	Manual de Prácticas **Elementos de Control**
Secretaría/División: División de Ingeniería Eléctrica	Área/Departamento: Control y Robótica

Lugar Geométrico de las Raíces

N° de práctica: 9
Tema Correspondiente: Lugar geométrico de las raíces

Nombre completo del alumno		**Firma**
N° de brigada:	**Fecha de elaboración:**	**Grupo:**

Elaborado por:	**Revisado por:**	**Autorizado por:**	**Vigente desde:**
Profesor 1	Ing. Benjamín Ramírez Hernández	Dr. Paul Rolando Maya Ortiz	28/11/2015

1. Seguridad en la ejecución

	Peligro o Fuente de energía	Riesgo asociado
1	Ninguno	Ninguno

2. Objetivos de aprendizaje

I. Objetivos generales:

Conocer qué es el Lugar Geométrico de las Raíces de una función de transferencia en malla cerrada con un controlador PID

II. Objetivos específicos:

Aprender a utilizar las herramientas con las que cuenta MATLAB para analizar y diseñar sistemas de control.

3. Introducción

La respuesta transitoria de un sistema en malla cerrada está relacionada con la ubicación de los polos del sistema. Por lo tanto, para un correcto diseño es necesario conocer como se mueven los eigenvalores (polos) y qué implicaciones tiene el movimiento de éstos conforme se varía la ganancia en el lazo de control.

Conseguir ubicar la traza que describen las raíces de un sistema en malla cerrada es un problema matemático difícil, resuelto por Evans, que se reducen a un conjunto de reglas sencillas pero laboriosas para desarrollar; ya que a medida que se varía la ganancia del sistema, los eigenvalores se mueven describiendo cierta traza, siendo necesario calcular cada punto para un valor específico de la ganancia del controlador. El método presenta cómo son las raíces del sistema para todos los valores del parámetro del controlador del sistema, la ganancia K. Mediante este método se puede predecir que efectos tendrá la modificación de este parámetro en el sistema, y realizar un primer ajuste para la ubicación deseada los polos.

La idea básica del método es que la magnitud de función de transferencia en malla cerrada debe ser igual a 1, con un ángulo de π radianes, lo cual se conoce como las condiciones de magnitud y de ángulo respectivamente, que debe satisfacer la ecuación característica del sistema básico presentado en la Figura 1.

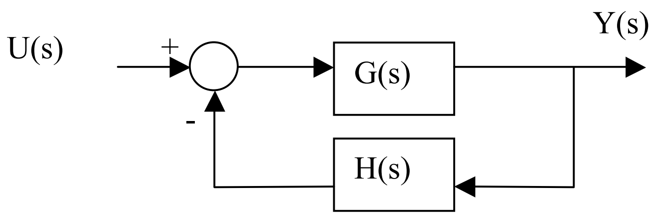

Fig. 1. Esquema Básico del Sistema de Control

cuya función de transferencia está dada por

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G(s)}{1 + H(s)G(s)}$$

Al variar la ganancia desde cero hasta infinito se puede observar cómo contribuye cada eigenvalor y cada cero en lazo abierto a las posiciones correspondientes al cerrar la malla. Se debe tener claro que este método permite obtener resultados de diseño rápidamente, aunque no dejan de ser resultados aproximados.

Puesto que G(s)H(s) es un cociente de polinomios en s, la ecuación característica en lazo cerrado

$$1 + G(s)H(s) = 0; \qquad G(s)H(s) = -1 + j0$$

es una ecuación con funciones de variable compleja en variable compleja, que puede escribirse en forma polar donde su magnitud y su ángulo son respectivamente

$$|G(s)H(s)| = 1$$

$$\angle G(s)H(s) = \pm(2k+1)\pi; \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Los valores de la variable compleja s que cumplan estas dos condiciones serán los eigenvalores del sistema en malla cerrada.

Puesto que se cuenta con un grado de libertad en el valor del parámetro de la ganancia K, la ecuación característica puede escribe como

$$1 + \frac{K(s+z1)(s+z2)\cdots(s+zm)}{(s+p1)(s+p2)\cdots(s+pn)} = 0$$

Por lo tanto, la traza de cada eigenvalor del sistema al varíar la ganancia K desde cero hasta infinito es lo que se conoce como: *Lugar Geométrico de las Raíces (LGR)*.

3.1 Cálculo del LGR de un Sistema en Forma Manual

Antes de utilizar cualquier herramienta de apoyo, como lo es en este caso MATLAB que ofrece varias opciones para trazar el LGR de una forma muy fácil, es indispensable entender lo que se está haciendo y esto se logra al realizar los cálculos de manera manual al seguir las reglas propuestas por Evans cuyo fundamento matemático no siempre es alcanzado por los estudiantes. Lo anterior permite un mejor entendimiento de las gráficas que se obtienen. De manera concisa las reglas de Evans se resumen en las siguientes:

a) ***Obtención de la ecuación característica:*** considerando al parámetro K como una constante común en un controlador PID que se refleja como un factor multiplicativo en cascada con la planta.

b) ***Obtener los eigenvalores y los ceros de G(s)H(s) en el plano complejo:*** ubicar los polos y ceros en malla abierta. El LGR tendrá una traza por cada eigenvalor de la ecuación característica.

c) ***Determinar el LGR sobre el eje real:*** Para construir el LGR sobre el eje real debe seleccionarse un punto cualquiera del eje, si el número total de eigenvalores y ceros reales a la derecha de este punto es impar, entonces el punto pertenece al LGR. Si todos los polos y ceros en lazo abierto son reales, en las gráficas, los segmentos que pertenecen al LGR se van alternando.

d) ***Determinación de las asíntotas del LGR:*** Seleccionando un punto de prueba lejos del origen, obtenemos que los ángulos de las asíntotas son:

$$ángulos = \frac{\pm(2k+1)\pi}{n-m}; \qquad k = 0, 1, 2, \ldots ,$$

donde

n es el número de eigenvalores finitos de $H(s)G(s)$
m es el número de ceros finitos de $H(s)G(s)$

para localizar el punto de corte de las asíntotas con el eje real, al seleccionarse el punto de prueba lejos del origen, la división entre el numerador y el denominador de la función de transferencia en malla abierta, obtiene que

$$G(s)H(s)=\frac{K}{\left[s+\dfrac{(p_1+p_2+\ldots+p_n)-(z_1+z_2+\ldots+z_m)}{n-m}\right]^{n-m}}$$

igualando a cero el denominador se encuentra el punto de corte conocido como centroide.

e) ***Puntos de ruptura y de ingreso*****:** Dada la simetría del LGR, los puntos de ruptura se encuentran sobre el eje real o en pares complejos conjugados. Partiendo de la ecuación G(s)+1 = 0 despejando K y derivándola con respecto a s, dK/ds se obtienen los puntos de ruptura, donde el dominio de K pertenece al conjunto de los números reales positivos.

f) ***Determinación del ángulo de salida del LGR a partir de un eigenvalor complejo*****:** Puesto que al moverse alrededor de un polo complejo, la suma de las contribuciones angulares de todos los otros eigenvalores y ceros se mantiene constante puede concluirse que:

- El ángulo de salida desde un polo complejo es igual a π (180º) menos la suma de los ángulos hacia el eigenvalor desde los otros eigenvalores, más la suma de los ángulos hacia el eigenvalor desde los ceros.

- El ángulo de salida desde un cero complejo es igual a π (180º) menos la suma de los ángulos hacia el cero desde otros ceros, más la suma de ángulos hacia el cero desde los eigenvalores.

g) ***Cruces con el eje imaginario:*** Para esto se utilizan dos métodos:

- Criterio de estabilidad de Routh: El valor de K que iguala a cero la primera columna (renglón s^1), y sustituyendo esa K en la ecuación auxiliar superior (renglón s^2), al despejar se obtienen los puntos de cruce con el eje imaginario.

- Si se sustituye $s = j\omega$ en la ecuación característica y se iguala a cero la parte real e imaginaria, pueden despejarse K y ω, siendo ω el valor de la frecuencia cuando cruza el eje imaginario y K el valor de la ganancia en el punto de cruce.

h) ***Determinación de los eigenvalores en malla cerrada:*** Una vez obtenido el LGR, cada punto de las trazas es un eigenvalor en malla cerrada si el valor de K en dicho punto satisface la condición de magnitud.

3. Material y Equipo

Computadora PC y MATLAB.

4. Desarrollo

Una vez comprendido el concepto de LGR y profundizado hasta donde sea posible en su fundamento matemático entonces el estudiante puede apoyarse de MATLAB para obtener las trazas del LGR con facilidad, quedando su interpretación siempre en el usuario para su correcta aplicación en el diseño de un sistema de control.

MATLAB cuenta con la función *rlocus(num,den)*, donde *num* es un vector en donde se incluye el polinomio del numerador de la función de transferencia en malla abierta y *den* de manera similar es un vector que representa al polinomio del denominador de la función mencionada. Esta función traza el LGR para todo el dominio de valores a donde pertenece K .

Si se utiliza la función con argumentos del lado izquierdo, de la forma

[r, K] = rlocus(num, den),

Se obtiene los datos numéricos en los vectores r y K .

I. Actividad 1

Un sistema de control realimentado tiene la siguiente función de transferencia en malla cerrada

$$KG(s) = K\frac{(s^2 - 2s + 2)}{s(s^2 + 3s + 2)}$$

utilizando MATLAB, obtenga su LGR y muestre con la función ***rlocfind*** que el valor máximo de K para que el sistema sea estable es $K = 0.79$.

II. Actividad 2

Sea el siguiente sistema

$$G_p(s) = \frac{1}{s^2 + 6s + 8}$$

Considerando que cuenta con los siguientes controladores en cascada y se cierra la malla

a) $G_C(s) = K$

b) $G_C(s) = \dfrac{K}{s}$

c) $G_C(s) = K(1 + \dfrac{1}{s})$

II.1 Obtener el LGR del sistema que se forma en cada caso utilizando MATLAB y determinar el valor de K para el cuál se satisfacen las especificaciones de diseño.

II.2 Repetir lo anterior con las plantas de los incisos b) y c).

II.3 En la misma gráfica colocar la respuesta a escalón unitario considerando cada uno de los controladores propuestos en los incisos a), b) y c).

II.4 A partir de las gráficas del LGR y de la respuesta a escalón unitario ¿qué puede concluir acerca del el *error de estado permanente* y de la *respuesta transitoria* del sistema?

5. Conclusiones

6. Bibliografía

Bolton, W.
"INGENIERÍA DE CONTROL"
Editorial Alfaomega
2a Edición
México, 2006

Kuo, Benjamin C.
"SISTEMAS DE CONTROL AUTOMÁTICO"
Editorial Prentice Hall Hispanoamericana
7ª Edición
México, 1996