

PRACTICA No 2

DETERMINACION DEL MODELO MATEMATICO DEL TERMOMETRO DE RESISTENCIA Y EL TERMISTOR

INTRODUCCION

Una de las partes principales en los sistemas de procesos es la que contiene los elementos primarios de medición, siendo éstos los sensores o detectores de las variables físicas de interés en el proceso.

Si no se cuenta con elementos confiables, es decir, de alta exactitud, de los cuales se conozca el comportamiento en todo su rango de operación, todo el proceso en sí presentaría errores; esto es, gran parte de la exactitud de todo un proceso radica en la exactitud del elemento primario de medición.

Muchos de los elementos primarios de medición son transductores los cuales convierten una variable física como temperatura, presión, etc en otra que puede ser eléctrica, mecánica, neumática, etc y que es fácilmente manipulable.

Al utilizar un transductor es necesario conocer las características propias del elemento tal como: exactitud, rango de operación, linealidad, etc, a fin de saber si será el adecuado para un proceso específico.

El termómetro de resistencia (RTD) es un transductor ampliamente utilizado para las mediciones de temperatura. Consiste de un alambre enrollado sobre un núcleo cerámico y empacado en forma de probeta.

En muchos conductores metálicos la resistencia se incrementa con la temperatura, de tal forma que un cambio en la resistencia será una indicación de la temperatura. El modelo matemático de este elemento es prácticamente lineal para un rango limitado y esta dado por la relación:

$$R = R_0 (1 + \alpha (T - T_0)) \quad (1)$$

en donde

R - Resistencia a la temperatura T

R₀ - Resistencia a la temperatura de referencia T₀

α - Coeficiente de variación de resistencia-temperatura y depende del material

El termistor es otro elemento para medición de temperatura. Este se construye con material semiconductor intrínseco en el cual la resistencia del semiconductor disminuye conforme se incrementa la temperatura a la que está expuesto.

La relación funcional de resistencia-temperatura para este elemento es no lineal y esta dada por:

$$R = R_0 e^{\beta(1/T - 1/T_0)} \quad (2)$$

en donde

R - Resistencia a la temperatura T

R₀ - Resistencia a la temperatura de referencia T₀

β - Constante que depende de las características del material

A partir de datos experimentales se puede obtener la curva característica del elemento mediante el método de ajuste de curvas llamado *Mínimos Cuadrados*.

Este método consiste en minimizar la suma de los cuadrados de las desviaciones de un conjunto de datos con respecto al valor verdadero o al valor promedio de la variable.

La forma más sencilla de aproximar un conjunto de puntos o datos es mediante una línea recta, cuya ecuación está dada por:

$$Y = aX + b \quad (3)$$

y la suma de las desviaciones está dada por:

$$D = \sum (Y - (aX + b))^2 \quad (4)$$

Para minimizar esta cantidad se deriva D con respecto a cada una de las constantes y las ecuaciones derivadas obtenidas se igualan a cero; resultando las siguientes ecuaciones simultáneas:

$$\sum Y = b N + a \sum X \quad (5)$$

$$\sum X Y = b \sum X + a \sum X^2 \quad (6)$$

Las constantes a y b son determinadas resolviendo las ecuaciones (5) y (6).

$$a = \frac{N \sum X Y - (\sum X)(\sum Y)}{N \sum X^2 - (\sum X)^2}$$

$$b = \frac{(\sum X^2)(\sum Y) - (\sum X)(\sum X Y)}{N \sum X^2 - (\sum X)^2}$$

RELACIONES NO LINEALES

Cuando se tienen ecuaciones no lineales se puede desarrollar un método similar al de la línea recta, o bien, algunas veces es posible modificar la

ecuación no lineal a una lineal mediante la transformación adecuada de las variables. Algunas de ellas son las siguientes:

Hipérbola

$$Y = \frac{1}{aX + b} \longrightarrow \frac{1}{Y} = aX + b$$

Curva exponencial

$$Y = a b^X \longrightarrow \log Y = \log a + (\log b) X$$

Curva geométrica

$$Y = a X^b \longrightarrow \log Y = \log a + b \log X$$

ANÁLISIS GRAFICO

Cuando no se requiere una alta exactitud para obtener la función a partir de un conjunto de datos, se puede utilizar el método gráfico.

Al igual que en el análisis analítico, la forma mas sencilla de obtener una función es cuando se aproximan los datos a una línea recta. De tal forma que si se tiene idea del comportamiento general que sigue el elemento en estudio, se pueden graficar los datos con las escalas apropiadas y determinar la relación funcional específica.

La tabla 1 muestra diferentes ecuaciones no lineales así como el método para obtener gráficamente la aproximación a la línea recta en el papel adecuado.

TABLA 1

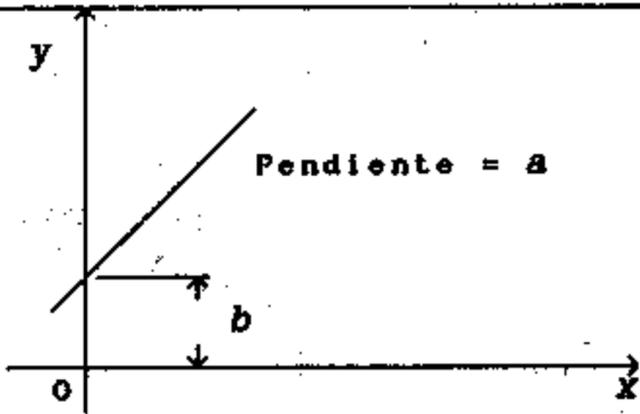
Relación funcional	Método para graficar	Gráfica y parámetros
$y = ax + b$	y contra x en papel lineal	

TABLA 1 (cont)

Relación funcional	Método para graficar	Gráfica y parámetros
$y = a x^b$	log y contra log x en papel log-log	
$y = a e^{bx}$	log y contra x en papel semilog	
$y = \frac{x}{a + bx}$	$\frac{1}{y}$ contra $\frac{1}{x}$ en papel lineal	
$y = a + bx + cx^2$	$\frac{y-y_1}{x-x_1}$ contra x en papel lineal	
$y = \frac{x}{a + bx} + c$	$\frac{x-x_1}{y-y_1}$ contra x en papel lineal	

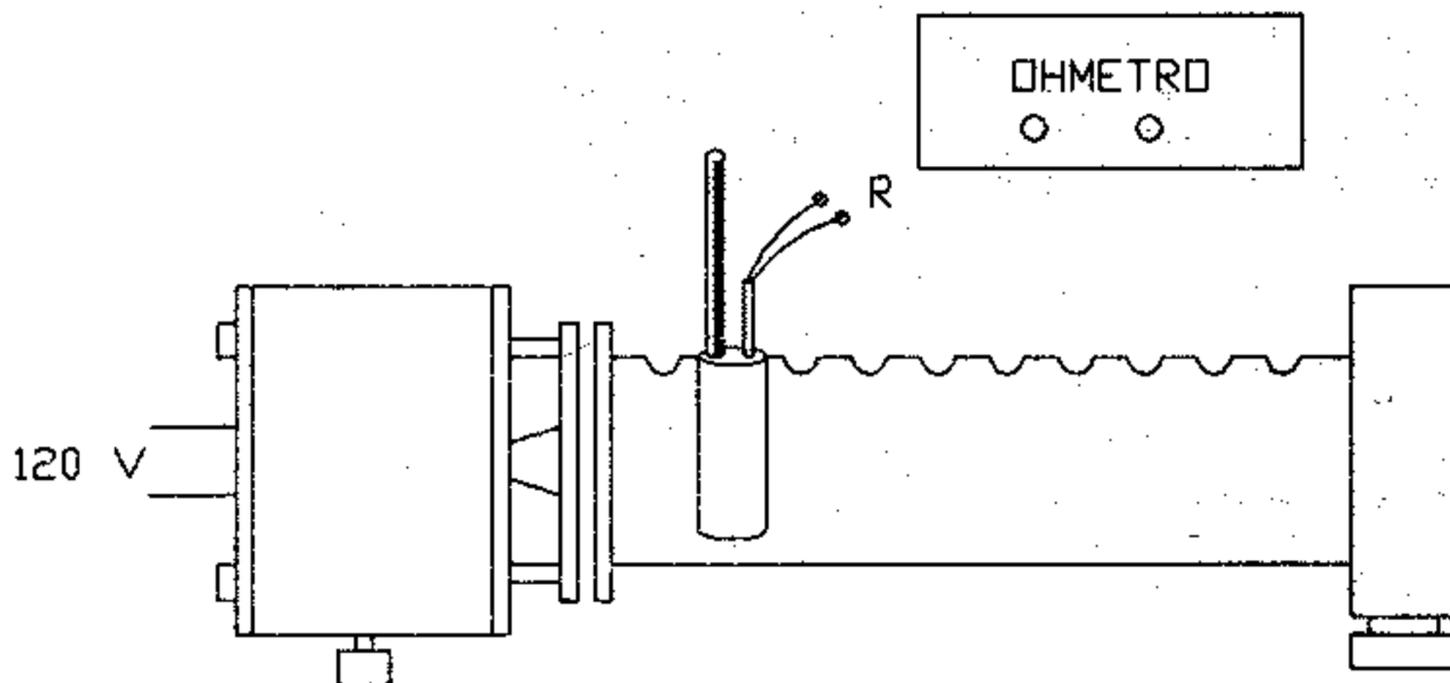


Figura 1

ANÁLISIS DE DATOS Y RESULTADOS

- 1.- Con los datos obtenidos Y anotados en la tabla 2, determine el modelo del termómetro de resistencia con el método de mínimos cuadrados.
- 2.- Repita el punto anterior para el termistor.
- 3.- Determine gráficamente el modelo de los dos elementos primarios.
- 4.- Compare los resultados analíticos y gráficos.
- 5.- Especifique el rango de operación para el cual es válida la ecuación obtenida.
- 6.- Para una medición específica dentro del rango medido, ¿Cómo determinaría el error en la medición ?
- 7.- ¿Que procedimiento realizaría para obtener un modelo matemático mas exacto?
- 8.- Con el valor de α y β encontrados, investigue de que material son los elementos utilizados.
- 9.- Investigue el comportamiento de otros elementos a los cuales se pueda hacer un análisis similar.
- 10.-Realice un análisis similar al de línea recta para determinar las constantes para una curva cuadrática o parábola.