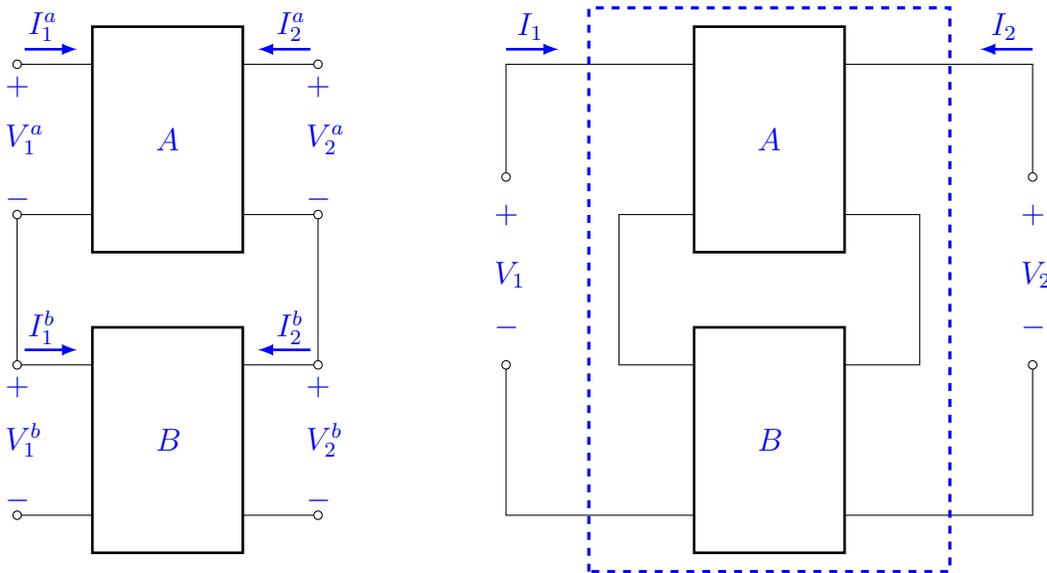


Figura 6.4: Bipuertos conectados en serie.

Para la red eléctrica A con los voltajes y las corrientes eléctricas mostrados, se define un conjunto de parámetros $z_{ij}^a(s)$

$$[\mathbf{V}^a(s)] = \begin{bmatrix} V_1^a(s) \\ V_2^a(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11}^a(s) & z_{12}^a(s) \\ z_{21}^a(s) & z_{22}^a(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1^a(s) \\ I_2^a(s) \end{bmatrix} = [\mathbf{Z}^a(s)][\mathbf{I}^a(s)] \quad (6.11)$$

Para la red eléctrica B se define, en forma similar, el conjunto de parámetros $z_{ij}^b(s)$

$$[\mathbf{V}^b(s)] = \begin{bmatrix} V_1^b(s) \\ V_2^b(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11}^b(s) & z_{12}^b(s) \\ z_{21}^b(s) & z_{22}^b(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1^b(s) \\ I_2^b(s) \end{bmatrix} = [\mathbf{Z}^b(s)][\mathbf{I}^b(s)] \quad (6.12)$$

Al aplicar las leyes de Kirchhoff en la figura 6.4, se tiene

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1^a(s) \\ V_2^a(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_1^b(s) \\ V_2^b(s) \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

$$\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1^a(s) \\ I_2^a(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1^b(s) \\ I_2^b(s) \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

de las ecuaciones (6.11), (6.12), (6.13) y (6.14), se infiere que

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = [\mathbf{Z}^a(s)] \begin{bmatrix} I_1^a(s) \\ I_2^a(s) \end{bmatrix} + [\mathbf{Z}^b(s)] \begin{bmatrix} I_1^b(s) \\ I_2^b(s) \end{bmatrix} = [[\mathbf{Z}^a(s)] + [\mathbf{Z}^b(s)]] \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

Se concluye, por consiguiente, para un bipuerto formado por dos bipuertos conectados en serie, sus parámetros $z_{ij}(s)$ pueden encontrarse sumando los parámetros $z_{ij}^a(s)$ correspondientes de las redes eléctricas que lo constituyen.

Por último, cabe hacer notar, que para una red eléctrica recíproca los elementos $z_{12}(s)$ y $z_{21}(s)$ son iguales y por consiguiente la matriz de parámetros $[\mathbf{Z}(s)]$ es simétrica.

6.3. Parámetros y o de admitancia de corto circuito

Ahora se considera el caso 2 de la Tabla 6.1, en donde $U_1(s)$ y $U_2(s)$ se identifican con $I_1(s)$ e $I_2(s)$, respectivamente. Así, los parámetros $k_{ij}(s)$ del bipuerto son funciones de red con dimensiones de admitancia, $y_{ij}(s)$ que especifican a las corrientes eléctricas de los puertos como funciones de los voltajes $V_1(s)$ y $V_2(s)$, o sea

$$\begin{aligned} I_1(s) &= y_{11}(s)V_1(s) + y_{12}(s)V_2(s) \\ I_2(s) &= y_{21}(s)V_1(s) + y_{22}(s)V_2(s) \end{aligned} \quad (6.16)$$

en forma matricial

$$\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11}(s) & y_{12}(s) \\ y_{21}(s) & y_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = [\mathbf{Y}(s)] \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

Dos de los cuatro parámetros, a saber: $y_{11}(s)$ y $y_{21}(s)$ se encuentran aplicando una fuente independiente de voltaje en el puerto 1 y poniendo en corto circuito el puerto 2; se miden las corrientes eléctricas resultantes en cada puerto. Los otros dos parámetros se encuentran en forma similar, se aplica una fuente independiente de voltaje en el puerto 2 y se pone en corto circuito el puerto 1.

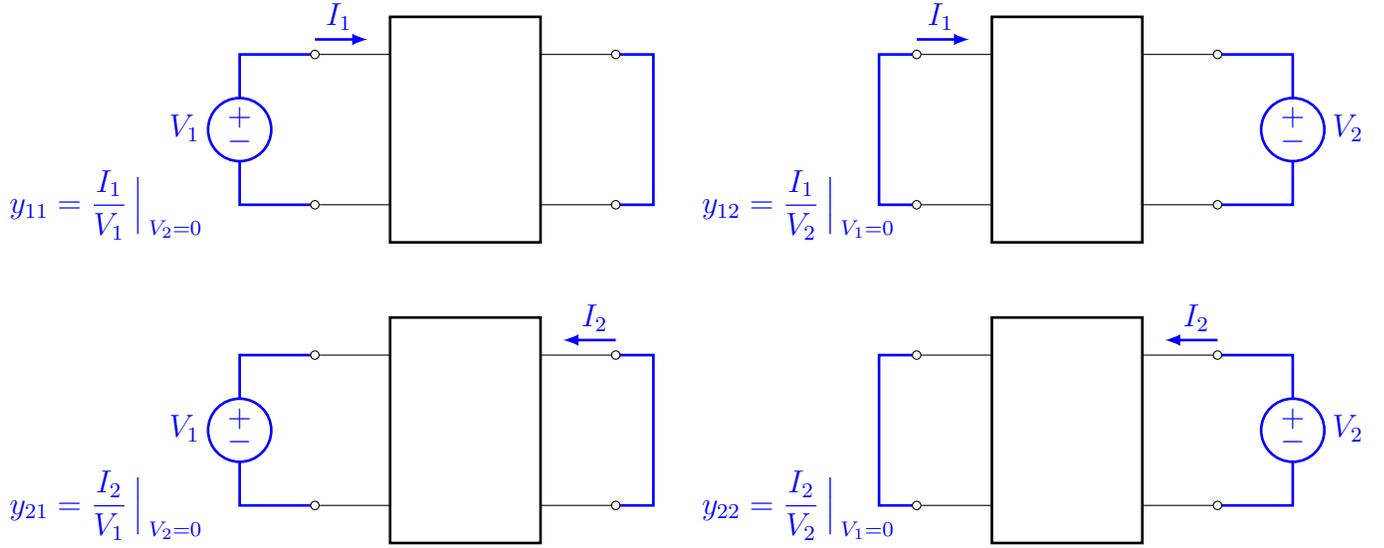


Figura 6.5: Condiciones de prueba para encontrar los parámetros $y_{ij}(s)$.

La figura 6.5 muestra las condiciones para determinar los parámetros $y_{ij}(s)$.

En la sección anterior se mostró que

$$[\mathbf{V}(s)] = [\mathbf{Z}(s)] [\mathbf{I}(s)] \quad (6.18)$$

premultiplicando por la matriz de parámetros $[\mathbf{Y}(s)]$

$$[\mathbf{Y}(s)] [\mathbf{V}(s)] = [\mathbf{I}(s)] = [\mathbf{Y}(s)] [\mathbf{Z}(s)] [\mathbf{I}(s)] \quad (6.19)$$

se concluye

$$[\mathbf{Y}(s)] = [\mathbf{Z}(s)]^{-1} \quad \text{o} \quad [\mathbf{Z}(s)] = [\mathbf{Y}(s)]^{-1} \quad (6.20)$$

6.3.1. Bipuertos en paralelo

De manera similar para el cálculo de los parámetros $z_{ij}(s)$ de bipuertos en serie, es posible simplificar el cálculo de los parámetros $y_{ij}(s)$ cuando la red eléctrica original está conformada por redes eléctricas conectadas en paralelo.

Sea la red eléctrica constituida por dos bipuertos que se presenta en la figura 6.6. Este tipo de estructura recibe el nombre de *bipuertos en paralelo*.

Para el bipuerto A , la matriz de parámetros de corto circuito es

$$\begin{bmatrix} I_1^a(s) \\ I_2^a(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11}^a(s) & y_{12}^a(s) \\ y_{21}^a(s) & y_{22}^a(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^a(s) \\ V_2^a(s) \end{bmatrix} = [\mathbf{Y}^a(s)] \begin{bmatrix} V_1^a(s) \\ V_2^a(s) \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

para el bipuerto B

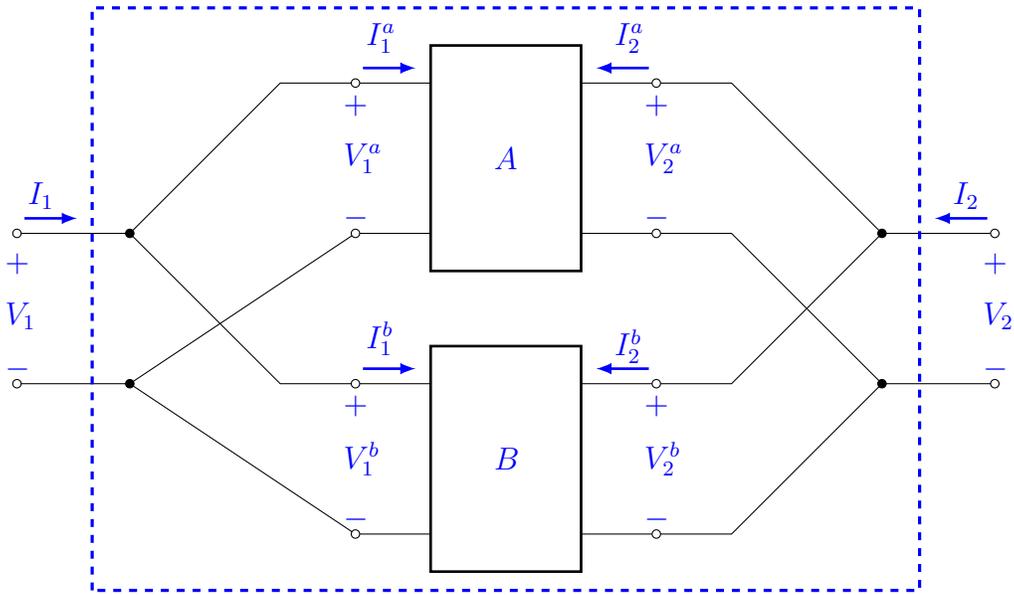


Figura 6.6: Bipuertos conectados en serie.

$$\begin{bmatrix} I_1^b(s) \\ I_2^b(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11}^b(s) & y_{12}^b(s) \\ y_{21}^b(s) & y_{22}^b(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^b(s) \\ V_2^b(s) \end{bmatrix} = [\mathbf{Y}^b(s)] \begin{bmatrix} V_1^b(s) \\ V_2^b(s) \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

Aplicando las leyes de Kirchhoff a la red eléctrica de la figura 6.6, se tiene

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1^a(s) \\ V_2^a(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1^b(s) \\ V_2^b(s) \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

$$\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1^a(s) \\ I_2^a(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_1^b(s) \\ I_2^b(s) \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

considerando las ecuaciones (6.21), (6.22), (6.23) y (6.24)

$$\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = [\mathbf{Y}^a(s)] \begin{bmatrix} V_1^a(s) \\ V_2^a(s) \end{bmatrix} + [\mathbf{Y}^b(s)] \begin{bmatrix} V_1^b(s) \\ V_2^b(s) \end{bmatrix} = [[\mathbf{Y}^a(s)] + [\mathbf{Y}^b(s)]] \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

Así, los parámetros $y_{ij}(s)$ de la red eléctrica original, se pueden determinar sumando los parámetros $y_{ij}(s)$ correspondientes de cada uno de los bipuertos individuales que la componen.

Ejemplo 6.2 Encuentre la función de transferencia de la red eléctrica de la figura 6.7.

Para determinar la relación que se desea, la red eléctrica se puede considerar que está constituido por dos bipuertos conectados en paralelo.

Teniendo en cuenta las propiedades del amplificador operacional ideal, esto es: ganancia del amplificador infinita, por lo cual el potencial del nodo (β) es nulo, $V_\beta = 0$; impedancia de entrada del amplificador operacional infinita, lo que implica que la corriente en la entrada inversora es nula, $I = 0$, por consiguiente

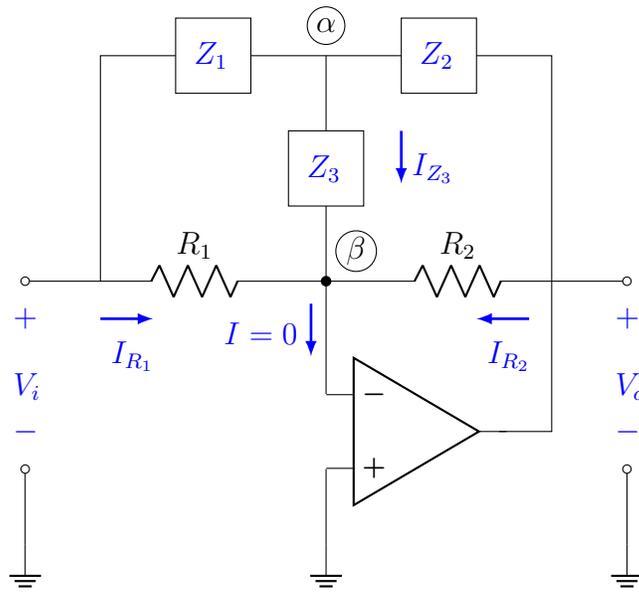


Figura 6.7: Filtro eléctrico activo.

$$I_{R_1} + I_{Z_3} + I_{R_2} = I = 0 \quad (6.26)$$

o también

$$\frac{V_i - V_\beta}{R_1} + \frac{V_\alpha - V_\beta}{Z_3} + \frac{V_o - V_\beta}{R_2} = 0 \quad (6.27)$$

Como consecuencia de que $V_\beta = 0$ e $I = 0$, el nodo (β) se refiere como *tierra virtual*. Considerando lo anterior la red eléctrica de la figura 6.7, se puede redibujar como muestra la figura 6.8.

Nótese la similitud entre los circuitos de las figuras 6.6 y 6.8. De la ecuación (6.24) podemos escribir para el circuito de la figura 6.8.

$$\begin{aligned} I_1(s) &= I_1^a(s) + I_1^b(s) \\ I_2(s) &= I_2^a(s) + I_2^b(s) \end{aligned} \quad (6.28)$$

donde

$$\begin{bmatrix} I_1^a(s) \\ I_2^a(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11}^a(s) & y_{12}^a(s) \\ y_{21}^a(s) & y_{22}^a(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_i(s) \\ V_o(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11}^a(s) & z_{12}^a(s) \\ z_{21}^a(s) & z_{22}^a(s) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_i(s) \\ V_o(s) \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

y para la red eléctrica activa

$$\begin{aligned} I_1^b(s) &= \frac{V_i(s)}{R_1} = I_{R_1} \\ I_2^b(s) &= \frac{V_o(s)}{R_2} = I_{R_2} \end{aligned} \quad (6.30)$$

Sustituyendo las ecuaciones (6.29) y (6.30) en la (6.28)

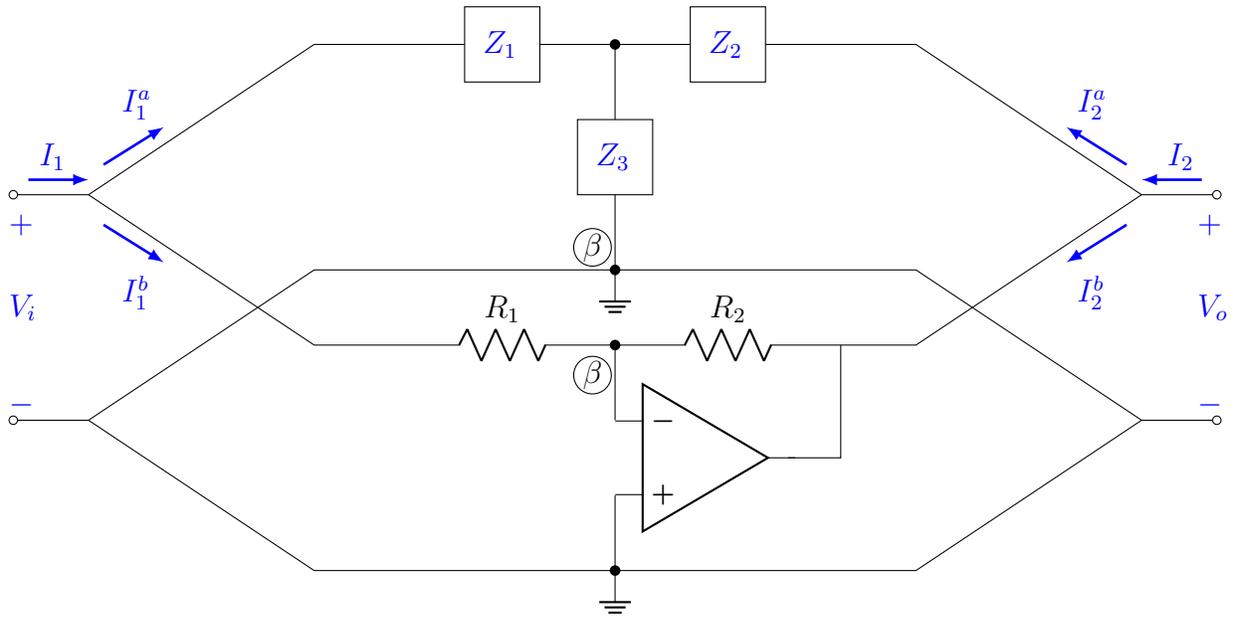


Figura 6.8: El filtro eléctrico activo de la figura 6.7.

$$\begin{aligned}
 I_1(s) &= y_{11}^a(s)V_1(s) + y_{12}^a(s)V_2(s) + \frac{1}{R_1}V_i(s) \\
 I_2(s) &= y_{21}^a(s)V_1(s) + y_{22}^a(s)V_2(s) + \frac{1}{R_2}V_o(s)
 \end{aligned} \tag{6.31}$$

con la ecuación (6.26) y teniendo en cuenta que $I_{Z_3} = I_1^a + I_2^a$

$$I_1^b(s) + I_1^a(s) + I_2^a(s) + I_2^b(s) = I_1(s) + I_2(s) = 0 \tag{6.32}$$

por lo que

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{y_{11}^a(s) + y_{21}^a(s) + \frac{1}{R_1}}{y_{12}^a(s) + y_{22}^a(s) + \frac{1}{R_2}} \tag{6.33a}$$

ecuación que en función $Z_1(s)$, $Z_2(s)$ y $Z_3(s)$ resulta

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{\frac{Z_2}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3} + \frac{1}{R_1}}{\frac{Z_1}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3} + \frac{1}{R_2}} \tag{6.33b}$$

6.4. Parámetros híbridos

A continuación se presentan dos conjuntos de parámetros que difieren en cuanto a la naturaleza de los vistos en las dos secciones anteriores. Se denominan parámetros g y parámetros h y colectivamente parámetros híbridos. Este nombre resulta apropiado debido a que los elementos individuales de cada conjunto tienen dimensiones diferentes.

6.4.1. Parámetros g

Los parámetros g de un bipuerto son las funciones de red $g_{ij}(s)$ que especifican la corriente eléctrica del puerto 1 y el voltaje del puerto 2 como funciones de las otras variables. La forma general de estas relaciones son

$$\begin{bmatrix} I_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = [\mathbf{G}(s)] \begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} \quad (6.34)$$

Dos de los cuatro parámetros se encuentran aplicando una fuente independiente de voltaje como entrada en el puerto 1 y poniendo en circuito abierto el puerto 2. Los otros dos parámetros se encuentran aplicando una fuente independiente de corriente como entrada en el puerto 2 y poniendo en corto circuito el puerto 1. En la figura 6.9 se muestran las condiciones de prueba mencionadas.

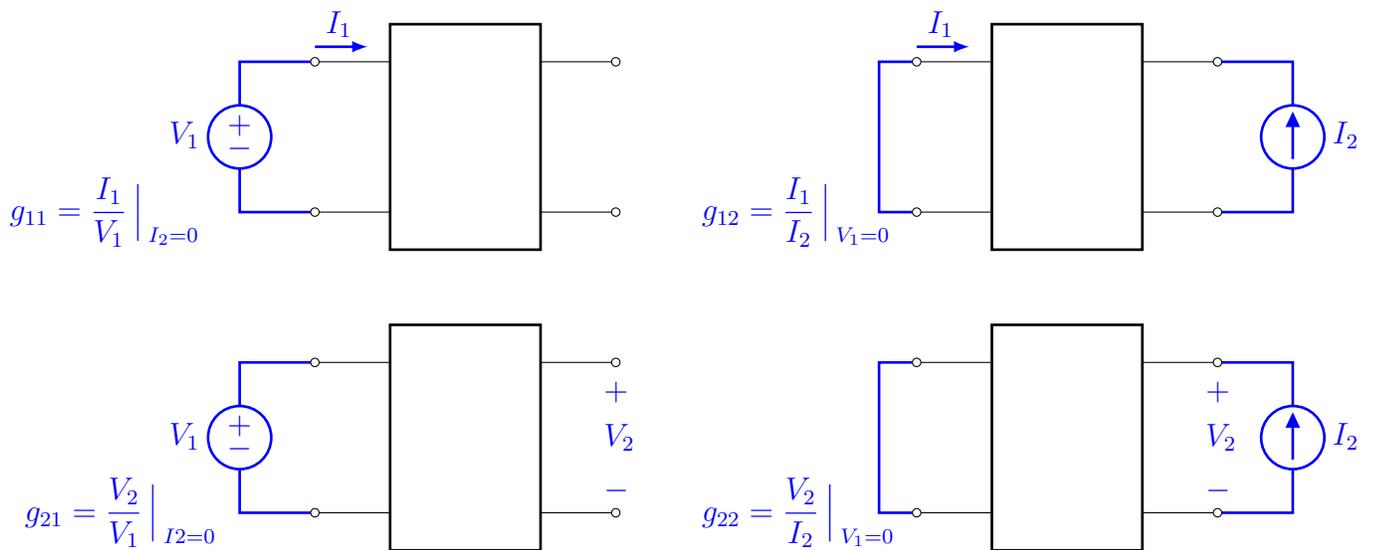


Figura 6.9: Condiciones de prueba para encontrar los parámetros $g_{ij}(s)$.

A partir de los parámetros $g_{ij}(s)$ es posible encontrar cualquier otro conjunto de parámetros, si tal representación existe. Como ejemplo de lo anterior, a continuación se determina la relación entre los parámetros $g_{ij}(s)$ y los parámetros $y_{ij}(s)$.

De la segunda ecuación de la (6.16)

$$I_2(s) = y_{21}(s)V_1(s) + y_{22}(s)V_2(s) \quad (6.35)$$

despejando a $V_2(s)$

$$V_2(s) = -\frac{y_{21}(s)}{y_{22}(s)}V_1(s) + \frac{1}{y_{22}(s)}I_2(s) \quad (6.36)$$

y comparando con la segunda ecuación de la (6.34)

$$V_2(s) = g_{21}(s)V_1(s) + g_{22}(s)I_2(s) \quad (6.37)$$

se tiene

$$g_{21}(s) = -\frac{y_{21}(s)}{y_{22}(s)} \quad (6.38)$$

y

$$g_{22}(s) = \frac{1}{y_{22}(s)} \quad (6.39)$$

De la primera ecuación de la (6.16)

$$I_1(s) = y_{11}(s)V_1(s) + y_{12}(s)V_2(s) \quad (6.40)$$

sustituyendo la ecuación (6.36) en la ecuación (6.40) y reacomodando términos

$$I_1(s) = \frac{y_{11}(s)y_{22}(s) - y_{12}(s)y_{21}(s)}{y_{22}(s)}V_1(s) + \frac{y_{12}(s)}{y_{22}(s)}I_2(s) \quad (6.41)$$

que tiene la forma de la primera ecuación de la (6.34)

$$I_1(s) = g_{11}(s)V_1(s) + g_{12}(s)I_2(s) \quad (6.42)$$

comparando las ecuaciones (6.41) y (6.42)

$$g_{11}(s) = \frac{y_{11}(s)y_{22}(s) - y_{12}(s)y_{21}(s)}{y_{22}(s)} \quad (6.43)$$

y

$$g_{12}(s) = \frac{y_{12}(s)}{y_{22}(s)} \quad (6.44)$$

Resumiendo, de las ecuaciones (6.38), (6.39), (6.43) y (6.44) se puede escribir

$$\begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{y_{22}(s)} \begin{bmatrix} \det [\mathbf{Y}(s)] & y_{12}(s) \\ -y_{21}(s) & 1 \end{bmatrix} \quad (6.45)$$

donde $\det [\mathbf{Y}(s)] = y_{11}(s)y_{22}(s) - y_{12}(s)y_{21}(s)$.

Es importante acentuar que para una red eléctrica de dos puertos dada, si los parámetros $y_{ij}(s)$ existen, los parámetros $g_{ij}(s)$ también existirán si y solo si $y_{22}(s) \neq 0$.

6.4.2. Parámetros h

Los parámetros h de una red eléctrica de dos puertos son las funciones de red $h_{ij}(s)$ que especifican el voltaje del puerto 1 y la corriente eléctrica del puerto 2 como funciones de las otras variables, es decir de $I_1(s)$ y $V_2(s)$. Las relaciones en forma matricial son

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11}(s) & h_{12}(s) \\ h_{21}(s) & h_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = [\mathbf{H}(s)] \begin{bmatrix} I_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} \quad (6.46)$$

Dos de los cuatro parámetros se encuentran aplicando una fuente independiente de corriente como entrada en el puerto 1, y poniendo en corto circuito el puerto 2. Los otros dos parámetros se encuentran aplicando una fuente independiente de voltaje de entrada en el puerto 2 y poniendo en circuito abierto el puerto 1. En la figura 6.10 se muestran estas condiciones de prueba.

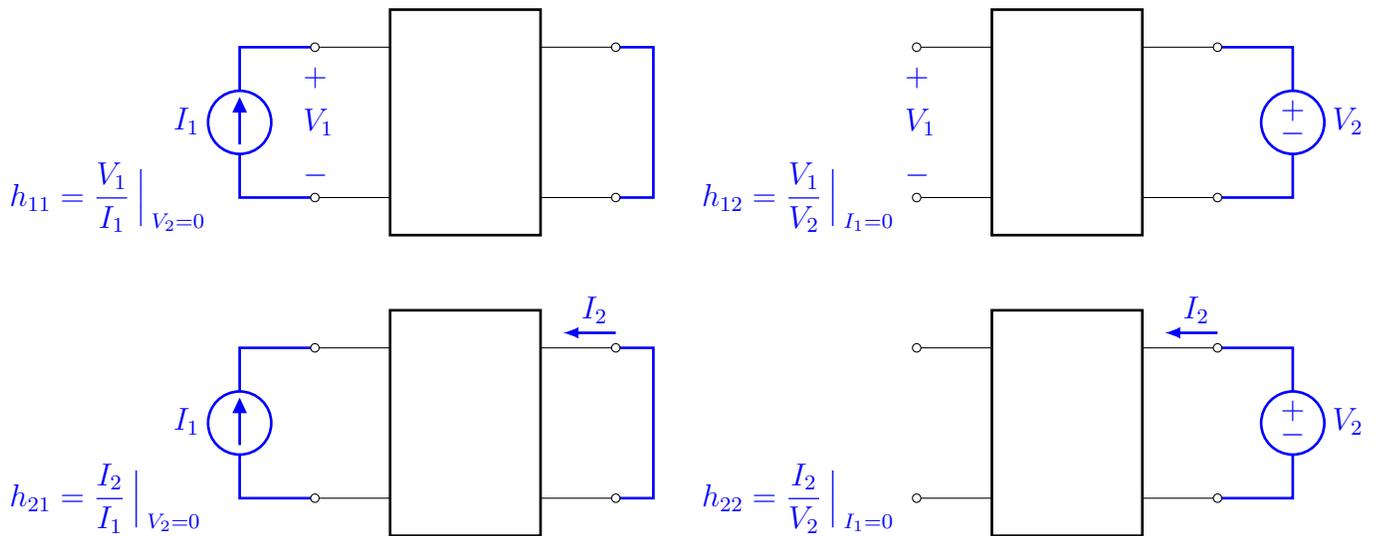


Figura 6.10: Condiciones de prueba para encontrar los parámetros $h_{ij}(s)$.

Si se comparan las ecuaciones (6.34) y (6.46), se infiere que la matriz de parámetros h y la matriz de parámetros g satisfacen la siguiente relación

$$[\mathbf{H}(s)] = [\mathbf{G}(s)]^{-1} \quad \text{o} \quad [\mathbf{G}(s)] = [\mathbf{H}(s)]^{-1} \quad (6.47)$$

6.5. Parámetros de transmisión o parámetros ABCD

A continuación se estudian dos conjuntos de parámetros que difieren totalmente de los que se han visto hasta ahora. La primera diferencia consiste en que $U_1(s)$ y $U_2(s)$ ya no son variables de uno y otro puerto al mismo tiempo. Ahora $U_1(s)$ y $U_2(s)$ representan a $V_1(s)$ e $I_1(s)$ y $W_1(s)$ y $W_2(s)$ corresponden a $V_2(s)$ y $-I_2(s)$. La razón por la que a $I_2(s)$ se le asigna un signo negativo se aclarará más adelante. Los coeficientes $k_{ij}(s)$ de la ecuación (6.1) se indican por los términos $A(s)$, $B(s)$, $C(s)$ y $D(s)$, por lo que

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_1(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(s) & B(s) \\ C(s) & D(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2(s) \\ -I_2(s) \end{bmatrix} = [\mathbf{T}(s)] \begin{bmatrix} V_2(s) \\ -I_2(s) \end{bmatrix} \quad (6.48)$$

Para una red eléctrica de dos puertos dada, los parámetros $ABCD$ o de transmisión se pueden determinar aplicando fuentes independientes de entrada de manera semejante a lo que se hizo para encontrar los parámetros de las secciones anteriores. Para ver esto, considere la primera ecuación de la (6.48); si el puerto 2 se pone en circuito abierto, entonces $-I_2(s) = 0$, y por consiguiente

$$V_1(s) = A(s)V_2(s) \quad (6.49)$$

Para implementar una situación de prueba semejante a lo que se hizo antes, se aplicaría una *fente independiente ideal de voltaje* en el puerto 2. Se hace énfasis en el término fuente independiente ideal de voltaje, para tener presente que su impedancia es nula y como se ha supuesto que $-I_2(s) = 0$, lo que a su vez implica una impedancia infinita, esta situación ocasiona una incongruencia. Para obviarla, $V_1(s)$ se convierte en la entrada y $V_2(s)$ en la salida. Así, el parámetro $A(s)$ se puede

encontrar a partir de la siguiente expresión

$$\frac{1}{A(s)} = \left. \frac{V_2(s)}{V_1(s)} \right|_{-I_2(s)=0} \quad (6.50)$$

entonces el parámetro $A(s)$ resulta ser el recíproco de la razón del voltaje de circuito abierto del puerto 2 al voltaje de entrada del puerto 1 de la red eléctrica de dos puertos.

Si ahora se procede a poner en corto circuito el puerto 2, $V_2(s) = 0$, la primera ecuación de la (6.48) es

$$V_1(s) = -B(s)I_2(s) \quad (6.51)$$

sin embargo, si se sigue un razonamiento semejante al realizado para el cálculo de $A(s)$; se concluye que $V_1(s)$ debe ser la entrada y $-I_2(s)$ la respuesta, y por lo tanto

$$\frac{1}{B(s)} = \left. -\frac{I_2(s)}{V_1(s)} \right|_{V_2(s)=0} \quad (6.52)$$

Para el calcular los parámetros $C(s)$ y $D(s)$, se recurre a la segunda ecuación de la (6.48) y se procede de forma análoga para la determinación de $A(s)$ y $B(s)$, por tanto

$$\frac{1}{C(s)} = \left. \frac{V_2(s)}{I_1(s)} \right|_{-I_2(s)=0} \quad (6.53)$$

$$\frac{1}{D(s)} = \left. \frac{-I_2(s)}{I_1(s)} \right|_{V_2(s)=0} \quad (6.54)$$

En la figura 6.11, se muestra las condiciones de prueba para encontrar los elementos que constituyen la matriz de transmisión.

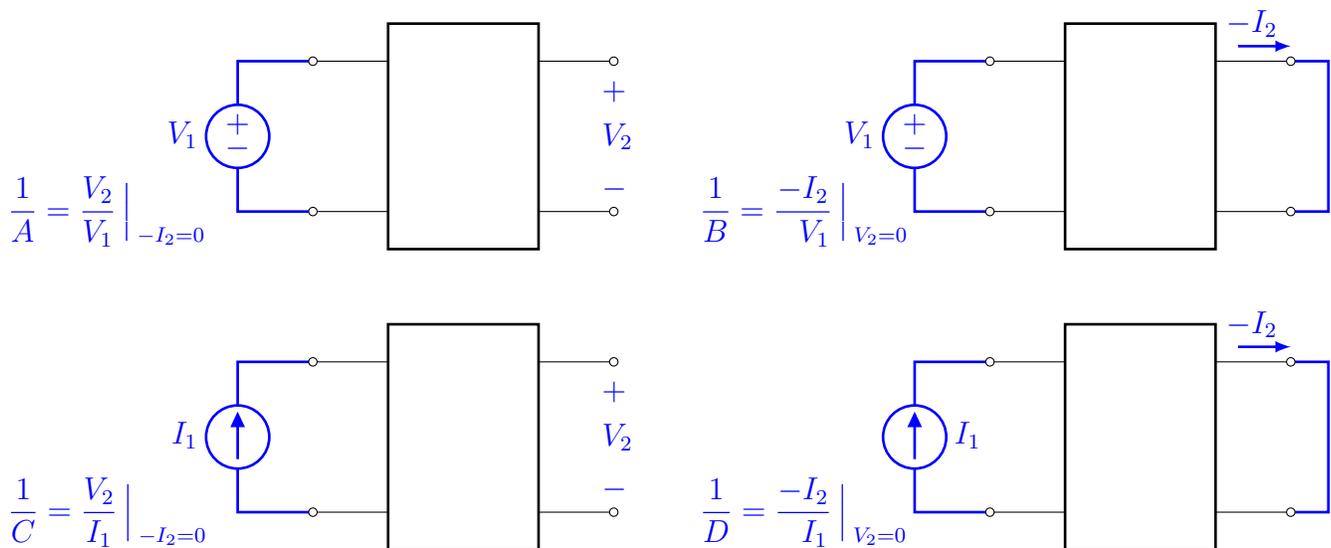


Figura 6.11: Condiciones de prueba para encontrar los parámetros de transmisión o $ABCD$.

A continuación se determina la relación entre los parámetros z y $ABCD$.

Despejando a $V_2(s)$ de la segunda ecuación de la (6.48)

$$V_2(s) = \frac{1}{C(s)}I_1(s) + \frac{D(s)}{C(s)}I_2(s) \quad (6.55)$$

sustituyendo la expresión anterior en la primera ecuación de la (6.48) y acomodando términos

$$V_1(s) = \frac{A(s)}{C(s)}I_1(s) + \frac{A(s)D(s) - B(s)C(s)}{C(s)}I_2(s) \quad (6.56)$$

de las las ecuaciones 6.3, 6.55 y 6.56, se tiene

$$\frac{1}{C(s)} \begin{bmatrix} A(s) & \det [\mathbf{T}(s)] \\ 1 & D(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11}(s) & z_{12}(s) \\ z_{21}(s) & z_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (6.57)$$

donde $\det [\mathbf{T}(s)] = A(s)D(s) - B(s)C(s)$.

Vale la pena percatarse de que en las definiciones de los parámetros $ABCD$, cada uno de ellos define una función de transferencia entre una variable del puerto 2 y otra del puerto 1. Es decir, todos los parámetros están relacionados con la transmisión de una señal del puerto 1 al puerto 2; es por esto que se denominan *parámetros de transmisión*.

6.5.1. Bipuertos en cascada

Hay algunas conexiones de redes eléctricas de dos puertos para las cuales los parámetros $ABCD$ de cada una de las redes eléctricas que la integran, pueden emplearse para encontrar la matriz de transmisión de toda la red eléctrica de dos puertos. Para ver esto, considere los dos *bipuertos conectados en cascada* que se muestran en la figura 6.12.

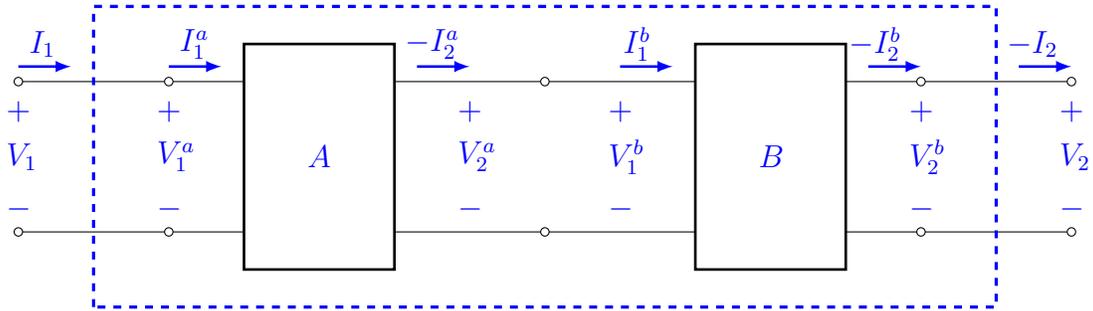


Figura 6.12: Bipuertos conectados en cascada.

Para el bipuerto A

$$\begin{bmatrix} V_1^a(s) \\ I_1^a(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^a(s) & B^a(s) \\ C^a(s) & D^a(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2^a(s) \\ -I_2^a(s) \end{bmatrix} \quad (6.58)$$

y para el bipuerto B

$$\begin{bmatrix} V_1^b(s) \\ I_1^b(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^b(s) & B^b(s) \\ C^b(s) & D^b(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2^b(s) \\ -I_2^b(s) \end{bmatrix} \quad (6.59)$$

En la figura 6.12, es cierto que $V_1(s) = V_1^a(s)$, $I_1(s) = I_1^a(s)$, $V_2^a(s) = V_1^b(s)$, $-I_2^a(s) = I_1^b(s)$, $V_2^b(s) = V_2(s)$ y por último $-I_2^b(s) = -I_2(s)$. Considerando lo anterior y las ecuaciones (6.58) y (6.59); la matriz de transmisión de la red eléctrica de dos puertos formada por los bipuertos A y B es

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_1(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^a(s) & B^a(s) \\ C^a(s) & D^a(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^b(s) & B^b(s) \\ C^b(s) & D^b(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2(s) \\ -I_2(s) \end{bmatrix} \quad (6.60)$$

Esta característica hace que la matriz de transmisión sea tan ventajosa y fructífera.

Finalmente: ¿Qué se puede decir sobre el sentido o signo negativo de $I_2(s)$?

El último conjunto de parámetros que se presenta, es el que se denomina parámetros $\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}\mathcal{D}$, el cual se define como

$$\begin{bmatrix} V_2(s) \\ -I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}(s) & \mathcal{B}(s) \\ \mathcal{C}(s) & \mathcal{D}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_1(s) \end{bmatrix} \quad (6.61)$$

esta matriz cuadrada recibe el nombre de matriz de parámetros $\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}\mathcal{D}$ o matriz inversa de los parámetros de transmisión, $T'(s)$. Debido a su poca aplicación en la práctica, únicamente se hace mención de ella.

6.6. Aplicaciones

A continuación, se encuentran algunas *funciones de red* que son de interés en el estudio, el análisis y la síntesis de las redes eléctricas.

Considere el circuito eléctrico de la figura 6.13

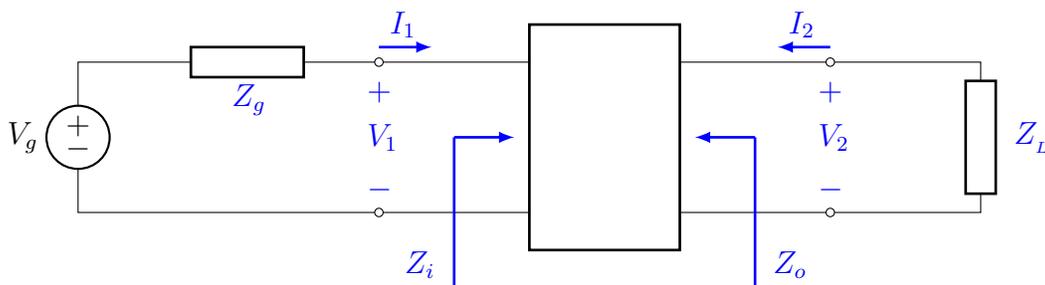


Figura 6.13: Bipuerto conectado a una fuente independiente de voltaje y a una carga eléctrica.

La primera función de red que se determina es la *impedancia de entrada* $Z_i(s)$, esto es, la impedancia vista desde la fuente independiente de voltaje $V_g(s)$ con una impedancia interna $Z_g(s)$, cuando una carga eléctrica $Z_L(s)$ está conectada al puerto de salida. Conocer $Z_i(s)$ es importante, ya que permite hacer una evaluación de la eficiencia en la potencia que se suministra a la carga eléctrica. De la figura 6.13 se obtiene

$$V_2(s) = -Z_L(s)I_2(s) \quad (6.62)$$

sustituyendo la ecuación (6.62) en la (6.16) y acomodando términos, resulta

$$Z_i(s) \triangleq \frac{V_1(s)}{I_1(s)} = \frac{y_{22}(s) + Y_L(s)}{\det [\mathbf{Y}(s)] + y_{11}(s)Y_L(s)} \quad (6.63)$$

donde

$$Y_L(s) = \frac{1}{Z_L(s)}$$

La segunda función de red que se encuentra es la impedancia que se observa desde la carga eléctrica, cuando una fuente independiente de voltaje con impedancia interna $Z_g(s)$ se conecta al puerto de entrada de la red eléctrica. Esta impedancia a la que se representa por $Z_o(s)$ permite evaluar la impedancia de acoplamiento que se conecta al puerto de salida de la red eléctrica. Para su cálculo, es necesario cancelar la fuente independiente $V_g(s)$; por tanto

$$V_1(s) = -Z_g(s)I_1(s) \quad (6.64)$$

después de sustituir la expresión anterior en la ecuación (6.16) y reacomodando términos

$$Z_o(s) \triangleq \frac{V_2(s)}{I_2(s)} = \frac{y_{11}(s) + Y_g(s)}{\det [\mathbf{Y}(s)] + y_{22}(s)Y_g(s)} \quad (6.65)$$

donde

$$Y_g(s) = \frac{1}{Z_g(s)}$$

Ahora se determina la *función de transferencia* de las corrientes eléctricas, que se define como

$$H_i(s) \triangleq \frac{-I_2(s)}{I_1(s)} \quad (6.66)$$

con la ecuación (6.62) en la segunda ecuación de la (6.2)

$$V_2(s) = z_{21}(s)I_1(s) + z_{22}(s)I_2(s) = -Z_L(s)I_2(s) \quad (6.67)$$

que implica

$$H_i(s) = \frac{-I_2(s)}{I_1(s)} = \frac{z_{21}(s)}{z_{22}(s) + Z_L(s)} \quad (6.68)$$

Finalmente, se obtiene la función de transferencia de los voltajes, $H_v(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)}$, para lo cual se sustituye (6.62) en la segunda ecuación de la (6.16), entonces

$$H_v(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{-y_{21}(s)}{y_{22}(s) + Y_L(s)} \quad (6.69)$$

Ejemplo 6.3 Obtenga la matriz de admitancias de corto circuito del bipuerto lineal e invariante en el tiempo que se muestra en la figura 6.14

Por definición, un *girador* es una red eléctrica de dos puertos o bipuerto. En la figura 6.15 se muestra su representación simbólica y la relación entre las variables eléctricas de sus puertos.

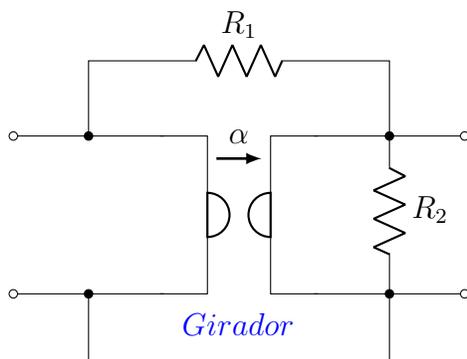


Figura 6.14: Bipuerto lineal e invariante en el tiempo.

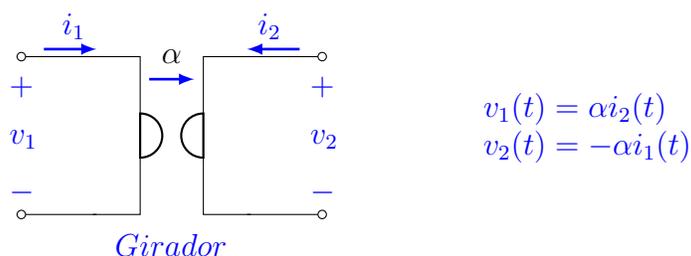


Figura 6.15: Representación simbólica de un girador. La constante α recibe el nombre de *giro*.

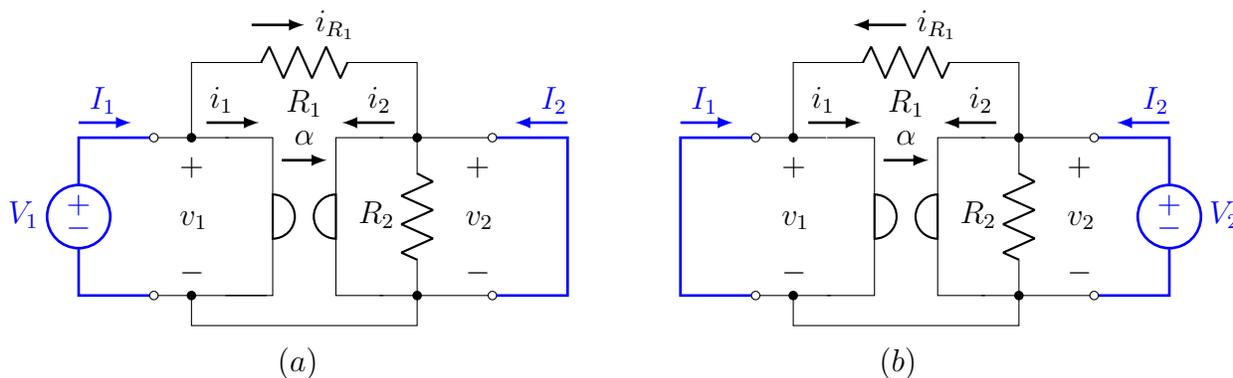


Figura 6.16: Condiciones de prueba para la obtención de los parámetros y_{ij} .

Al aplicar una fuente independiente de voltaje en uno de los puertos y cortocircuitando el otro, es posible encontrar los parámetros de corto circuito que se buscan.

En la figura 6.16a, $v_2 = 0$ por lo que $i_1 = 0$ y

$$y_{11} = \frac{I_1}{V_1} \Big|_{v_2=0} = \frac{i_1 + i_{R1}}{V_1} = \frac{V_1}{R_1} = \frac{1}{R_1}$$

$$y_{21} = \frac{I_2}{V_1} \Big|_{v_2=0} = \frac{i_2 - i_{R1}}{V_1} = \frac{\frac{V_1}{\alpha} - \frac{V_1}{R_1}}{V_1} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{R_1}$$

De manera similar, en la figura 6.16b, si $v_1 = 0$, entonces $i_2 = 0$. Por consiguiente

$$y_{12} = \frac{I_1}{V_2} \Big|_{v_1=0} = \frac{i_1 - i_{R_1}}{V_2} = \frac{-\frac{V_2}{\alpha} - \frac{V_2}{R_1}}{V_2} = -\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{R_1}\right)$$
$$y_{22} = \frac{I_2}{V_2} \Big|_{v_1=0} = \frac{i_{R_1} + \frac{V_2}{R_2}}{V_2} = \frac{\frac{V_2}{R_1} + \frac{V_2}{R_2}}{V_2} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

finalmente

$$\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & -\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{R_1}\right) \\ \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix}$$