# PRACTICA No 1

## ANALISIS DE DATOS EXPERIMENTALES

### INTRODUCCION

Todo proceso de medición involucra de una u otra forma un instrumento como un medio físico para determinar la magnitud de una cantidad o una variable.

La exactitud de una medición depende de diversos factores tales como la habilidad del experimentador, las características del instrumento de medición, las condiciones ambientales, etc. Cada uno de estos factores influye de manera distinta y cambiante sobre los procesos de medición, de manera que siempre se observará discrepancia entre dos medidas del mismo valor de la variable aún cuando se hayan tomado sucesivamente.

Dicha discrepancia entre el valor obtenido y el valor real de la variable (error de medida) obedece a diversas causas que es conveniente identificar para conocer su efecto y definir las acciones que puedan contrarrestarlo.

El proceso de medición emplea una serie de términos los cuales se definirán algunos de ellos.

*Instrumento:* Es un dispositivo para medir el valor o magnitud de una cantidad o variable.

*Exactitud:* Es la cercanía con la cual la lectura de un instrumento se aproxima al valor verdadero de la variable que está siendo medida.

*Precisión:* Es una medida de la repetibilidad de las mediciones, esto es, es una medida del grado con el cual mediciones sucesivas difieren unas de otras.

*Sensibilidad:* Es la relación de la señal de salida o respuesta del instrumento con respecto al cambio de entrada o variable medida.

*Resolución:* Es el cambio mínimo del valor medido al cual el instrumento responde.

*Error:* Es la diferencia entre el valor medido y el valor verdadero de la variable.

### CLASIFICACION DE LOS ERRORES DE MEDIDA

Los errores de medida pueden clasificarse en dos grupos principales según se muestra en el cuadro siguiente:

ERRORES DE MEDIDA

- Errores Sistemáticos
  - Errores instrumentales
  - Errores ambientales
  - Errores del observador
  - Errores de máquina
- Errores aleatorios, accidentales o residuales

**Errores sistemáticos**

Los *errores instrumentales* son propios del instrumento y se presentan debido a su construcción, calibración o su operación. Por ejemplo, un mal diseño o construcción puede ocasionar variaciones en el entrehierro o una irregular tensión en el resorte, y en instrumentos con movimiento D'Arsonval son comunes este tipo de errores. Los errores de calibración dan como resultado una lectura mayor o menor al valor real debido a la incorrecta posición de la aguja en cero. Estos errores se pueden corregir mediante la correcta calibración del instrumento.

Los *errores ambientales* son debidos a condiciones externas, estas podrían ser los efectos de temperatura, presión barométrica, campos magnéticos, campos electrostáticos, humedad, suciedad, vibraciones y otras condiciones similares. Los métodos correctivos utilizados para eliminarlos, incluyen aire acondicionado, aislamiento, sellado hermético, etc, del sitio donde se realicen las mediciones.

Los *errores del observador* son errores que se registran cuando los datos son mal leídos por un observador e incluyen paralaje, divisiones anchas de la escala, etc.

La mayoría de los datos actuales son tomados por sistemas automáticos de lectura. Los errores que se involucran son llamados *errores de máquina*. Estos errores se deben a la incorrecta calibración y ajuste del sistema.

Los errores producidos por el equipo de reducción de datos son errores instrumentales si éstos son debidos a la construcción y calibración del instrumento; y serán ambientales si los errores son producidos como una reacción a condiciones externas cambiantes.

**Errores aleatorios**

Los *errores aleatorios* son debidos a causas desconocidas y existen aún cuando todos los medios conocidos de corrección han sido aplicados.

Para ilustrar mejor este tipo de errores supongamos que una corriente de 15 A se aplica a un instrumento y éste es leído a intervalos horarios. Se encuentra que las lecturas varían de hora a hora aunque la fuente de corriente es invariable y se sabe que es correcta, además de que el instrumento es operado bajo las mejores condiciones ambientales. Esta variación no puede ser corregida por calibración. Dichos errores no pueden ser previstos y evitados. Las variaciones de estas lecturas deben ser analizadas por métodos estadísticos para obtener la mejor aproximación de la magnitud verdadera de la cantidad que está siendo medida.

Antes de enunciar el procedimiento estadístico que se aplica a los datos experimentales. conviene mencionar algunas de las definiciones y conceptos básicos.

**Media aritmética**
La mejor aproximación que puede hacerse de una cantidad a partir de un conjunto de lecturas es la media aritmética de los datos y el valor más probable se podría obtener a partir de un conjunto infinito de los mismos, esto es:

$$\bar{\bar{X}} = \sum \frac{x_i}{N}$$

**Desviación**
Esta es la variación de la lectura observada con respecto a la media aritmética del grupo de datos.

$$d = x_i - \bar{X}$$

La suma algebraica de las desviaciones es cero.

**Desviación promedio**
Se define como la suma de los valores absolutos de la desviación dividida por el número de lecturas.

$$D = \sum \frac{|d|}{N}$$

Esta cantidad es una indicación de la precisión del instrumento.

**Desviación Estándar**
Otro término fundamental en el análisis de errores aleatorios es la desviación estándar dada por la siguiente relación:

$$S' = \sqrt{\frac{\sum d^2}{N - 1}}$$

**Teoría Elemental de Muestreo**

Esta teoría es el estudio de la relación existente entre una población y las muestras obtenidas de ésta.

A las cantidades de la población se les llama parámetros ($\mu$, $\sigma$) y a las cantidades de la muestra se les llama estadísticos (X, S).

A las muestras de tamaño N tomadas de una población se les calculan los estadísticos con el propósito de obtener la distribución de cada estadístico. Estas distribuciones se conocen como *distribuciones muestrales*: distribución muestral de medias. distribución muestral de desviaciones típicas, de varianzas, etc.

De acuerdo a lo anterior, para la distribución de medias se tiene los estadísticos muestrales:

$\mu_{\bar{x}}$ – Media de la distribución de medias

$\sigma_{\bar{x}}$ – Desviación estándar de la distribución de medias

y para la distribución de desviaciones:

$\mu_S$ – Media de la distribución de desviaciones

$\sigma_S$ – Desviación estándar de la distribución de desviaciones

A partir de las distribuciones muestrales y sus estadísticos es posible estimar los parámetros de la población dentro de un cierto intervalo de confianza.

En el campo de medición e instrumentación, interesa tomar medidas exactas con la mayor precisión posible, es decir, lecturas de instrumentos más próximas al valor verdadero de la variable dentro del menor intervalo de imprecisión; en otras palabras, lecturas que nos permitan estimar la media poblacional $\mu$ (el valor verdadero de la variable) dentro del menor intervalo de valores con un alto nivel de confianza. Lo anterior puede ilustrarse de acuerdo a las gráficas de la figura 1.

La figura 1(a) corresponde a las lecturas de un medidor exacto ya que el promedio de ellas $\bar{X}$ es cercano a $\mu$; pero es impreciso dado que el intervalo de confianza es amplio, lo que significa que son frecuentes las medidas diferentes de $\mu$.

La figura 1(b) se refiere a un medidor inexacto pero preciso. Inexacto porque el promedio de lecturas $\bar{X}$ difiere mucho de $\mu$ , preciso porque el intervalo de confianza es estrecho, lo que determina que las medidas se centren alrededor de $\bar{X}$. Un medidor con estas características es de buena calidad y bastará con que se calibre cuidadosamente para remover el sesgo y aproximar $\bar{X}$ a $\mu$.

El medidor cuya distribución de lecturas aparece en 1(c) además de mostrar descalibración es impreciso.

Finalmente la distribución de lecturas en 1(d) es representativa de las características de exactitud y precisión deseables en todo medidor; el promedio de todas las lecturas $\bar{X}$ es muy próximo a $\mu$, con la posibilidad de estimarlo con un alto nivel de confianza en un pequeño intervalo de valores, dado que la dispersión es pequeña.

De esta forma, para determinar el valor verdadero de una variable se debe disponer de un conjunto de muestras de tamaño N y definir para ellas la

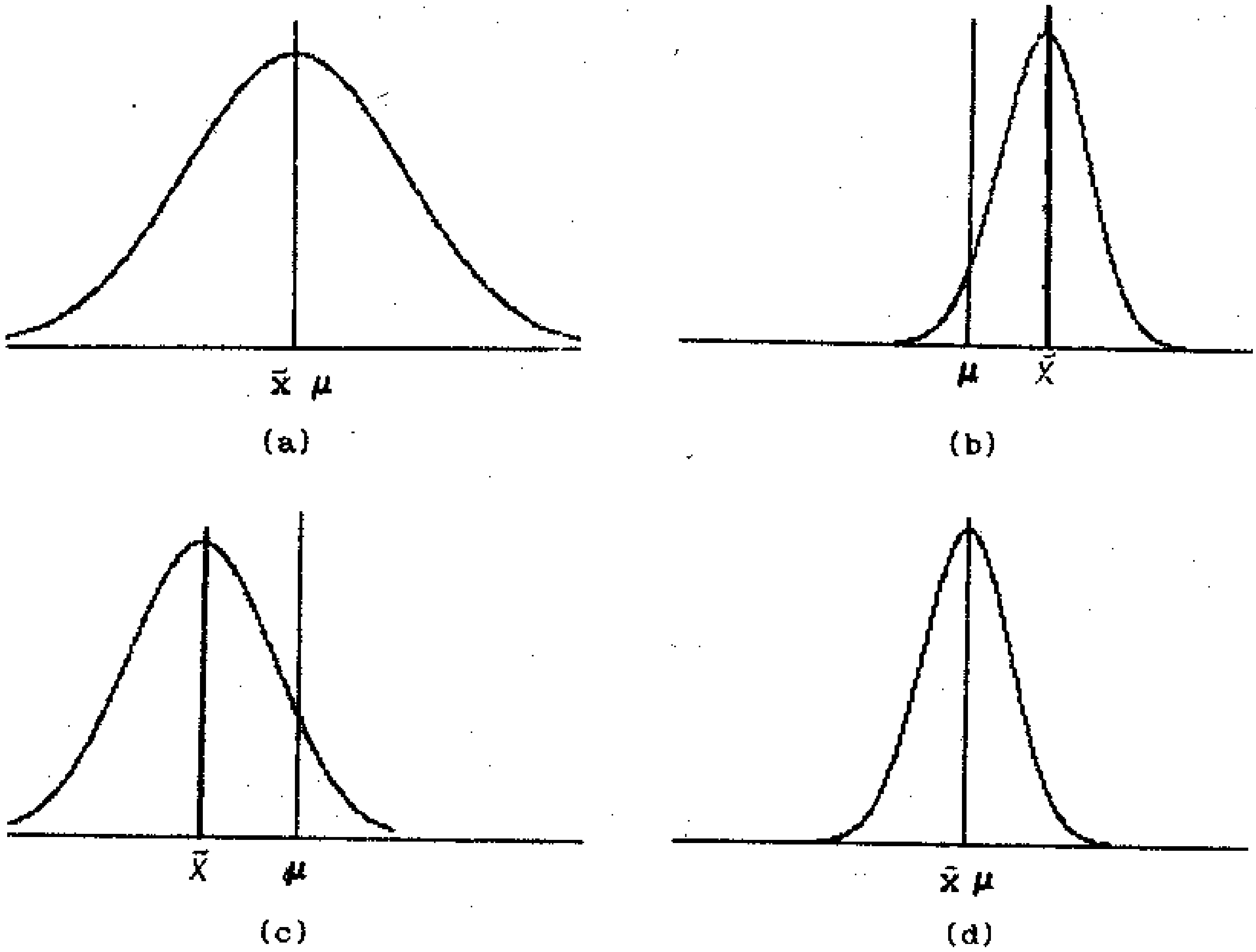


Figura 1

distribución muestral de las medias y sus estadísticos muestrales $\mu_{\bar{x}}$ y $\sigma_{\bar{X}}$. A partir de estos estadísticos se estima la media de la población en un cierto intervalo de confianza, esto es:

$$\bar{X} - Z_c\ \sigma_{\bar{X}} < \mu < \bar{X} + Z_c\ \sigma_{\bar{X}}$$

El intervalo de confianza se define de acuerdo al nivel de confianza deseado en la estimación. Así, por ejemplo, si se desea una estimación del 95% o 99% de confianza o probabilidad de certidumbre, los intervalos de confianza serán:

$$\bar{X} - 1.96\ \sigma_{\bar{X}} < \mu < \bar{X} + 1.96\ \sigma_{\bar{X}} \qquad (1-\alpha) = 0.95$$

$$\bar{X} - 2.58\ \sigma_{\bar{X}} < \mu < \bar{X} + 2.58\ \sigma_{\bar{X}} \qquad (1-\alpha) = 0.99$$

Al producto $Z_c \sigma_{\bar{X}}$ se le llama error probable o imprecisión y se denota por 'h'.

Por otro lado, con frecuencia nos encontramos con el hecho de que para estimar el valor de la variable disponemos solamente de una muestra de

tamaño N, por lo cual el estadístico $\sigma_{\bar{x}}$ no se conoce.
Este inconveniente es superado recordando que:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

y que $\sigma \cong S'$.

De esta forma la imprecisión (intervalo de confianza) en la estimación del valor de la variable queda definida por

$$h = Z_c\,\sigma_{\bar{x}} = Z_c\,\frac{\sigma}{\sqrt{N}} = Z_c\,\frac{S'}{\sqrt{N}}$$

donde

$S'$ - Desviación estándar no sesgada de la muestra
$N$ - Tamaño de la muestra
$Z_c$ - Es una constante que se obtiene de las tablas de distribución normal (o de la t-student si la muestra es pequeña[1] ) para el nivel de confianza deseado, como se muestra en la figura 2

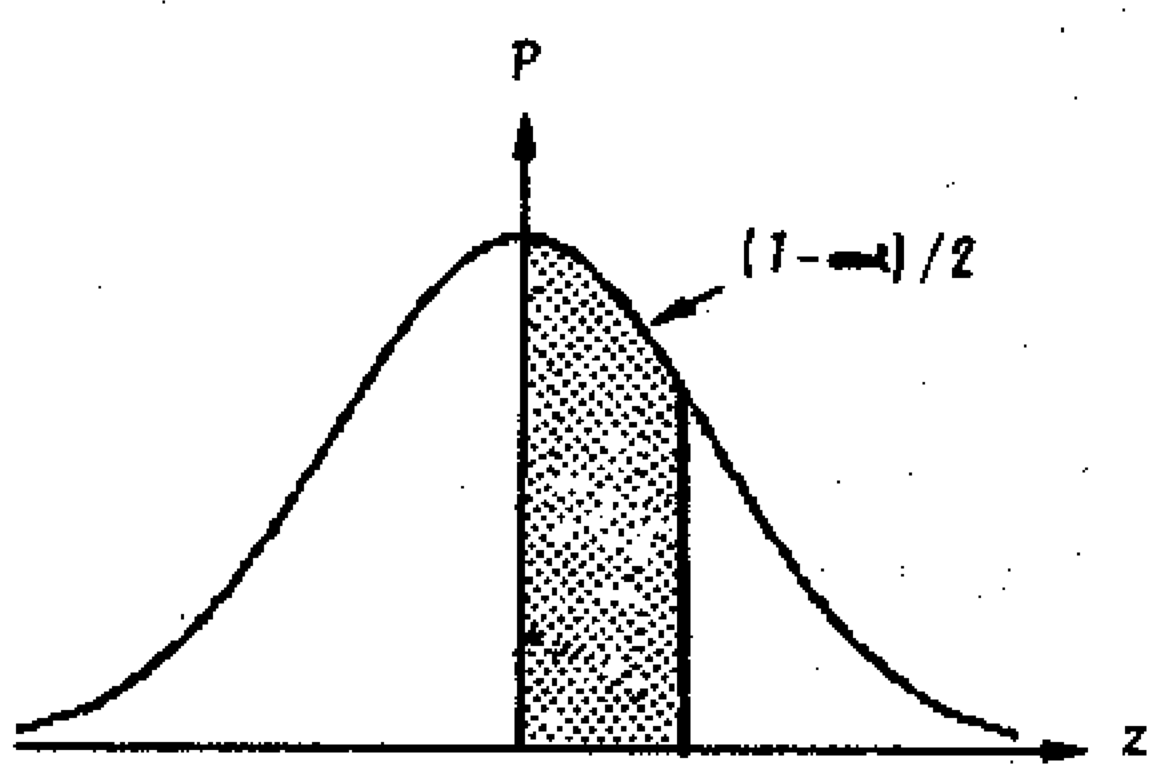


Figura 2.

Para determinar 'h'' con otro nivel de confianza a partir de uno conocido $h_1$ se aplica la siguiente relación:

$$h' = \frac{Z_c'}{Z_c}\,h_1$$

**Error Límite**

En la mayoría de los instrumentos indicadores, la imprecisión está garantizada para ser menor en un cierto porcentaje del valor de la escala máxima. Los componentes de un circuito, tales como inductancias,

[1] En el Apéndice A se presenta la tabla de probabilidad de la función normal.

capacitancias y resisistencias están garantizadas para estar dentro de un cierto porcentaje del valor especificado. Los límites de estas desviaciones a partir del valor especificado son definidos como *Error Límite*.

El error límite $q_e$ es un error máximo y de magnitud conocida

$$q = q_1 \pm q_e$$

siendo $q_1$ el valor medido en el instrumento.

En la mayoría de componentes el error límite es el especificado por la tolerancia.

**Cálculo del Error Límite en por ciento**

El error límite expresado en % es llamado clase exactitud del instrumento, es especificado con respecto al valor máximo de la escala y es garantía del fabricante que las mediciones están dentro de ese rango:

$$\%\, q_e = \frac{(x_i - \bar{X})_{max}}{\text{ESCALA}}\, 100 \qquad (1)$$

Esta relación también es utilizada para determinar el error en por ciento de cualquier lectura.

$$\%\, q_e = \frac{e}{q_1} \times 100 \qquad (2)$$

donde *e* es el error máximo medido y '$q_1$' es el valor medido.

**Ejemplo.** Un vóltmetro con escala de 0 a 150 V tiene una exactitud garantizada de 1% a plena escala ¿Cuál será el error límite en % que se comete al leer 83 V en el medidor?

De (1)

$$(x_i - \bar{X}) = \frac{\text{ESC}(\%\, q_e)}{100} = \frac{150\ (1)}{100} = 1.5 \text{ V}$$

De (2)

$$\%\, q_e|_{83\text{ V}} = \frac{1.5}{83} \times 100 = 1.81\ \%$$

Para una lectura de 75 V y 37.5 V el % $q_e$ corresponde a

$$\%\, q_e|_{75\text{ V}} = 2\ \% \qquad \text{y} \qquad \%\, q_e|_{37.5\text{ V}} = 4\ \%$$

El error límite en % aumenta en mediciones de voltaje más pequeño ya que el cálculo del error máximo está basado precisamente en el valor máximo de la escala.

**Cálculo del Error Límite por combinación de componentes en la medición de la cantidad V**

Siempre que $|\Delta U_i|_{max} < 1$, $i = 1,2,\ldots n$ se recomienda el siguiente método aproximado para calcular el error límite que se comete al evaluar V.
Si V es una función conocida de las n variables independientes $U_1$, $U_2$, $\ldots,U_n$, esto es $V = f(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ y $|\Delta U_1|_{max}$, $|\Delta U_2|_{max}, \ldots, |\Delta U_n|_{max}$ son los límites absolutos para los errores en la medición de $U_1$, $U_2$, $\ldots,U_n$, respectivamente, la función V puede desarrollarse en una serie de Taylor.

$$\Delta V = \frac{\partial V}{\partial U_1}\Delta U_1 + \frac{\partial V}{\partial U_2}\Delta U_2 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial U_n}\Delta U_n + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial U_1^2}\Delta U_1^{\,2} + \ldots$$

Si $|\Delta U_i| << 1$, $i = 1, 2, \ldots n$ pueden omitirse los términos de segundo orden o superior, y para que $\Delta V$ sea el máximo dentro de los valores que puede tomar, se evalúa la diferencial total usando el máximo valor absoluto de cada término, esto es:

$$|\Delta V_{max}| \approx \left|\frac{\partial V}{\partial U_1}\Delta U_{1max}\right| + \left|\frac{\partial V}{\partial U_2}\Delta U_{2max}\right| + \ldots + \left|\frac{\partial V}{\partial U_n}\Delta U_{nmax}\right|$$

donde las parciales se evalúan con los valores nominales de las mediciones $U_1$, $U_2$, $\ldots,U_n$.
Finalmente

$$V = V \pm |\Delta V_{max}|$$

**Cálculo del Error Probable de una medición por combinación de Componentes**

El error probable (imprecisión) no es un error máximo, es una cantidad obtenida a partir del análisis estadístico y probabilístico y es la mejor aproximación que puede hacerse. En el cálculo, el error probable se considera que las variaciones de cada medición tienen distribución normal.
Considerese la función F y las variables $V_1$, $V_2$ a $V_n$

$$F = f(V_1, \quad V_2, \quad \ldots, V_n)$$

y $\Delta V_1$, $\Delta V_2$, $\ldots$, $\Delta V_n$ son los errores probables de $V_1$, $V_2$, $\ldots,V_n$.
Entonces el error probable $\Delta F_1$ de F debido al error de $V_1$ es:

$$\Delta F_1 = \Delta V_1 \frac{\partial F}{\partial V_1} \tag{3}$$

y el error probable $\Delta F_2$ de F debido al error en $V_2$ es

$$\Delta F_2 = \Delta V_2 \frac{\partial F}{\partial V_2} \qquad (4)$$

Entonces el error probable $\Delta F$ debido al error de todos los componentes es:

$$\Delta F = \sqrt{(\Delta F_1)^2 + (\Delta F_2)^2 + \ldots + (\Delta F_n)^2} \qquad (5)$$

Cada una de las variaciones $\Delta V$ puede calcularse con la relación de imprecisión 'h' dada anteriormente para un determinado nivel de confianza. Finalmente la cantidad F estará dada por:

$$F = F_{nom} \pm \Delta F$$

o bien

$$F = F_{nom} \pm h$$

**OBJETIVOS**

- Reconocer los diferentes tipos de errores de medición.
- Analizar los errores aleatorios por métodos estadísticos, de un conjuntos de datos obtenidos experimentalmente.
- Verificar y/o determinar la clase exactitud de un instrumento de medición.
- Determinar la imprecisión en la medición de una variable eléctrica.

**EQUIPO Y MATERIAL**

Fuente de alimentación
Vóltmetro analógico
Multímetro
30 Resistencia o más del mismo valor, misma tolerancia
1 Resistencia de 1 KΩ
1 Resistencia de 2.2 KΩ

**DESARROLLO**

**EXPERIMENTO I ANALISIS DEL ERROR POR METODOS ESTADISTICOS**

a) Mida cada una de las 30 resistencias del mismo valor y regístrelo en la tabla 1.
  - Seleccione 8 resistencias aleatoriamente del total, mida y registre los valores en la tabla 1 (Muestra 1).
  - Mezcle todas las resistencias y seleccione aleatoriamente 12 elementos. La selección puede o no incluir resistencias de la muestra anterior. Mida y registre los valores en la tabla 1 (Muestra 2).
  - Vuelva a mezclar todas las resistencias y tome aleatoriamente 16 elementos; mida y registre su valor en la tabla 1 (Muestra ).

TABLA 1

| TOTAL DE RESISTENCIAS | MUESTRA 1 | MUESTRA 2 | MUESTRA 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | | | |
| 2 | | | |
| 3 | | | |
| 4 | | | |
| 5 | | | |
| 6 | | | |
| 7 | | | |
| 8 | | | |
| 9 | | | |
| 10 | | | |
| 11 | | | |
| 12 | | | |
| 13 | | | |
| 14 | | | |
| 15 | | | |
| 16 | | | |
| 17 | | | |
| 18 | | | |
| 19 | | | |
| 20 | | | |
| 21 | | | |
| 22 | | | |
| 23 | | | |
| 24 | | | |
| 25 | | | |
| 26 | | | |
| 27 | | | |
| 28 | | | |
| 29 | | | |
| 30 | | | |
| 31 | | | |

**NOTA**

**Entre mas grandes sean las muestras, se obtendran mejores resultados.**

**EXPERIMENTO II DETERMINACION DEL ERROR LIMITE DE UN VOLTMETRO ANALOGICO**

a) Realice la conexión de la figura 3.

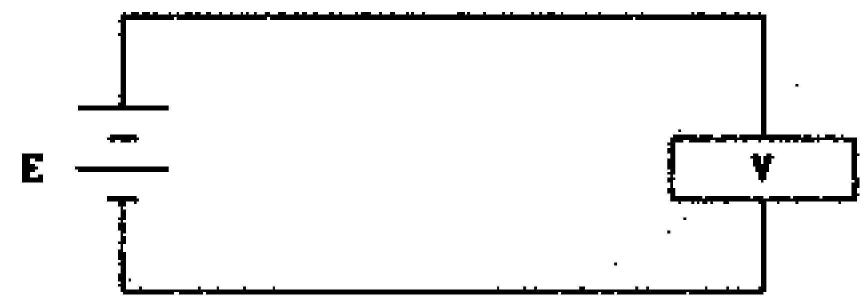


Figura 3

- Mida diferentes valores de voltaje de acuerdo a la tabla 2.

TABLA 2

| VOLTAJE APLICADO \ ESCALAS | 0 - 3 V | 0 - 15 V | 0 - 30 V | 0 - 40 V |
|---|---|---|---|---|
| 3 | | | | |
| 15 | | | | |
| 30 | | | | |
| 40 | | | | |

- Registre el valor de la clase exactitud indicada en el vóltmetro.

**EXPERIMENTO III CALCULO DEL ERROR PROBABLE DE UNA MEDICION**

a) Arme el circuito divisor de voltaje de la figura 4
- Ajuste el voltaje de entrada exactamente a 10 V.
- Conecte el vóltmetro a través del potenciómetro $R_b$ y mida el voltaje para tres posiciones del cursor: inicial, central y final.
- Registre el voltaje de salida para los tres casos.

$E_o$ = ______________

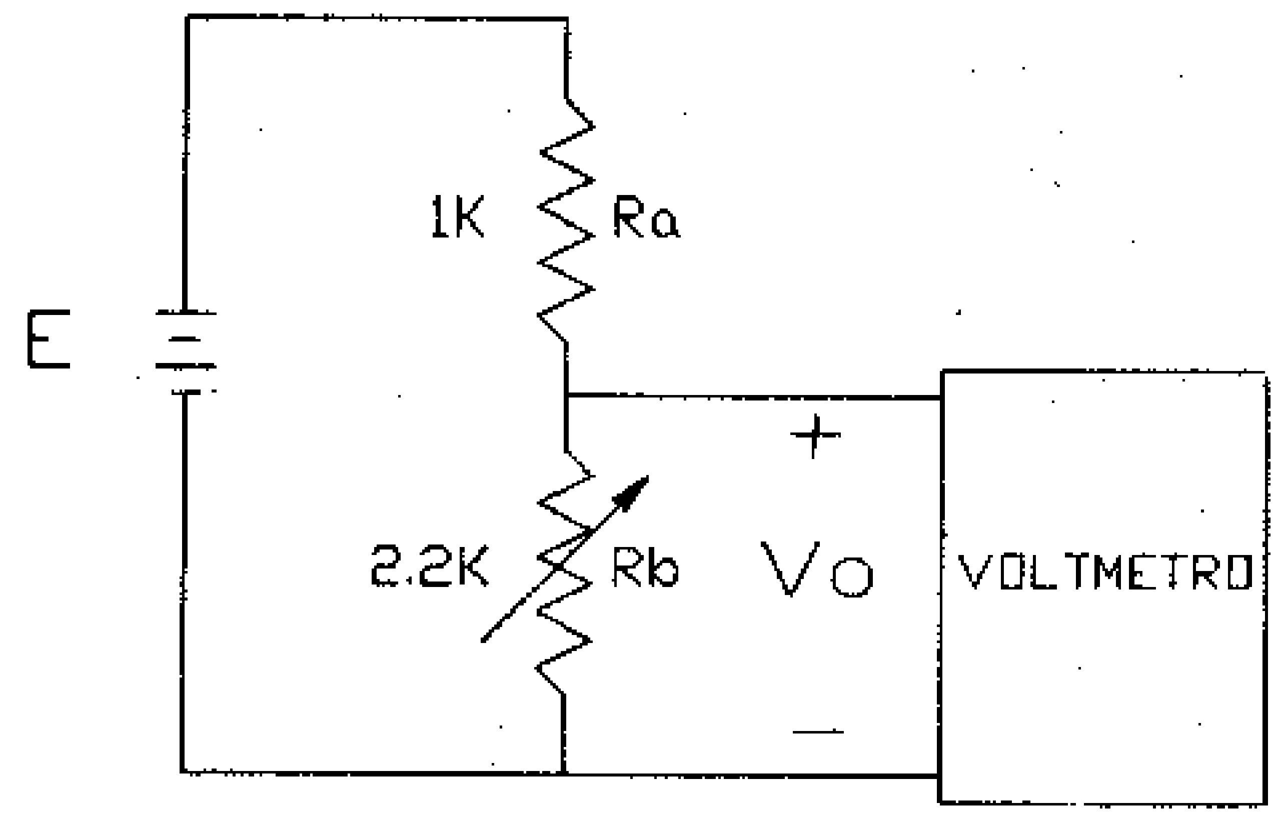


Figura 4

## ANALISIS DE DATOS Y RESULTADOS

1.- Dibuje una gráfica de barras o histograma considerando los 30 elementos.

2.- Dibuje el histograma para cada una de las muestras. Una los puntos máximos en cada histograma para formar la curva envolvente.

3.- ¿Qué curva se formó en cada histograma? ¿Si hay irregularidades a que se deben ?

4.- Con base en los datos de la tabla 1, determine la media $\overline{X}$ y la desviación estándar S' para el total de los elementos así como para cada una de las muestras.

5.- Determine el intervalo de confianza del valor medio de las resistencias para los cuatro conjuntos con el 50%, 95% y 99% de confianza. Complete la tabla 3.

TABLA 3

| NIVEL DE CONFIANZA | TOTAL | MUESTRA 1 | MUESTRA 2 | MUESTRA 3 |
|---|---|---|---|---|
| 50% | | | | |
| 95% | | | | |
| 99% | | | | |

LIMITES DE 'R' : ________ < R < ________

6.- Apartir de la imprecisión calculada en el punto anterior, cual de los conjuntos está dentro de la tolerancia especificada por el fabricante.

7.- Con base a los datos de la tabla 2, determine el error límite experimental, a partir de la ecuación (1), para cada una de las lecturas y complete la tabla 4.

TABLA 4

| VOLTAJE APLICADDO \ ESCALAS | 0 - 3 V | 0 - 15 V | 0 - 30 V | 0 - 40 V |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| 3 | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| 15 | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| 30 | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| 40 | | | | |
| | | | | |

| |
|---|
| VALOR MEDIDO |
| % $q_e$ TEORICO |
| % $q_e$ EXPERIMENTAL |

8.- A partir de los valores obtenidos, ¿Qué concluye?.

9.- ¿De qué depende que el valor de las lecturas sean más exactas?.

10.-Determine teóricamente el valor de $E_o$ del circuito de la figura 4, para las tres posiciones del potenciómetro, mediante la ecuación siguiente:

$$E_o = E_{in} \frac{R_b}{R_a + R_b}$$

11.-Compárelos con los valores medidos.

12.-Calcule el error ΔEo producido por la tolerancia de los componentes y la exactitud de los instrumentos utilizados mediante la ecuación (5). Considere 0.5% la exactitud de la fuente y 0.2 % la del multímetro.

13.-Especifique para cada una de las mediciones

$$E_o = E_{nom} + \Delta E_o$$

14.-¿Se encuentran dentro del rango, los valores de voltaje medidos ?