Análisis de circuitos eléctricos en estado sinusoidal permanente

Víctor Manuel Sánchez Esquivel

Índice general

2.1. Análisis en estado sinusoidal permanente 4
2.1.1. La función sinusoidal 4
2.1.2. Propiedades de las señales sinusoidales que las distinguen de otras señales . . 4
2.2. Concepto de impedancia y admitancia complejas 7
2.3. Respuesta en frecuencia 9
2.3.1. Frecuencia de resonancia 9
2.3.2. Ancho de banda 11
2.4. Potencia y energía en estado sinusoidal permanente 13
2.4.1. Potencia instantánea y potencia promedio 14
2.4.2. Valor eficaz 15
2.4.3. Potencia en el circuito eléctrico de un puerto 15
2.4.4. Potencia compleja 17
2.4.5. Corrección del factor de potencia 19
2.5. Circuitos trifásicos 21
2.5.1. Método de los dos wattmetros 26
2.6. Superposición y potencia 27

2.1. Análisis en estado sinusoidal permanente

2.1.1. La función sinusoidal

Se define una función sinusoidal de velocidad angular ω a cualquier función definida en el intervalo $-\infty < t < \infty$ de la forma $A_m \cos(\omega\, t + \phi)$ donde A_m es la amplitud, ω es la frecuencia angular (medida en radianes por segundo) y ϕ es la fase. Esta sinusoidal se muestra en la figura 2.1.

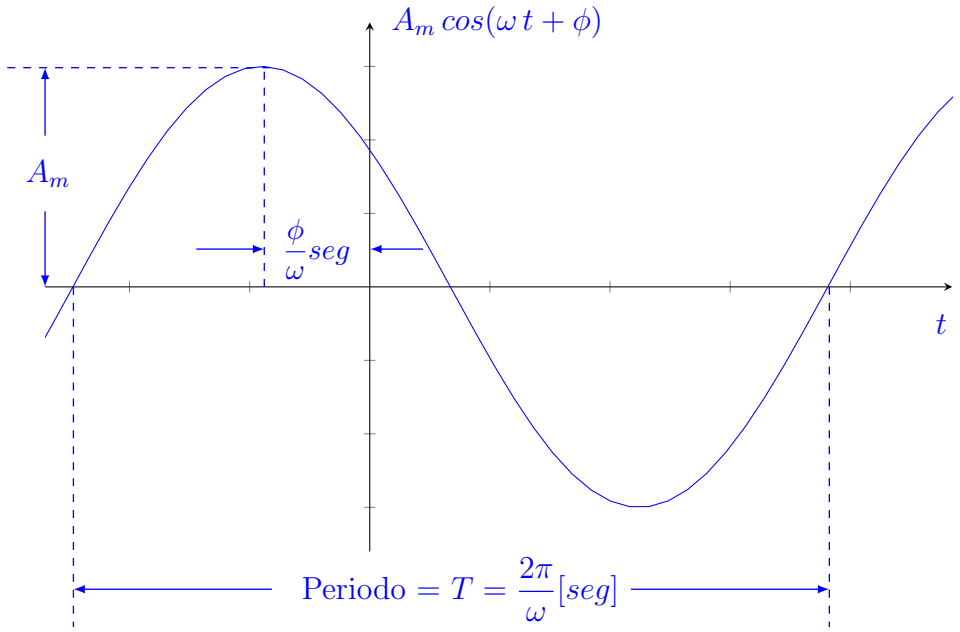

Figura 2.1: Forma de onda sinusoidal de amplitud A_m, frecuencia angular ω y fase ϕ.

2.1.2. Propiedades de las señales sinusoidales que las distinguen de otras señales

1. Si se deriva o se integra, vuelve a obtenerse la misma forma de onda.
2. La respuesta permanente ocasionada por entradas sinusoidales en sistemas lineales e invariantes en el tiempo es también sinusoidal.
3. *Facilidad* de generar dichas señales.
4. Mediante el análisis de Fourier cualquier señal puede "*descomponerse*" en funciones sinusoidales.

Teorema

La suma algebraica de cualquier número de funciones sinusoidales de la misma frecuencia angular, ω y cualquier número de sus derivadas de cualquier orden es también una función sinusoidal de la misma frecuencia angular, ω.

¿Cómo representar y trabajar con funciones sinusoidales?

Una señal de la frecuencia angular ω está completamente definida por su amplitud A_m y su fase ϕ.

Si

$$x(t) = A_m \cos(\omega t + \phi) = \text{Re}\left\{\sqrt{2}\boldsymbol{A}e^{j\omega t}\right\} \tag{2.1}$$

donde

$$\boldsymbol{A} = \frac{A_m}{\sqrt{2}}\, e^{j\phi} \triangleq \text{Fasor} \tag{2.2}$$

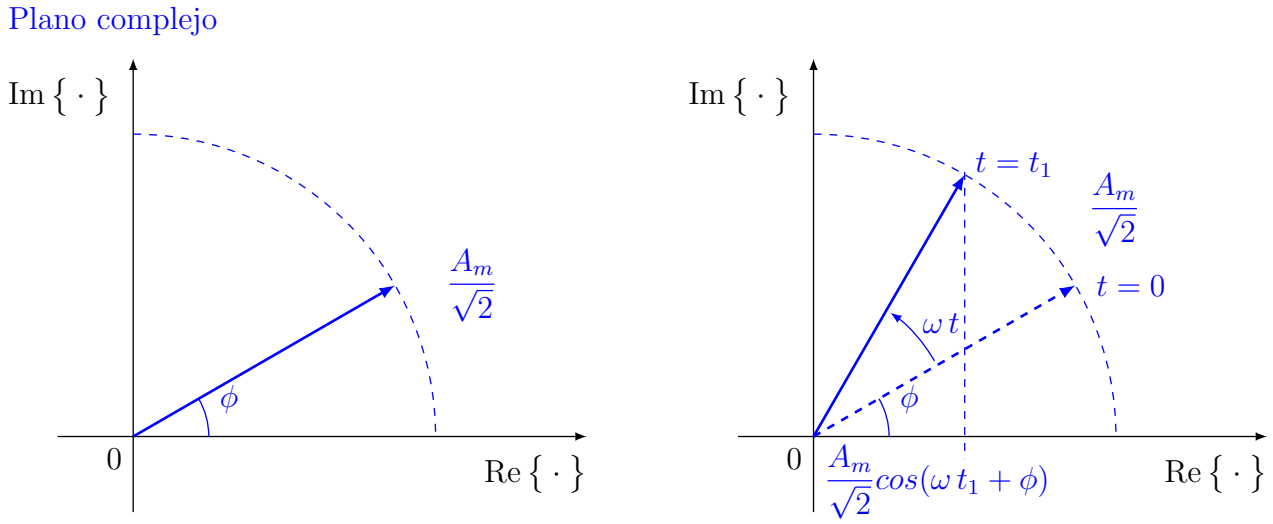

Figura 2.2: Concepto de fasor.

Un *fasor* es un segmento de recta dirigido, que gira alrededor del origen a una velocidad constante y cuya proyección sobre una dirección de referencia representa un señal sinusoidal. En la figura 2.2 se presenta este concepto. Se debe hacer hincapié en que un fasor no proporciona información sobre la frecuencia angular ω.

La representación de funciones sinusoidales por medio de fasores, se utiliza principalmente para obtener la respuesta de estado cero de una ecuación diferencial lineal ordinaria de coeficientes constantes, cuando la función de excitación es una función sinusoidal, de la forma

$$a_N \frac{d^N y(t)}{dt^N} + a_{N-1} \frac{d^{N-1} y(t)}{dt^{N-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = A_m \cos(\omega t + \phi) \tag{2.3}$$

La generalización de lo expresado en el párrafo anterior nos permite afirmar que *la respuesta permanente de un sistema (circuito eléctrico) lineal e invariante en el tiempo, cuando la entrada es sinusoidal, es sinusoidal también.* En la figura 2.3 se manifiesta el quid de lo que se asevera.

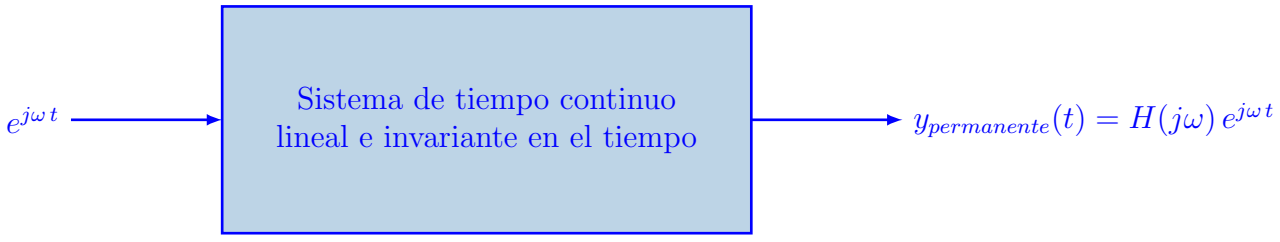

Figura 2.3: Diagrama a bloques para determinar la respuesta en frecuencia de un sistema.

Donde

$$H(j\omega) = H(s)\Big|_{s=j\omega} = |H(j\omega)|\angle H(j\omega) \tag{2.4}$$

esto es, la función de transferencia evaluada en el eje imaginario del plano complejo.

Propiedades del operador $\mathrm{Re}\{\cdot\}$

1. Es lineal. Sean $f_1(t)$ y $f_2(t)$ dos funciones complejas de variable real t y α,β dos números reales cualesquiera.

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\{\alpha f_1(t)\} &= \alpha\,\mathrm{Re}\{f_1(t)\} && \textit{Homogeneidad} \\ \mathrm{Re}\{f_1(t)+f_2(t)\} &= \mathrm{Re}\{f_1(t)\} + \mathrm{Re}\{f_2(t)\} && \textit{Aditividad} \\ \mathrm{Re}\{\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)\} &= \alpha\,\mathrm{Re}\{f_1(t)\} + \beta\,\mathrm{Re}\{f_2(t)\} \end{aligned}$$

2. Sea $\boldsymbol{A}$ un número complejo cuya representación polar es $\dfrac{A_m}{\sqrt{2}}\,e^{j\phi}$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\,\mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\boldsymbol{A}\,e^{j\omega t}\right\} &= \mathrm{Re}\left\{\frac{d}{dt}\sqrt{2}\boldsymbol{A}\,e^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{j\omega\sqrt{2}\boldsymbol{A}\,e^{j\omega t}\right\} \\ \implies \frac{d}{dt}\,\mathrm{Re}\{(\cdot)\} &= \mathrm{Re}\left\{\frac{d}{dt}(\cdot)\right\} \\ \frac{d}{dt}\sqrt{2}\boldsymbol{A}\,e^{j\omega t} &= j\omega\sqrt{2}\boldsymbol{A}e^{j\omega t} \end{aligned}$$

3. Sean $\boldsymbol{A} = A_r + jA_i$ y $\boldsymbol{B} = B_r + jB_i$

   a)

$$\mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\boldsymbol{A}\,e^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\boldsymbol{B}\,e^{j\omega t}\right\} \quad \forall t \implies \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$$

   b)

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \implies \mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\boldsymbol{A}\,e^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\boldsymbol{B}\,e^{j\omega t}\right\} \quad \forall t$$

   Comprobación:

   a)

$$\begin{aligned} \text{Para } t=0, \quad & \mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\boldsymbol{A}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\boldsymbol{B}\right\} && \implies A_r = B_r \\ \text{Para } t=\frac{\pi}{2\omega}, \quad & \mathrm{Re}\left\{j\sqrt{2}\boldsymbol{A}\right\} = \mathrm{Re}\left\{j\sqrt{2}\boldsymbol{B}\right\} && \implies A_i = B_i \end{aligned}$$

   b) Si

$$\text{Si } \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \implies \sqrt{2}\boldsymbol{A}\,e^{j\omega t} = \sqrt{2}\boldsymbol{B}\,e^{j\omega t} \quad \forall t \implies \mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\boldsymbol{A}\,e^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\boldsymbol{B}\,e^{j\omega t}\right\} \quad \forall t$$

Finalmente, es conveniente recordar que para que un sistema tenga respuesta en estado sinusoidal permanente es necesario que todas sus frecuencias naturales estén en el semiplano izquierdo del plano complejo o si son imaginarias que éstas sean diferentes a la de función de excitación.

2.2. Concepto de impedancia y admitancia complejas

Considere

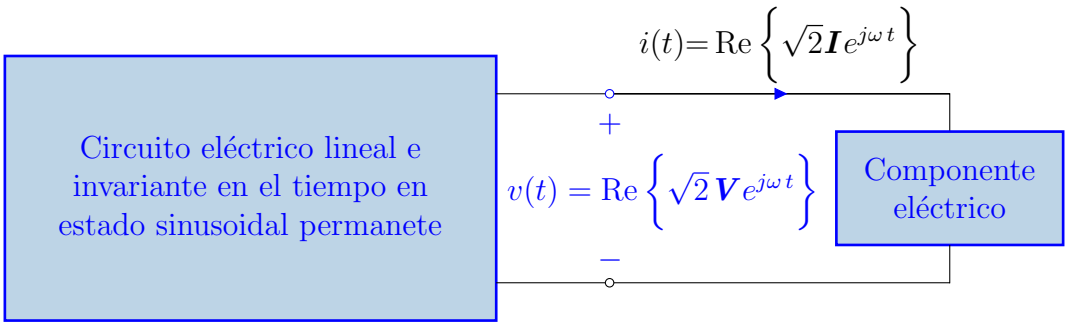

Figura 2.4: Circuito eléctrico lineal e invariante en el tiempo.

- Resistor:

$$\begin{aligned} v(t) = Ri(t) \implies \mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\,\boldsymbol{V}e^{j\omega t}\right\} &= R\,\mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\boldsymbol{I}e^{j\omega t}\right\} \\ \mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\,\boldsymbol{V}e^{j\omega t}\right\} &= \mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}R\boldsymbol{I}e^{j\omega t}\right\} \\ \implies \boldsymbol{V} = R\boldsymbol{I} \quad \text{o} \quad \boldsymbol{I} &= G\,\boldsymbol{V} \end{aligned} \tag{2.5}$$

- Capacitor:

$$\begin{aligned} i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} \implies \mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\boldsymbol{I}e^{j\omega t}\right\} &= C\frac{d}{dt}\,\mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\,\boldsymbol{V}e^{j\omega t}\right\} \\ \mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\boldsymbol{I}e^{j\omega t}\right\} &= \mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\,j\omega C\,\boldsymbol{V}e^{j\omega t}\right\} \\ \implies \boldsymbol{I} = j\omega C\,\boldsymbol{V} \quad \text{o} \quad \boldsymbol{V} &= \frac{1}{j\omega C}\boldsymbol{I} \end{aligned} \tag{2.6}$$

- Inductor:

$$\begin{aligned} v(t) = L\frac{di(t)}{dt} \implies \mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\,\boldsymbol{V}e^{j\omega t}\right\} &= L\frac{d}{dt}\,\mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\boldsymbol{I}e^{j\omega t}\right\} \\ \mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\,\boldsymbol{V}e^{j\omega t}\right\} &= \mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}j\omega L\boldsymbol{I}e^{j\omega t}\right\} \\ \implies \boldsymbol{V} = j\omega L\boldsymbol{I} \quad \text{o} \quad \boldsymbol{I} &= \frac{\boldsymbol{V}}{j\omega L} \end{aligned} \tag{2.7}$$

En la figura 2.5 se muestran las relaciones entre el voltaje y la corriente eléctrica en los elementos considerados, respectivamente.

En general, la impedancia consta de una parte real (*resistencia*) y una parte imaginaria. La parte imaginaria de la impedancia se denomina *reactancia* y se denota por $X(\omega)$.

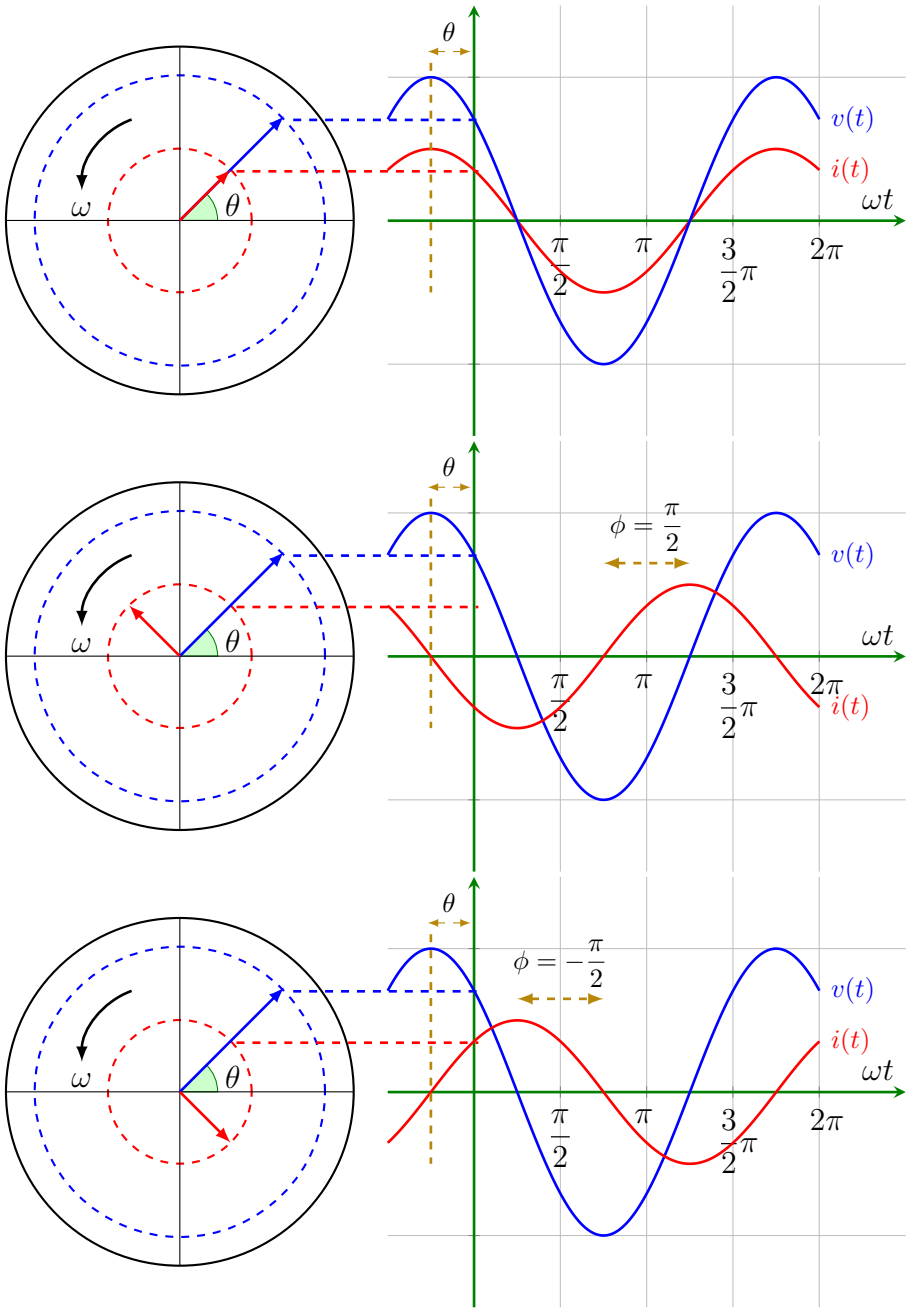

Figura 2.5: Relación entre el voltaje y la corriente eléctrica en un resistor, un capacitor y un inductor.

$$Z(j\omega) = \mathrm{Re}\left\{Z(j\omega)\right\} + \mathrm{Im}\left\{Z(j\omega)\right\} = R + jX(j\omega) \tag{2.8}$$

De la misma manera, su recíproco, la admitancia también está constituida de una parte real (*conductancia*) y una parte imaginaria. La parte imaginaria de la admitancia se denomina *susceptancia* y se denota por $B(j\omega)$.

$$Y(j\omega) = \mathrm{Re}\left\{Y(j\omega)\right\} + \mathrm{Im}\left\{Y(j\omega)\right\} = G + jB(j\omega) \tag{2.9}$$

2.3. Respuesta en frecuencia

2.3.1. Frecuencia de resonancia

Considere el circuito RLC serie que se muestra en la figura 2.6.

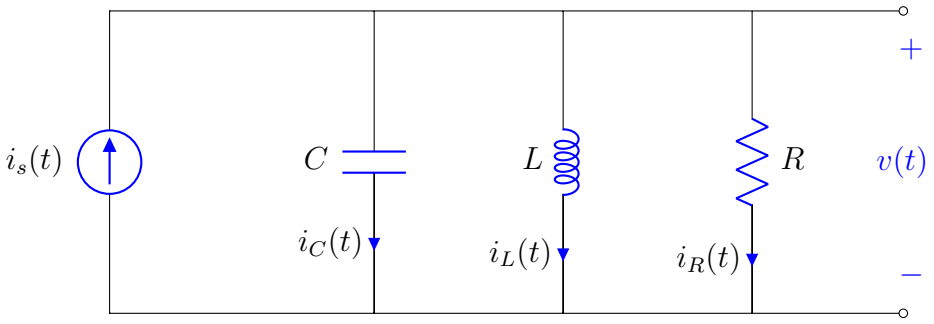

Figura 2.6: Circuito eléctrico RLC paralelo.

Determine la relación entre los fasores asociados a la corriente eléctrica en el resistor y a la corriente eléctrica de la fuente independiente de corriente.

De la primera ley de Kirchhoff, (LCK), y empleando fasores, se tiene

$$\boldsymbol{I}_s = \boldsymbol{I}_C + \boldsymbol{I}_L + \boldsymbol{I}_R = \frac{\boldsymbol{V}_C}{\dfrac{1}{j\omega C}} + \frac{\boldsymbol{V}_L}{j\omega L} + \boldsymbol{I}_R$$

Teniendo en cuenta la segunda ley de Kirchhoff, (LVK), $v_C = v_L = v_R = v = R\,i_R$

$$\boldsymbol{I}_s = j\omega CR\boldsymbol{I}_R + \frac{R}{j\omega L}\boldsymbol{I}_R + \boldsymbol{I}_R = \left(j\omega CR + \frac{R}{j\omega L} + 1\right)\boldsymbol{I}_R$$

$$\frac{\boldsymbol{I}_R}{\boldsymbol{I}_s} = \frac{1}{j\omega CR + \dfrac{R}{j\omega L} + 1} = \frac{1}{j\left(\omega CR - \dfrac{R}{\omega L}\right) + 1}$$

Si se define la función de transferencia como la razón de los fasores asociados a las corrientes eléctricas de la resistencia y de la fuente independiente de la entrada, se tiene

$$H(j\omega) = \frac{\boldsymbol{I}_R}{\boldsymbol{I}_s} = \frac{1}{1 + jCR\left(\omega - \dfrac{1}{\omega CL}\right)} \tag{2.10}$$

Cuando[1]

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

a este valor de frecuencia angular se le denomina *frecuencia de resonancia* y se denota con ω_o.

Aunque la ecuación (2.10) describe el comportamiento del circuito RLC paralelo; en la práctica se trabaja con dicha ecuación en una forma más apropiada, llamada forma *normalizada*, la cual se

[1]Este valor se encuentra derivando la magnitud con respecto a ω (la frecuencia angular) e igualándola a cero.

obtiene a continuación.

Multiplicando y dividiendo la parte imaginaria del denominador por ω_o y teniendo presente su valor, resulta

$$H(j\omega) = \frac{\boldsymbol{I}_R}{\boldsymbol{I}_s} = \frac{1}{1 + jCR\omega_o\left(\dfrac{\omega}{\omega_o} - \dfrac{1}{\omega CL\omega_o}\right)} = \frac{1}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_o} - \dfrac{\omega_o}{\omega}\right)} \tag{2.11}$$

donde $Q = CR\omega_o$; este parámetro recibe el nombre de *factor de calidad*.

En la figura 2.7 se muestran las gráficas correspondientes a la magnitud y fase de la ecuación (2.11) para diferentes valores del factor de calidad, Q. Estas gráficas reciben el nombre de *la respuesta en frecuencia*, para la entrada y salida especificadas.

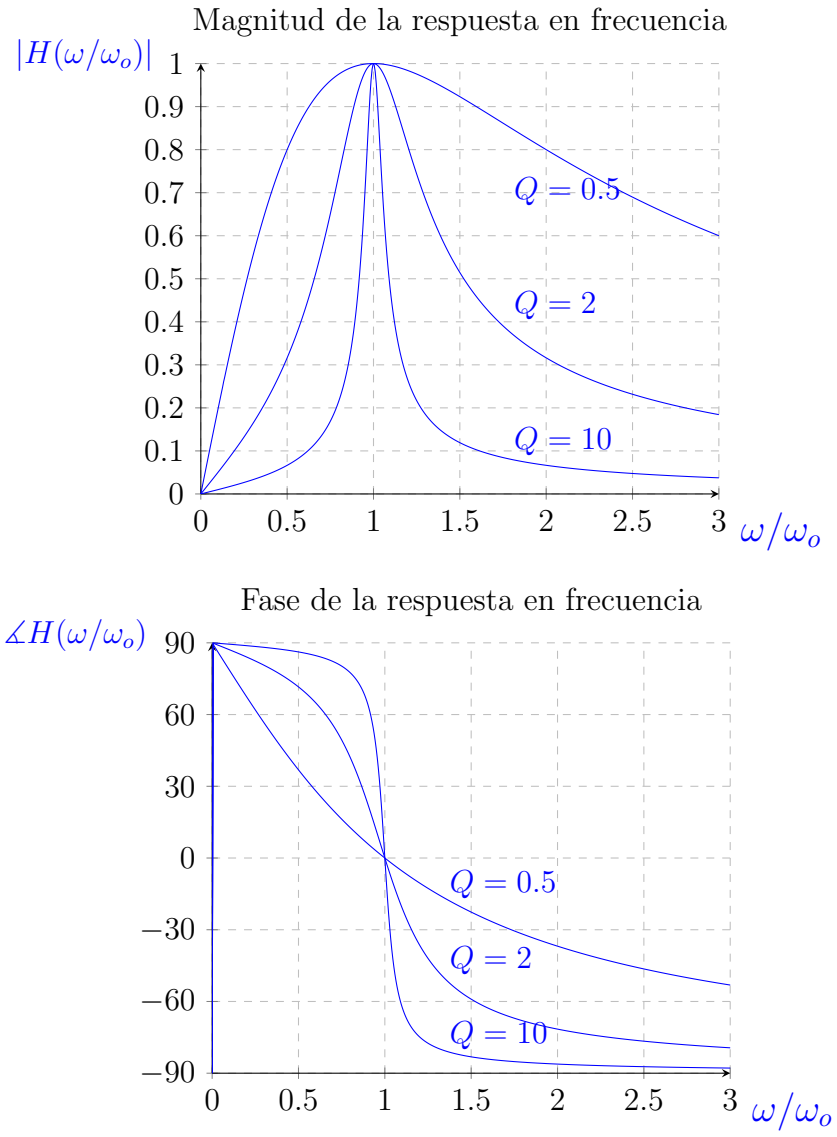

Figura 2.7: Respuesta en frecuencia del circuito RLC serie.

Se puede observar en la gráfica de la respuesta en frecuencia que cuando $\omega = \omega_0$, la magnitud de la función de transferencia es máxima y es igual a la unidad. Estos nos indica que el fasor asociado a la salida es igual al fasor asociado a la entrada y por consiguiente la corriente en el resistor es idéntica a la corriente eléctrica de la fuente independiente. También, se debe observar que las gráficas de la magnitud y fase dependen del factor de calidad Q. Este factor de calidad es igual a la razón de la magnitud del fasor de la corriente eléctrica en el inductor (o en el capacitor) *a la frecuencia de resonancia* y la magnitud del fasor de la corriente eléctrica de la fuente independiente. Esto es

$$Q = \frac{|\boldsymbol{I}_L|}{|\boldsymbol{I}_s|} = \frac{|\boldsymbol{I}_C|}{|\boldsymbol{I}_s|} \tag{2.12}$$

2.3.2. Ancho de banda

Tanto para las frecuencias $\omega << \omega_0$ como para las frecuencias $\omega >> \omega_0$, la magnitud de la salida se reduce considerablemente. Es por esto, que el circuito eléctrico se dice que es un *filtro pasa banda*. El *ancho de la banda*,AB, de un filtro eléctrico se define como el conjunto de frecuencias tales que la magnitud es mayor o igual al valor máximo de la magnitud entre la raíz de 2, es decir

$$|H(j\omega)| \geq \frac{|H(j\omega)|_{\max}}{\sqrt{2}} \tag{2.13}$$

A continuación se determinan las nombradas *frecuencias de corte* ω_1 y ω_2, que constituyen el ancho de banda de filtro pasa banda. De la ecuación (2.11)

$$\frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

entonces

$$Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega}\right)^2 = 1$$

obteniendo la raíz cuadrada

$$Q\left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega}\right) = \pm 1$$

reacomodando

$$\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \pm\frac{1}{Q}$$

así

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \pm \frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0} - 1 = 0$$

Se tiene

$$\frac{\omega}{\omega_o} = \frac{\pm\frac{1}{Q} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{Q}\right)^2 + 4}}{2} = \frac{\pm 1 \pm \sqrt{1 + 4Q^2}}{2Q}$$

considerando el signo positivo del radical

$$\omega_1 = \omega_o\left(\frac{-1+\sqrt{1+4Q^2}}{2Q}\right) \quad \text{y} \quad \omega_2 = \omega_o\left(\frac{+1+\sqrt{1+4Q^2}}{2Q}\right)$$

El ancho de banda es

$$AB = \omega_2 - \omega_1 = \omega_o\left(\frac{+1+\sqrt{1+4Q^2}}{2Q} - \frac{-1+\sqrt{1+4Q^2}}{2Q}\right) = \frac{\omega_o}{Q} \tag{2.14}$$

El factor de calidad, también se puede determinar a partir de

$$Q = \frac{\omega_o}{\omega_2 - \omega_1} \tag{2.15}$$

Es conveniente observar que la frecuencia de resonancia es la media geométrica de las frecuencias de corte ω_1 y ω_2

$$\omega_1\omega_2 = \omega_o\left(\frac{+1+\sqrt{1+4Q^2}}{2Q}\right)\omega_o\left(\frac{-1+\sqrt{1+4Q^2}}{2Q}\right) = \omega_0^2$$

$$\omega_o = \sqrt{\omega_1\omega_2} \tag{2.16}$$

Ejemplo 2.1 Consideremos ahora el circuito RLC serie, que se muestra en la figura 2.8. Encuentre la relación entre el fasor asociado al voltaje en el resistor y el fasor asociado al voltaje de la fuente independiente, la entrada.

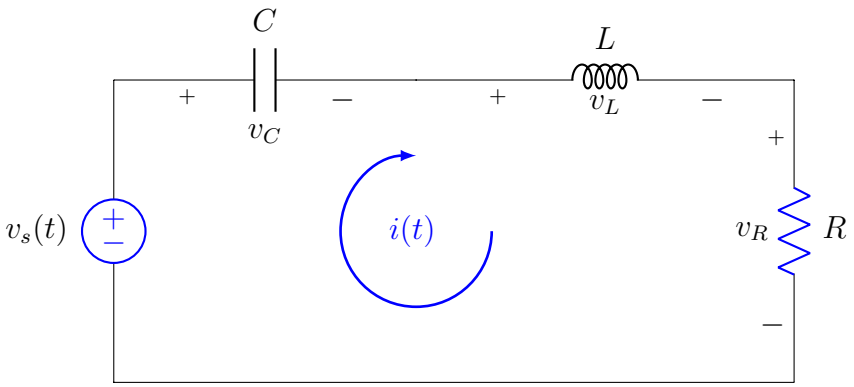

Figura 2.8: Circuito eléctrico RLC serie.

De la segunda ley de Kirchhoff y empleando fasores, se tiene

$$\boldsymbol{V}_s = \boldsymbol{V}_C + \boldsymbol{V}_L + \boldsymbol{V}_R = \frac{\boldsymbol{I}_C}{j\omega C} + j\omega L\boldsymbol{I}_L + \boldsymbol{V}_R$$

Teniendo en cuenta la primera ley de Kirchhoff, $i_C = i_L = i_R = i = \dfrac{v_R}{R}$

$$\boldsymbol{V}_s = \frac{1}{j\omega CR}\boldsymbol{V}_R + \frac{j\omega L}{R}\boldsymbol{V}_R + \boldsymbol{V}_R = \left(\frac{1}{j\omega CR} + \frac{j\omega L}{R} + 1\right)\boldsymbol{V}_R$$

$$\frac{\boldsymbol{V}_R}{\boldsymbol{V}_s} = \frac{1}{\frac{1}{j\omega CR} + \frac{j\omega L}{R} + 1} = \frac{1}{j\left(-\frac{1}{\omega CR} + \frac{\omega L}{R}\right) + 1} = \frac{1}{j\frac{L}{R}\left(\omega - \frac{1}{\omega CL}\right) + 1}$$

por consiguiente

$$H(j\omega) = \frac{\boldsymbol{V}_R}{\boldsymbol{V}_s} = \frac{1}{1 + j\frac{L\omega_o}{R}\left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{1}{\omega CL\omega_o}\right)} \tag{2.17}$$

con

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{y} \quad Q = \frac{L\omega_o}{R}$$

En la función de transferencia, se tiene nuevamente

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega}\right)} \tag{2.18}$$

¿Qué se puede deducir?

En este caso, cuando $\omega = \omega_o$, la diferencia de potencial en el resistor es igual al voltaje de la fuente independiente. Y el factor de calidad Q, es igual a la razón de la magnitud del fasor del voltaje en el inductor (o en el capacitor), a la*frecuencia de resonancia* y la magnitud del fasor del voltaje de la fuente independiente.

$$Q = \frac{|\boldsymbol{V}_L|}{|\boldsymbol{V}_s|} = \frac{|\boldsymbol{V}_C|}{|\boldsymbol{V}_s|}$$

2.4. Potencia y energía en estado sinusoidal permanente

Con la finalidad de simplificar el análisis que se presenta, se consideran únicamente redes eléctricas lineales e invariantes en el tiempo operando en estado sinusoidal permanente, es decir se asumirá que todas las corrientes eléctricas y voltajes son sinusoidales de la misma frecuencia angular ω.

Recordando las siguientes identidades trigonométricas, que se emplearán frecuentemente:

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$$

2.4.1. Potencia instantánea y potencia promedio

Considere un *resistor* R por el cual circula una corriente eléctrica sinusoidal $i(t)$ especificada por el fasor $\boldsymbol{I} = \dfrac{I_m}{\sqrt{2}} \exp(j\measuredangle \boldsymbol{I})$ cuando se aplica el voltaje $v(t)$ cuyo fasor asociado es $\boldsymbol{V} = \dfrac{V_m}{\sqrt{2}} \exp(j\measuredangle \boldsymbol{V})$. Dado que

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \measuredangle \boldsymbol{I}) \qquad y \qquad v(t) = V_m \cos(\omega t + \measuredangle \boldsymbol{V})$$

la *potencia instantánea*, $p(t)$, que el generador entrega al resistor es

$$p(t) = v(t)i(t) = RI_m \cos(\omega t + \measuredangle \boldsymbol{I})\, I_m \cos(\omega t + \measuredangle \boldsymbol{I}) \tag{2.19}$$

por consiguiente

$$p(t) = \frac{1}{2} RI_m^2 [1 + \cos 2(\omega t + \measuredangle \boldsymbol{I})]$$

Es conveniente percatarse que la potencia instantánea oscila *dos veces* en un período $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ entre 0 y RI_m^2.

En el mismo orden de ideas, se denomina *potencia promedio* al valor promedio en un periodo de la potencia instantánea, $p(t)$.

$$P\,|_{\text{promedio}} = P \triangleq \frac{1}{T} \int_0^T p(t)\mathrm{d}t \tag{2.20}$$

así

$$P = \frac{1}{2} RI_m^2 \tag{2.21}$$

Remplacemos el resistor R por un *capacitor* C. Sea el voltaje en el capacitor C especificado por el fasor $\boldsymbol{V} = \dfrac{V_m}{\sqrt{2}} \exp(j\measuredangle \boldsymbol{V})$. Por lo que el fasor asociado a la corriente eléctrica a través del capacitor C está dada por $\boldsymbol{I} = j\omega C\, \boldsymbol{V}$, así

$$i(t) = \mathrm{Re}\left\{ j\omega C V_m \exp(j\measuredangle \boldsymbol{V}) \exp(j\omega t) \right\} = \omega C V_m \cos\left(\omega t + \measuredangle \boldsymbol{V} + \frac{\pi}{2} \right)$$

por lo que

$$\begin{aligned} p(t) = v(t)i(t) &= \omega C V_m^2 \cos\left(\omega t + \measuredangle \boldsymbol{V}\right) \cos\left(\omega t + \measuredangle \boldsymbol{V} + \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \omega C V_m^2 \cos 2\left(\omega t + \measuredangle \boldsymbol{V} + \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned} \tag{2.22}$$

Se debe notar que la potencia instantánea en el capacitor oscila dos veces por periodo, entre $-\dfrac{1}{2}\omega C V_m^2$ y $+\dfrac{1}{2}\omega C V_m^2$.

La potencia promedio en un período es cero, como es de esperarse, ya que ninguna energía se disipa y $\dfrac{1}{2}\omega C v(0)^2$ (la energía inicial almacenada) es igual $\dfrac{1}{2}\omega C v(T)^2$ (la energía final almacenada)

debido a que $v(\cdot)$ es sinusoidal de período T.

Si se tiene un *inductor* L, se puede obtener (*por dualidad*)

$$p(t) = \frac{1}{2}\omega L I_m^2 \cos 2\left(\omega t + \measuredangle \boldsymbol{I} + \frac{\pi}{4}\right) \tag{2.23}$$

Dado que los capacitores (*ideales*) e inductores (*ideales*) son elementos sin pérdidas y por consiguiente no disipan energía, las ecuaciones (2.22) y (2.23) muestran, que la *potencia promedio* que se entrega a C y a L es cero. ¿Por qué?

Consideremos ahora la energía almacenada en el inductor L. En el tiempo t, es

$$\frac{1}{2}Li(t)^2 = \frac{1}{2}\omega L I_m^2 \cos 2\big(\omega t + \measuredangle \boldsymbol{I}\big)^2$$

Es obvio que siempre es positiva y que la *energía promedio almacenada* en L está dada por $\frac{1}{4}LI_m^2$.

Por supuesto, la forma dual se cumple para los capacitores.

2.4.2. Valor eficaz

En las ecuaciones anteriores, se expresó la corriente eléctrica como $\boldsymbol{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}\exp(j\measuredangle \boldsymbol{I})$, donde I_m es la *amplitud* de la sinusoidal $i(t)$; también se tiene el factor $\frac{1}{2}$ en la expresión de la potencia promedio, ecuación (2.21). Para deshacerse de este factor, los ingenieros eléctricos utilizan *valores efectivos, eficaces* o valores RMS -siglas del inglés que significan[2] "raíz cuadrada del valor medio del cuadrado"- y que para una señal sinusoidal, su valor correspondiente es

$$i(t)\Big|_{\text{rms}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \qquad\qquad v(t)\Big|_{\text{rms}} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \tag{2.24}$$

entonces, como $V_m = RI_m$, se tiene (véase (2.21)).

$$P = RI_{rms}^2 \qquad\qquad P = \frac{V_{rms}^2}{R} \tag{2.25}$$

ecuaciones idénticas para el caso de la corriente directa.

2.4.3. Potencia en el circuito eléctrico de un puerto

Considere el generador G que alimenta al circuito eléctrico de un puerto, lineal e invariante en el tiempo η, como se muestra en la figura 2.9.

[2]Root Mean Square. $V_{eficaz} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_o}^{t_o+T} v^2(t)\mathrm{d}t}$

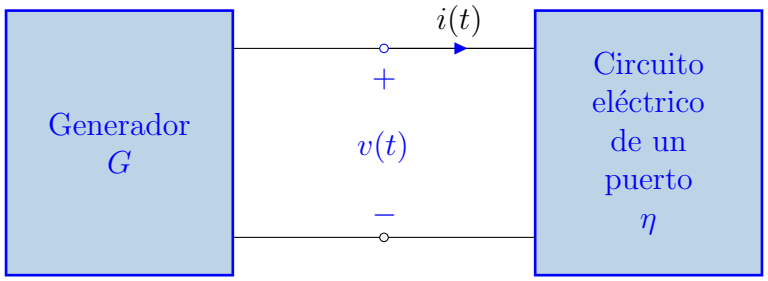

Figura 2.9: El generador G alimenta, en estado sinusoidal permanente, al circuito eléctrico de un puerto, η.

Suponga que el circuito eléctrico se encuentra en el estado sinusoidal permanente. Sean $\boldsymbol{V}$ e $\boldsymbol{I}$ los fasores asociados a las variables de puerto $v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta + \phi)$ e $i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta)$. La potencia instantánea que entrega el generador G al circuito eléctrico de un puerto η, en el tiempo t, es

$$p(t) = v(t)i(t) = V_m \cos(\omega t + \theta + \phi)\, I_m \cos(\omega t + \theta)$$

ecuación que se puede escribir como

$$p(t) = v(t)i(t) = \frac{V_m\, I_m}{2}\Big[\cos(2\omega t + 2\theta + \phi) + \cos(\phi)\Big] \tag{2.26}$$

La corriente eléctrica $i(t)$, el voltaje $v(t)$, y la potencia instantánea $p(t)$ se esbozan en la figura 2.10.

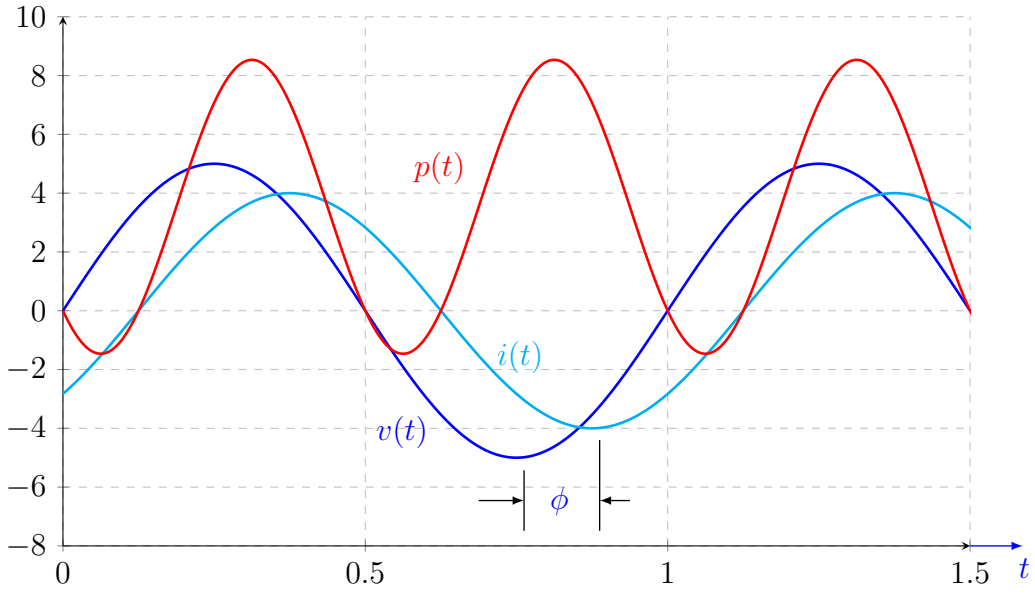

Figura 2.10: Gráficas del voltaje de puerto, $v(t)$, corriente eléctrica de puerto, $i(t)$ y la potencia instantánea, $p(t)$.

La potencia promedio se encuentra con la ecuación (2.20), por tanto

$$P = \frac{1}{2}V_m I_m \cos(\phi) = \frac{1}{2}V_m I_m \cos\,\phi = \frac{1}{2}V_m I_m Fp \tag{2.27}$$

De lo anterior, es posible dilucidar lo siguiente:

La potencia promedio depende no sólo de las *magnitudes* de las señales sinusoidales $v(t)$ e $i(t)$, sino también de su diferencia de fases $\measuredangle \boldsymbol{V} - \measuredangle \boldsymbol{I} = \phi$. El factor $\cos(\measuredangle \boldsymbol{V} - \measuredangle \boldsymbol{I}) = \cos\phi$ es de extrema importancia en ingeniería eléctrica y se denomina *factor de potencia*, Fp.

Por otra parte, como $\boldsymbol{V} = Z(j\omega)\boldsymbol{I}$, donde $Z(j\omega)$ es la impedancia en el punto en que opera η, se tiene

$$\measuredangle \boldsymbol{V} - \measuredangle \boldsymbol{I} = \measuredangle Z(j\omega) = \phi \tag{2.28}$$

2.4.4. Potencia compleja

Cuando el circuito eléctrico de un puerto, η está constituido sólo por resistencias (carga eléctrica resistiva *pura*), la corriente eléctrica se emplea totalmente en llevar la (energía) potencia del generador a dicha carga resistiva. Pero cuando la carga eléctrica está integrada tanto por resistencias como por *elementos reactivos*, una componente de la corriente eléctrica se destina para transportar la energía que periódicamente se almacena y descarga en la reactancia. Esta energía que se absorbe y libera alternativamente en el campo magnético de un inductor y el campo eléctrico de un capacitor, se adiciona a la corriente eléctrica en el circuito eléctrico , pero no se suma a la potencia promedio. Desde este punto de vista, la *potencia promedio* en un circuito eléctrico se denomina *potencia activa* y la potencia que suministra la energía a los elementos reactivos recibe el nombre de *potencia reactiva*; ésta se representa como jQ.

Para el circuito eléctrico de la figura 2.9, operando en el estado sinusoidal permanente, se define

$$S \triangleq P + jQ = \boldsymbol{V}\boldsymbol{I}^* \tag{2.29}$$

llamada la *potencia compleja* que suministra el generados G al circuito eléctrico de un puerto η. A su magnitud, $|S|$, se le nombra *potencia aparente*. Las unidades de ambas cantidades son $volt - amper \equiv [VA]$. Obviamente

$$S = \frac{V_m I_m}{2}\cos(\phi) + j\frac{V_m I_m}{2}\,\mathrm{sen}(\phi) \tag{2.30}$$

el primer término representa la potencia activa, sus unidades son $watts \equiv [W]$ y el segundo término constituye la potencia reactiva, con las unidades $volts\ ampers\ reactivos \equiv [VAR]$.

Cuando la corriente eléctrica se adelanta al voltaje, el factor de potencia se considera de adelanto. Asimismo, cuando la corriente eléctrica está atrasada con respecto al voltaje, el factor de potencia se dice que es atrasado. En nuestros hogares se recibe la energía eléctrica a través de las líneas de trasmisión a un V_m constante; esto es, el valor pico del voltaje suministrado no cambia. La potencia activa que se consume varía durante el día, dependiendo del número de aparatos eléctricos en uso en un momento dado. Así, la corriente eléctrica en las lineas se puede calcular con la siguiente ecuación.

$$I_m = \frac{2P}{V_m Fp} \tag{2.31}$$

Dado que la corriente eléctrica es inversamente proporcional al factor de potencia, mientras menor es el Fp, mayor es la cantidad de corriente eléctrica necesaria para satisfacer la demanda de potencia. Cuando el Fp es unitario, se tiene la mínima corriente eléctrica necesaria para proporcionar la potencia deseada. Esta es la situación deseable ya que las perdidas en las líneas de trasmisión, proporcionales al cuadrado de la corriente eléctrica de línea, son mínimas. En las aplicaciones industriales en las cuales la potencia se demanda a un factor de potencia bajo, se requiere llevar el factor de potencia cerca de la unidad para proporcionar la potencia solicitada con una corriente eléctrica menor y por lo tanto con menores perdida por línea.

La relación entre las potencias que se estudian puede enfatizarse mediante el triángulo de potencias que se muestra en la figura 2.11.

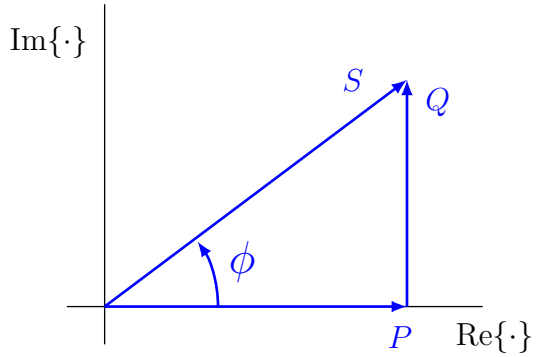

Figura 2.11: Un triángulo de potencias.

Formas alternativas para determinar a S, cuando

$$\boldsymbol{V} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}\angle(\theta+\phi) \qquad \boldsymbol{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}\angle\theta \qquad \Longrightarrow \ \boldsymbol{I}^* = \frac{I_m}{\sqrt{2}}\angle -\theta$$

dado que

$$S = \boldsymbol{V}\boldsymbol{I}^* = \frac{V_m}{\sqrt{2}}\angle(\theta+\phi)\frac{I_m}{\sqrt{2}}\angle -\theta = \frac{V_m I_m}{2}\angle\phi = |\,\boldsymbol{V}|\boldsymbol{I}|\angle\phi$$

y

$$Z(j\omega) = \frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{I}} = \frac{|\,\boldsymbol{V}|}{|\boldsymbol{I}|}\angle\phi = |Z(j\omega)|\angle Z(j\omega)$$

entonces

$$S = |\,\boldsymbol{V}|\boldsymbol{I}|\angle\phi = |\boldsymbol{I}|^2\frac{|\,\boldsymbol{V}|}{|\boldsymbol{I}|}\angle\phi = |\boldsymbol{I}|^2 Z(j\omega) = |\boldsymbol{I}|^2 R + j|\boldsymbol{I}|^2 X(j\omega) \tag{2.32}$$

también

$$\begin{aligned} S = |\boldsymbol{I}|^2 Z(j\omega) &= \frac{|\,\boldsymbol{V}|^2}{|Z(j\omega)|^2}Z(j\omega) = \frac{|\,\boldsymbol{V}|^2}{R^2 + X(j\omega)^2}\big(R + jX(j\omega)\big) \\ &= \frac{|\,\boldsymbol{V}|^2}{R^2 + X(j\omega)^2}R + j\frac{|\,\boldsymbol{V}|^2}{R^2 + X(j\omega)^2}X(j\omega) \end{aligned} \tag{2.33}$$

En el mismo orden de ideas, cuando la impedancia en el circuito eléctrico η es predominantemente *resistiva-inductiva* la relación entre la potencia compleja, activa y reactiva se muestra en la figura 2.12. Como se puede apreciar tanto la potencia activa como la reactiva son positivas.

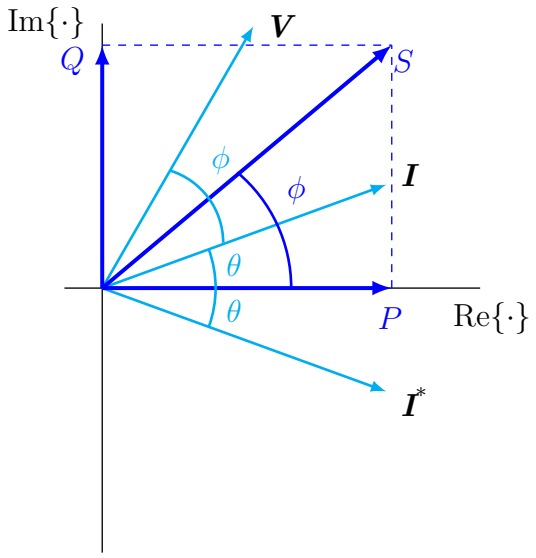

Figura 2.12: Carga eléctrica resistiva-inductiva.

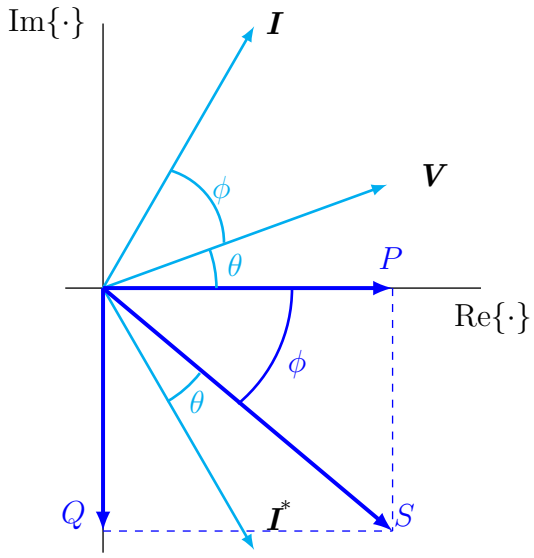

Figura 2.13: Carga eléctrica resistiva-capacitiva.

Empero, cuando la impedancia en el circuito eléctrico η es predominantemente *resistiva-capacitiva*, la potencia activa es positiva (como debe ser) y la potencia reactiva es negativa; como se visualiza en la figura 2.13. Se ha acordado que en lugar de considerar que el consumo de potencia reactiva en un capacitor es negativo, se estima o se dice que el capacitor *genera o produce* potencia reactiva.

2.4.5. Corrección del factor de potencia

Como se mencionó, las compañías generadoras de energía requieren que el factor de potencia sea igual a la unidad, para proporcionar una cantidad de potencia requerida con corrientes mínimas y por consiguiente con menor pérdida en las líneas de distribución.

Cuando la impedancia de la carga eléctrica es únicamente resistiva el factor de potencia es igual a la unidad, $\phi = 0°$, mientras que cuando es reactiva pura el factor de potencia es igual a cero, $\phi = \pm 90°$. En el caso general cuando la impedancia de la carga eléctrica es de la forma

$$Z(j\omega) = R + jX(j\omega)$$

el factor de potencia se puede variar, si se modifica la impedancia de la carga eléctrica. Lo anterior se logra al conectar en paralelo otra impedancia $Z_m(j\omega)$, como se muestra en la figura 2.14, que satisfaga las siguientes condiciones

- Primero: Z_m no debe consumir potencia activa.
- Segundo: Z_m con Z debe satisfacer el factor de potencia que se desea.

La primera condición implica que Z_m sea unicamente reactiva, esto es

$$Z_m = jX_m \tag{2.34}$$

La segunda condición requiere que

$$Fp_{deseado} = \cos\left[\arctan\left(\frac{Im\{Z_{eq}\}}{Re\{Z_{eq}\}}\right)\right] \tag{2.35}$$

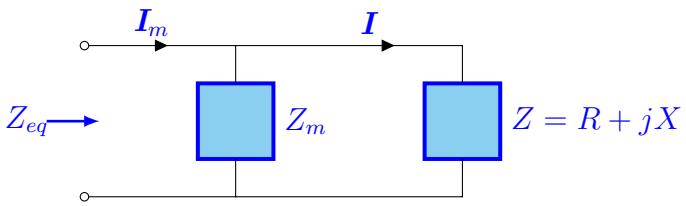

Figura 2.14: Circuito eléctrico para corregir el factor de potencia.

y dado que

$$Z_{eq} = \frac{ZZ_m}{Z + Z_m} = X_m \frac{RX_m + j(R^2 + XX_m + X^2)}{R^2 + (X + X_m)^2}$$

El argumento de la impedancia equivalente es

$$\measuredangle Z_{eq} = \arctan\left[\frac{R^2 + XX_m + X^2}{RX_m}\right]$$

como el factor de potencia está dado por

$$F_p = \cos\left[\arctan\left[\frac{R^2 + XX_m + X^2}{RX_m}\right]\right]$$

así

$$\arccos\left(F_p\right) = \arctan\left[\frac{R^2 + XX_m + X^2}{RX_m}\right]$$

ahora

$$\tan\left[\arccos\left(F_p\right)\right] = \frac{R^2 + XX_m + X^2}{RX_m}$$

por lo que

$$X_m = \frac{R^2 + X^2}{R\ \tan\left[\arccos(Fp_{deseado})\right] - X} \tag{2.36}$$

con $\tan(\arccos(Fp)) > 0$ si el Fp es de atrasado y $\tan(\arccos(Fp)) < 0$ si el Fp es de adelantado.

Ejemplo 2.2 Un generador eléctrico alimenta a una soldadora eléctrica, a un calentador eléctrico y a un motor de inducción, como se observa en la figura 2.15. Se emplea un capacitor para suministrar la potencia reactiva que requieren la soldadora eléctrica y el motor de inducción, y permitir que el generador eléctrico opere a un *factor de ponencia unitario*. Encuentre la potencia activa que suministra el generador eléctrico y la potencia reactiva que debe suministrar el capacitor. Si no se utiliza el capacitor, ¿qué potencia aparente tendría que ser proporcionada suministrada por el generador eléctrico? El voltaje del generador eléctrico es de $120[\text{V}]_{rms}$ con una frecuencia de 60 [Hz].

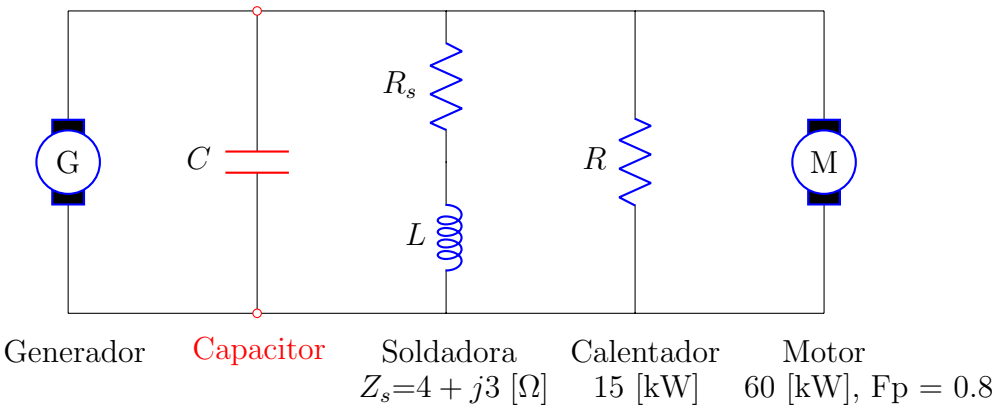

Figura 2.15: Circuito eléctrico.

2.5. Circuitos trifásicos

Hasta ahora se han considerado redes eléctricas con sólo un par de terminales que entran o que salen de ella. A continuación se estudian otro tipo de redes eléctricas, de igual importancia práctica, con tres o cuatro terminales que entran o salen de la misma. Se conocen como *circuitos eléctricos de tres fases* o *circuitos trifasicos*, y que generalmente se emplean en la transmisión de potencia. Por supuesto que son más complicadas que las redes eléctrica de dos terminales. Sin embargo, la mayoría de los sistemas trifásicos son aproximadamente balanceados, y si un sistema se puede considerar balanceado la simplicidad en su análisis resulta ser notable.

Un sistema trifásico es un sistema en el que los voltajes generados son iguales en magnitud y frecuencia pero que difieren por un tercio en el ciclo de tiempo lo que corresponde a 120° en el ángulo de la fase. Cuando estos voltajes balanceados se aplican a impedancias iguales, resultan corrientes eléctricas balanceadas. Y si un sistema está balanceado se puede analizar considerando sólo una de las tres fases; sin importar que tan complicadas sean las plantas generadoras, las redes eléctricas de transmisión o los centros de consumo.

A manera de introducción, se mencionan brevemente las causas por las que la mayoría de las redes eléctricas de transmisión en el mundo son de hecho sistemas trifásicos de corriente eléctrica alterna.

En primer, lugar se prefiere la corriente eléctrica alterna a la corriente eléctrica directa porque sus voltajes se pueden modificar por medio de transformadores. Esto permite una transmisión y distribución más económica y conveniente. La frecuencia de 60 ciclos por segundo es consecuencia del coste-beneficio entre la economía de la maquinaria a altas frecuencias y el decremento de la reactancia de transmisión a bajas frecuencias.

Se prefiere la operación trifásica a la operación monofásica debido a que los devanados trifásicos hacen un uso más eficiente del hierro y cobre del generador eléctrico y porque el flujo de potencia eléctrica en los sistemas trifásicos es regular y estable antes que pulsante. Los motores trifásicos arrancan en forma más conveniente y tienen un par constante, su velocidad es más satisfactoria que la de los motores monofásicos. Los grandes generadores eléctricos monofásicos, debido a que la potencia eléctrica es pulsante, vibran mucho y son muy ruidosos. La potencia trifásica se puede modificar por medio de transformadores apropiados a potencia de cualquier otro número de fases

diferente; lo que no ocurre con la potencia eléctrica monofásica, pues al ser pulsante, no puede suministrar una potencia uniforme mediante simple transformación.

Los sistemas trifásicos son en general, un poco más económicos que otros sistemas polifásicos. Las complicaciones de fases adicionales no compensa el leve incremento en la eficiencia de operación.

En la figura 2.16 se muestran las *tensiones* o voltajes de un generador eléctrico trifásico. Donde es de notar que la suma de tales tensiones en todo tiempo es nula.

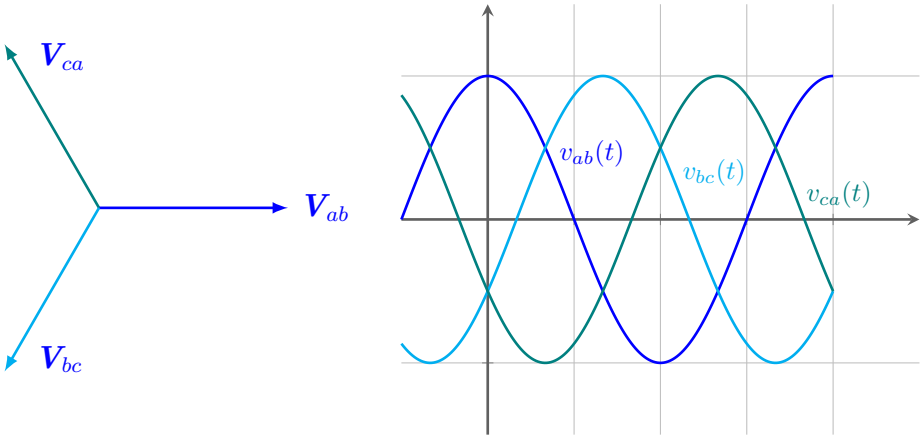

Figura 2.16: Tensiones trifásicas de secuencia de fase positiva.

Esta tensiones alcanzan su máximo valor en el orden que se muestra en la figura 2.16, es decir $v_{ab}(t)$, $v_{bc}(t)$, $v_{ca}(t)$, $v_{ab}(t)$, $v_{bc}(t)$, ..., se designan *tensiones de línea* y corresponden a la diferencia de potencial entre cada par de fases. A esta sucesión se le denomina *secuencia de fase positiva*. Si los voltajes tuvieran otro orden se considera *secuencia de fase negativa*.

Por otro lado, se llaman *tensiones de fase* o *tensiones al neutro*, a los voltajes entre cualquiera de las fases y el neutro. Veamos cual es la relación entre las tensones de línea y las tensiones de fase.

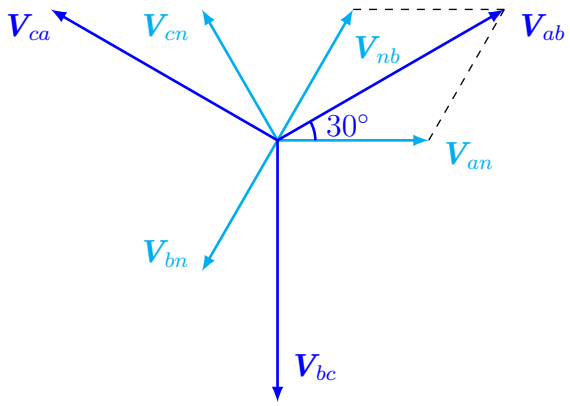

Figura 2.17: Diagrama fasorial de voltajes de línea y voltajes de fase.

Si $\boldsymbol{V}_{an} = \dfrac{V_m}{\sqrt{2}}\angle 0°$, $\boldsymbol{V}_{bn} = \dfrac{V_m}{\sqrt{2}}\angle -120°$ y $\boldsymbol{V}_{cn} = \dfrac{V_m}{\sqrt{2}}\angle 120°$. Y dado que

$$\boldsymbol{V}_{ab} = \boldsymbol{V}_{an} - \boldsymbol{V}_{bn} = \boldsymbol{V}_{an} + \boldsymbol{V}_{nb}$$

entonces

$$\boldsymbol{V}_{ab} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}\angle 0° + \frac{V_m}{\sqrt{2}}\angle 60° = \frac{V_m}{\sqrt{2}}\left[\cos(0°) + j\ \text{sen}(0°) + \cos(60°) + j\ \text{sen}(60°)\right]$$

$$\boldsymbol{V}_{ab} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}\left[1 + j0 + \frac{1}{2} + j\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = \frac{V_m}{\sqrt{2}}\left[\frac{3}{2} + j\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = \frac{V_m}{\sqrt{2}}\sqrt{3}\angle 30° = \sqrt{3}\ \boldsymbol{V}_{an}\angle 30°$$

lo que equivale a decir que *la tensión de línea* $\boldsymbol{V}_{ab}$ es $\sqrt{3}$ *la tensión de fase* $\boldsymbol{V}_{ab}$ y está adelantada $30°$ con respecto a ella. Este resultado se puede apreciar gráficamente en la figura 2.17. Procediendo de manera similar, se tiene

$$\boldsymbol{V}_{bc} = \sqrt{3}\ \boldsymbol{V}_{bn}\angle 30° \qquad \boldsymbol{V}_{ca} = \sqrt{3}\ \boldsymbol{V}_{cn}\angle 30°$$

Ahora, se determina la correspondencia entre las *corrientes eléctricas de línea* $\boldsymbol{I}_a$, $\boldsymbol{I}_b$, e $\boldsymbol{I}c$ y las *corrientes eléctricas de fase* $\boldsymbol{I}_{ab}$, $\boldsymbol{I}_{bc}$ e $\boldsymbol{I}_{ca}$ para una carga eléctrica conectada en *delta*, la cual se observa en la figura 2.18 y en la que sin perder generalidad, con fines de simplicidad únicamente, se considera que la carga eléctrica trifásica es resistiva.

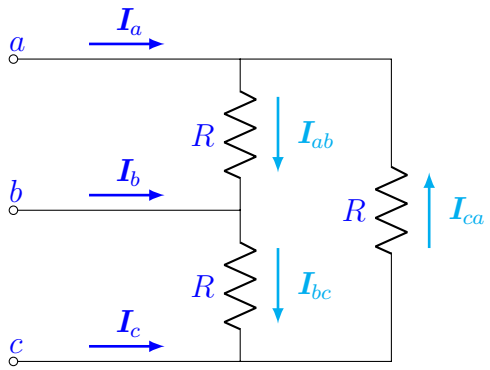

Figura 2.18: Corrientes de línea y corrientes de fase.

En la figura 2.19 se visualizan los pasos realizados para encontrar las relaciones deseadas. Si las corrientes eléctricas de fase son $\boldsymbol{I}_{ab} = \dfrac{I_m}{\sqrt{2}}\angle 0°$, $\boldsymbol{I}_{bc} = \dfrac{I_m}{\sqrt{2}}\angle -120°$ e $\boldsymbol{I}_{ca} = \dfrac{I_m}{\sqrt{2}}\angle 120°$, de la ley de corrientes de Kirchhoff (LCK), se tiene que la corriente de línea $\boldsymbol{I}_a$ es

$$\boldsymbol{I}_a = \boldsymbol{I}_{ab} - \boldsymbol{I}_{ca} = \boldsymbol{I}_{ab} + \boldsymbol{I}_{ac}$$

entonces

$$\boldsymbol{I}_a = \frac{I_m}{\sqrt{2}}\angle 0° + \frac{I_m}{\sqrt{2}}\angle -60° = \frac{I_m}{\sqrt{2}}\left[\cos(0°) + j\ \text{sen}(0°) + \cos(-60°) + j\ \text{sen}(-60°)\right]$$

$$\boldsymbol{I}_a = \frac{I_m}{\sqrt{2}}\left[1 + j0 + \frac{1}{2} - j\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = \frac{I_m}{\sqrt{2}}\left[\frac{3}{2} - j\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = \frac{I_m}{\sqrt{2}}\sqrt{3}\angle -30° = \sqrt{3}\,\boldsymbol{I}_{an}\angle -30°$$

Procediendo de igual manera, las otras corrientes de línea son

$$\boldsymbol{I}_b = \sqrt{3}\,\boldsymbol{I}_{bc}\angle -30^\circ \qquad \boldsymbol{I}_c = \sqrt{3}\,\boldsymbol{I}_{ca}\angle -30^\circ$$

En la figura 2.19 se muestran los fasores correspondientes a las corrientes eléctricas de línea y las corrientes eléctricas de fase para un sistema trifásico de secuencia de fase positiva.

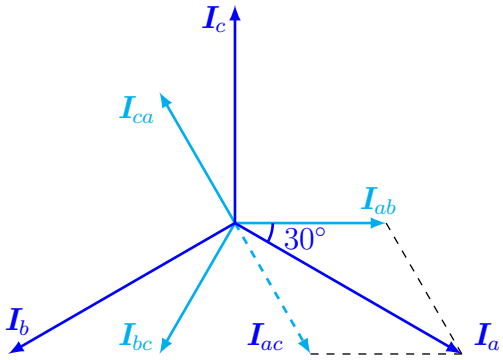

Figura 2.19: Diagrama fasorial de las corrientes eléctricas de línea y las corrientes eléctricas de fase.

Cabe señalar que si las impedancias de una carga balanceada no son resistivas puras, las corrientes eléctricas de fase y por consiguiente las corrientes eléctricas de línea también son balanceadas, pero con un desplazamiento angular de atraso cuando la *reactancia* es inductiva o un desplazamiento angular de adelanto si la *reactancia* es capacitiva.

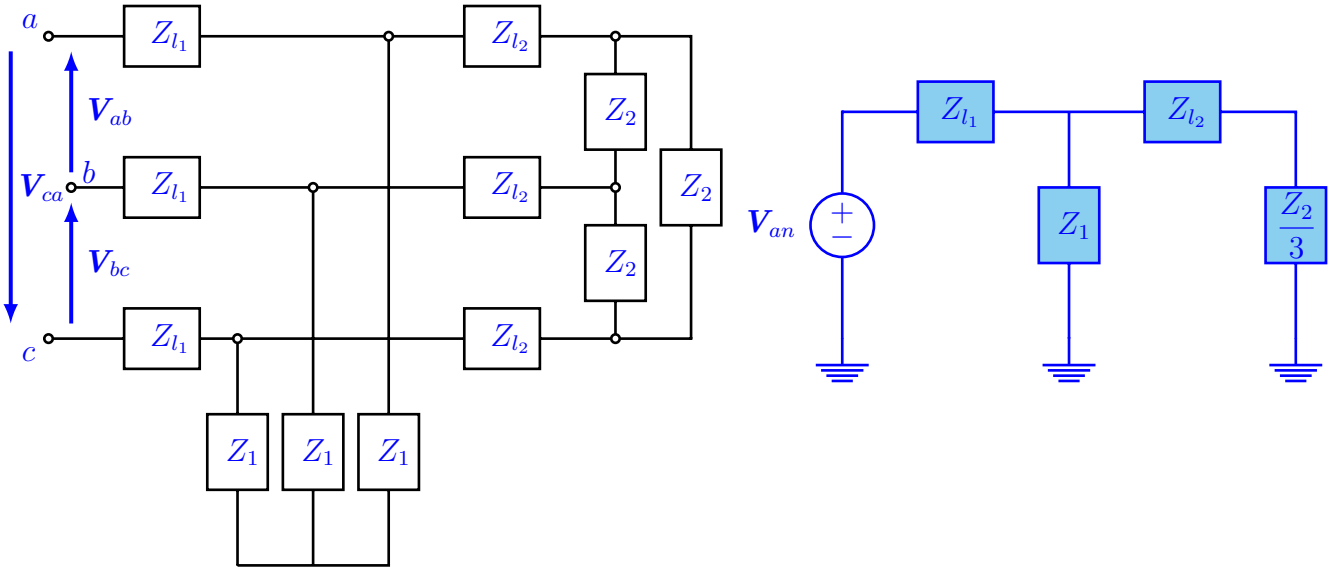

Figura 2.20: Diagrama trifilar y su diagrama unifilar asociado.

En otro orden de ideas, es importante señalar que cuando la carga trifásica es balanceada no es necesario analizar todo el circuito trifásico, basta considerar una sola fase, ya que las corrientes de las otras fases tienen la misma magnitud pero con un desfase de ±120°, respectivamente. El

circuito eléctrico asociado a una sola fase recibe el nombre de *diagrama unifilar*.

En la figura 2.20, se muestra un *diagrama trifilar* y su diagrama unifilar asociado, en donde la fase de referencia es la correspondiente a $\boldsymbol{V}_{an}$. Si la carga trifásica balanceada está conectada en estrella, su impedancia Z en el diagrama unifilar es la propia de cada rama de la estrella. Empero, si la carga trifásica balanceada está conectada en delta, su impedancia Z en el diagrama unifilar es un tercio de la propia de cada rama de la delta.

Con la finalidad de esclarecer algunas ideas, consideremos lo siguiente:

La potencia activa en una fase de una carga eléctrica balaneada conectada en esrella es

$$P_{\phi} = |\,\boldsymbol{V}_{an}||\boldsymbol{I}_{a}|\,Fp$$

donde Fp es el coseno del ángulo de desfase entre el voltaje de fase y la corriente eléctrica de línea, que corresponde al ángulo del argumento de la impedancia de la carga eléctrica. La potencia activa total es, obviamente, tres veces la potencia activa de una fase, es decir

$$P_{3\phi} = 3P_{\phi} = 3|\,\boldsymbol{V}_{an}||\boldsymbol{I}_{a}|\,Fp$$

pero se sabe que $|\,\boldsymbol{V}_{ab}| = \sqrt{3}|\,\boldsymbol{V}_{an}|$. por lo que

$$P_{3\phi} = 3\frac{|\,\boldsymbol{V}_{ab}|}{\sqrt{3}}|\boldsymbol{I}_{a}|\,Fp = \sqrt{3}|\,\boldsymbol{V}_{ab}||\boldsymbol{I}_{a}|\,Fp$$

De la misma manera, la potencia activa de una fase de una carga eléctrica balanceada conectada en delta es

$$P_{\phi} = |\,\boldsymbol{V}_{ab}||\boldsymbol{I}_{ab}|\,Fp$$

donde Fp es el coseno del ángulo de desfase entre el voltaje de línea y la corriente eléctrica de fase, que corresponde al ángulo del argumento de la impedancia de la carga eléctrica. La potencia activa total es, obviamente, tres veces la potencia activa de una fase, es decir

$$P_{3\phi} = 3P_{\phi} = 3|\,\boldsymbol{V}_{ab}||\boldsymbol{I}_{ab}|\,Fp$$

pero se sabe que $|\boldsymbol{I}_{a}| = \sqrt{3}|\boldsymbol{I}_{ab}|$. por lo que

$$P_{3\phi} = 3|\,\boldsymbol{V}_{ab}|\frac{|\boldsymbol{I}_{a}|}{\sqrt{3}}\,Fp = \sqrt{3}|\,\boldsymbol{V}_{ab}||\boldsymbol{I}_{a}|\,Fp$$

como era de esperar, para una misma carga eléctrica, ambas expresiones son idénticas, al tener en cuenta la transformación delta a estrella o viceversa.

Ejemplo 2.3 En el sistema eléctrico que se exhibe en la figura 2.21, encuentre las corrientes eléctricas de línea $\boldsymbol{I}_{a}$, $\boldsymbol{I}_{b}$ e $\boldsymbol{I}_{c}$. Considere una secuencia de fase positiva y $\boldsymbol{V}_{ab} = 400\angle 0°$ [V]. 1HP = 746[W]. Si

a) El interruptor S está cerrado.

b) El interruptor S está abierto.

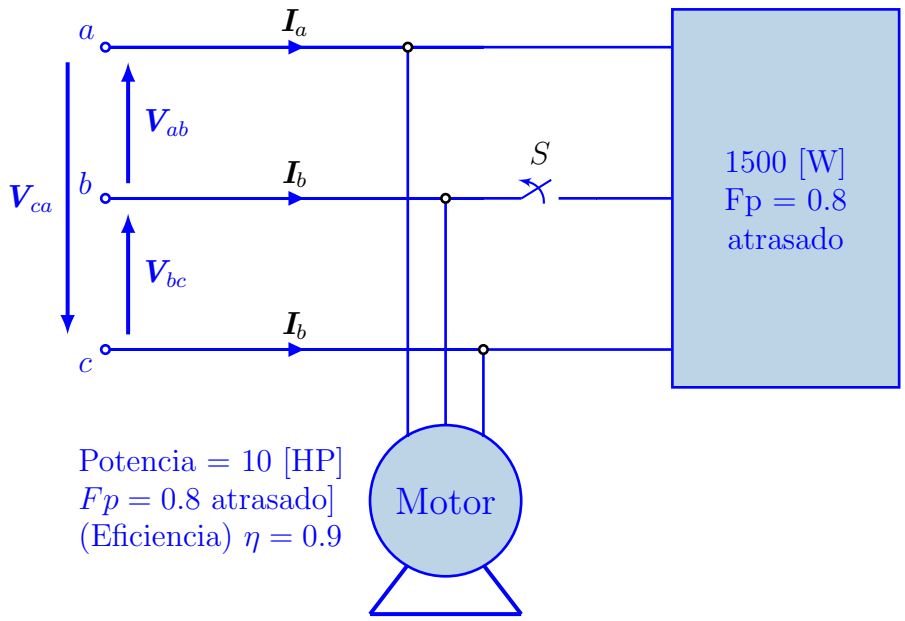

Figura 2.21: Red eléctrica trifásica.

2.5.1. Método de los dos wattmetros

A continuación se muestra que con este método es viable determinar la potencia total trifásica.

Sea una carga eléctrica trifásica conectada en delta, la potencia total es entonces

$$S_{3\phi} = \boldsymbol{V}_{ab}\boldsymbol{I}_{ab}^{*} + \boldsymbol{V}_{bc}\boldsymbol{I}_{bc}^{*} + \boldsymbol{V}_{ca}\boldsymbol{I}_{ca}^{*} \tag{2.37}$$

al mismo tiempo

$$\begin{aligned} \boldsymbol{I}_a + \boldsymbol{I}_{ca} = \boldsymbol{I}_{ab} \quad &\Longrightarrow \quad \boldsymbol{I}_a = \boldsymbol{I}_{ab} - \boldsymbol{I}_{ca} \\ \boldsymbol{I}_b + \boldsymbol{I}_{ab} = \boldsymbol{I}_{bc} \quad &\Longrightarrow \quad \boldsymbol{I}_b = \boldsymbol{I}_{bc} - \boldsymbol{I}_{ab} \\ \boldsymbol{I}_c + \boldsymbol{I}_{bc} = \boldsymbol{I}_{ab} \quad &\Longrightarrow \quad \boldsymbol{I}_c = \boldsymbol{I}_{ca} - \boldsymbol{I}_{bc} \end{aligned} \tag{2.38}$$

de la ecuación (2.38)

$$\boldsymbol{I}_a + \boldsymbol{I}_b + \boldsymbol{I}_c = 0 \tag{2.39}$$

Regresando a la ecuación (2.37)

$$S_{3\phi} = \big(\boldsymbol{V}_{an} - \boldsymbol{V}_{bn}\big)\boldsymbol{I}_{ab}^{*} + \big(\boldsymbol{V}_{bn} - \boldsymbol{V}_{cn}\big)\boldsymbol{I}_{bc}^{*} + \big(\boldsymbol{V}_{cn} - \boldsymbol{V}_{an}\big)\boldsymbol{I}_{ca}^{*} \tag{2.40}$$

factorizando

$$S_{3\phi} = \boldsymbol{V}_{an}\big(\boldsymbol{I}_{ab}^{*} - \boldsymbol{I}_{ca}^{*}\big) + \boldsymbol{V}_{bn}\big(\boldsymbol{I}_{bc}^{*} - \boldsymbol{I}_{ab}^{*}\big) + \boldsymbol{V}_{cn}\big(\boldsymbol{I}_{ca}^{*} - \boldsymbol{I}_{bc}^{*}\big) \tag{2.41}$$

con la ecuación (2.38)

$$S_{3\phi} = \boldsymbol{V}_{an}\boldsymbol{I}_a^{*} + \boldsymbol{V}_{bn}\boldsymbol{I}_b^{*} + \boldsymbol{V}_{cn}\boldsymbol{I}_c^{*} \tag{2.42}$$

de la ecuación (2.39)

$$\boldsymbol{I}_b = -\boldsymbol{I}_a - \boldsymbol{I}_c \tag{2.43}$$

sustituyendo la ecuación anterior en la (2.42)

$$\begin{aligned} S_{3\phi} &= \boldsymbol{V}_{an}\boldsymbol{I}_a^{*} + \boldsymbol{V}_{bn}\big(-\boldsymbol{I}_a^{*} - \boldsymbol{I}_c^{*}\big) + \boldsymbol{V}_{cn}\boldsymbol{I}_c^{*} \\ S_{3\phi} &= \big(\boldsymbol{V}_{an} - \boldsymbol{V}_{bn}\big)\boldsymbol{I}_a^{*} + \big(\boldsymbol{V}_{cn} - \boldsymbol{V}_{bn}\big)\boldsymbol{I}_c^{*} \\ S_{3\phi} &= \boldsymbol{V}_{ab}\boldsymbol{I}_a^{*} + \boldsymbol{V}_{cb}\boldsymbol{I}_c^{*} \end{aligned} \tag{2.44}$$

Como comentario final, se debe enfatizar que la suma de las lecturas de los dos wattmetros proporciona la potencia promedio o activa que consume la carga eléctrica trifásica.

2.6. Superposición y potencia

A continuación se lleva a cabo un análisis de la potencia eléctrica en redes eléctricas con dos o más fuentes independientes. Como ejemplo, considere el circuito eléctrico de la figura 2.21. Este circuito eléctrico es lineal y por consiguiente la corriente eléctrica $i(t)$ que circula a través del resistor R es, aplicando superposición

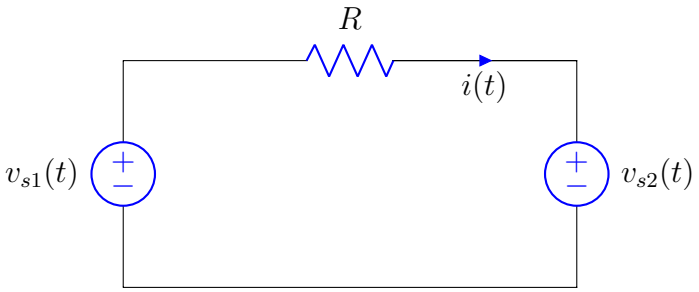

Figura 2.22: Circuito eléctrico lineal con dos fuentes independientes de voltaje.

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

donde $i_1(t)$ e $i_2(t)$ son, respectivamente, las corrientes ocasionadas por $v_{s1}(t)$ y $v_{s2}(t)$ cuando actúan por separado. De este modo la potencia instantánea es

$$\begin{aligned} p(t) &= Ri(t)^2 = R\big[i_1(t) + i_2(t)\big]^2 \\ &= Ri_1(t)^2 + Ri_2(t)^2 + 2Ri_1(t)i_2(t) \end{aligned}$$

los dos primeros elementos de la ecuación anterior son las potencias instantáneas debidas a $v_{s1}(t)$ y $v_{s2}(t)$ cuando actúan por separado. Esto es

$$p_1(t) = Ri_1(t)^2 \qquad y \qquad p_2(t) = Ri_2(t)^2$$

En general $2Ri_1(t)i_2(t) \neq 0$, y por consiguiente $p(t) \neq p_1(t) + p_2(t)$, por lo que es necesario prestar atención si se recurre al principio de superposición para encontrar la potencia instantánea.

Cuando las variables eléctricas son periódicas con periodo T, la potencia promedio o activa está definida por

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\mathrm{d}t$$

así

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T \big[p_1(t) + p_2(t) + 2Ri_1(t)i_2(t)\big]\mathrm{d}t$$

$$P = P_1 + P_2 + \frac{2R}{T}\int_0^T i_1(t)i_2(t)\mathrm{d}t$$

los dos primeros elementos de la ecuación anterior son las potencias activas debidas a $v_{s1}(t)$ y $v_{s2}(t)$ cuando actúan por separado. Si

$$\frac{2R}{T}\int_0^T i_1(t)i_2(t)\mathrm{d}t = 0$$

entonces, es posible aplicar el principio de superposición ya que $P = P_1 + P_2$.

Esta condición se cumple cuando la corriente eléctrica $i(t)$ está compuesta de sinusoides de diferente frecuencia. Lo anterior equivale a decir que las corrientes eléctricas son *funciones ortogonales* en el intervalo de $t = t_1$ a $t = t_1 + kT$ donde k es un entero. Esto es, si

$$i_1(t) = I_{m1}\cos(m\omega t + \theta_1)$$
$$i_2(t) = I_{m2}\cos(n\omega t + \theta_2)$$

se tiene

$$\int_0^T i_1(t)i_2(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} \dfrac{I_{m1}I_{m2}\pi\cos\left(\phi_1 - \phi_2\right)}{\omega}, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

Por tanto, si $m = n$, el principio de superposición no se aplica. Pero cundo $m \neq n$ se puede recurrir al principio de superposición. Este resultado se puede generalizar al caso de una sinusoide periódica con cualquier número de sinusoides de diferentes frecuencias. *La potencia promedio debida a la suma de sinusoides de diferente frecuencia es la suma de las potencias promedio ocasionadas por cada una de las sinusoides actuando por separado.*