Análisis de Series de Fourier

Sabino Ortega Monjarás

18 de agosto de 2016

Contenido

1.1 Objetivo de aprendizaje

Aprender a analizar por Series de Fourier las funciones más comunes que se presentan en el ámbito académico.

1.2 Introducción Teórica

A continuación se presenta una descripción del programa Matlab Gui, Análisis de Series de Fourier, el cual se utiliza en esta práctica para realizar el análisis de funciones periódicas en Series de Fourier.

1.2.1 Fundamento Teórico

El análisis de Series de Fourier para funciones periódicas tiene su fundamento en las ecuaciones de síntesis y de análisis siguientes:

$$x(t) = \sum_{k \to -\infty}^{\infty} a_k \, e^{jkwt}$$

donde a_k está dada por

$$a_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jkwt} dt$$

De acuerdo con estas ecuaciones, el estudio de las propiedades de la Serie de Fourier puede realizarse de una manera exaustiva [8.a].
Estas propiedades son muy importantes para el análisis y el cálculo abreviado de los coeficientes espectrales de las funciones en cuestión, como se verá más adelante.

1.2.2 Programa Matlab Gui de Análisis de Series de Fourier

El Programa Matlab Gui utilizado en esta práctica maneja los siguientes conceptos. Como referencia, ver la Fig. 1:

I. Función nominal. Se refiere a la función que se desea analizar. Se compone de 5 elementos, a saber:

- Vector de tiempo. Es el período en el que se ubica la función.
- Número de funciones. Las funciones son elementales, como el escalón o la rampa.

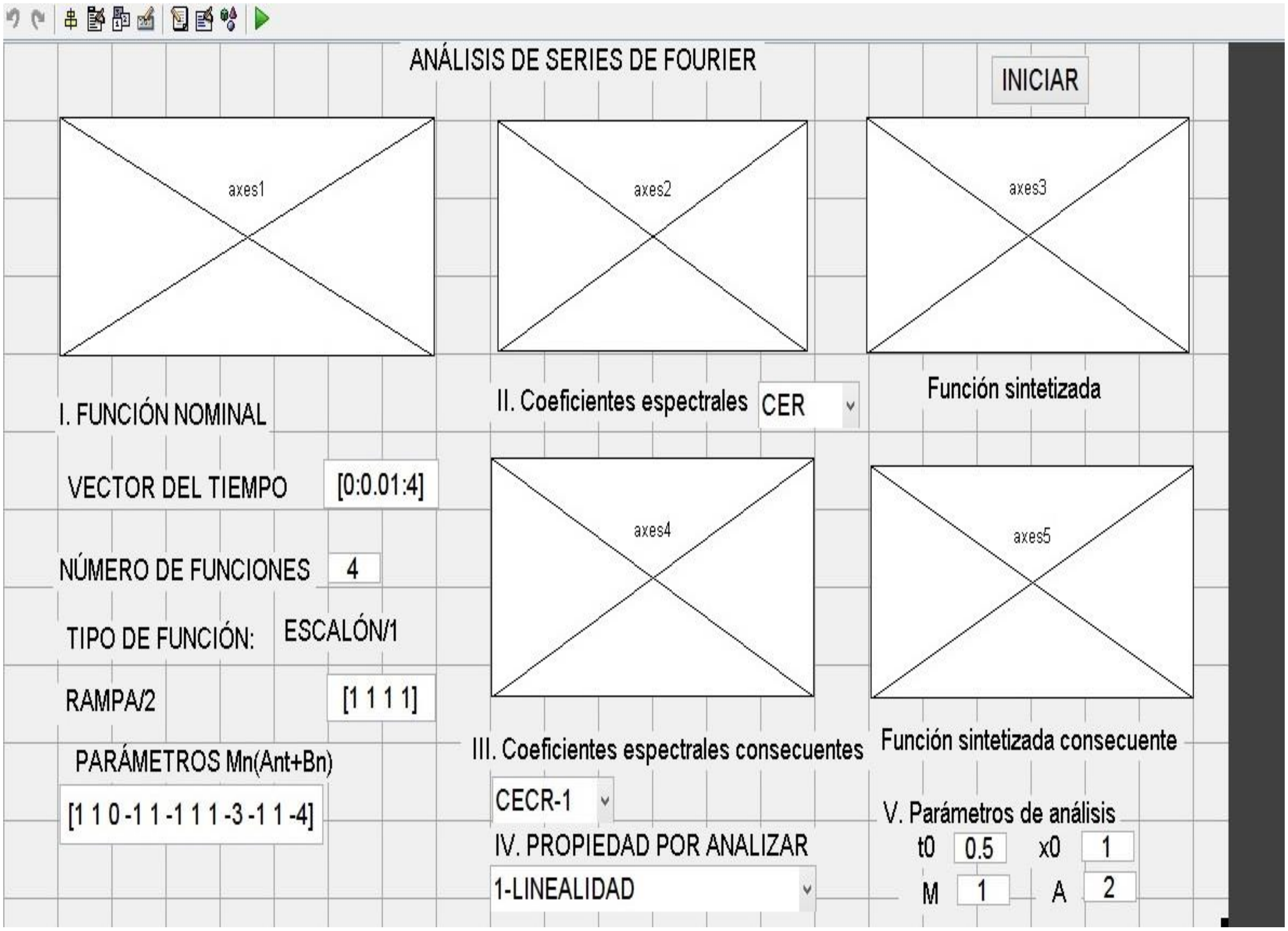

Fig. 1. Plantilla general del Programa Matlab Gui Análisis de Series de Fourier.

- Tipo de función. En esta ventana se describe el vector que se compone de todas las funciones utilizadas para formar la función compuesta por analizar. Así, si la función nominal se compone de cuatro escalones, el vector será: [1 1 1 1].
- Parámetros. Estos se suministran bajo el concepto de transformación del argumento: $x(t) \to x(\propto t_n + \beta)$. Así por ejemplo, si se desea representar la siguiente función:

$$x(t) = \begin{cases} 1: 0 \leq t < 1 \\ 0: 1 \leq t < 3 \\ 1: 3 \leq t < 4 \end{cases}$$

$x(t)$ será tal que

$$\begin{aligned} x(t) = u(t) - u(t-1) + u(t-3) - u(t-4) \\ \to m_1 u(\alpha_1 t + \beta_1) + m_2 u(\alpha_2 t + \beta_2) + m_3 u(\alpha_3 t + \beta_3) \\ + m_4 u(\alpha_4 t + \beta_4) \end{aligned}$$

donde $m_i,\ i = 1, 2, \dots$ es la magnitud requerida para cada función componente.
De esta manera, el vector representativo será:

[1 1 0 -1 1 -1 1 1 -3 -1 1 -4]

II. Coeficientes espectrales. En esta sección se reflejan los coeficientes espectrales de la función por analizar. Es importante asentar que se pueden visualizar tanto los coeficientes reales (ventana CER), o los imaginarios (ventana CEI).

Función sintetizada. En esta gráfica se representa a x(t) en forma sintetizada.

III. Coeficientes espectrales consecuentes. Se refiere al espectro resultante o consecuente de la función x(t), después de aplicarle alguna de las propiedades mencionadas anteriormente. De la misma manera, la ventana presente puede indicar las componentes reales o imaginarias, de acuerdo al número de propiedad utilizada. Así por ejemplo, CER-8 significa que se despliegan los coeficientes reales de la propiedad 8.

Función sintetizada consecuente. Representa la síntesis de la función modificada por las propiedades en cuestión.

IV. Propiedad por analizar. En este documento sólo se analizan 9 de las propiedades, a saber:

1. Linealidad.
2. Desplazamiento en t0.
3. Desplazamiento en x(t): x0.
4. Desplazamiento en frecuencia: M.
5. Conjugación.
6. Inversión en el tiempo.
7. Escalamiento en el tiempo: At.
8. Diferenciación.
9. Convolución periódica.

V. Parámetros de análisis. Son precisamente los valores con los que se desea hacer el análisis.

En general, todos los parámetros poseen un valor inicial, pero pueden modificarse , dependiendo de la propiedad por aplicar.

1.3 Material y Equipo

1.3.1 Equipo Necesario

Computadora y Programa Matlab.

1.3.2 Material Necesario

Sistema de almacenamiento (memoria USB) para los programas realizados en clase.

De acuerdo al criterio y libertad de cátedra del profesor, se sugieren preguntas y temas relacionados con la teoría, a entregar en el informe correspondiente.

1.4 Cuestionario previo

Se solicita realizar lo siguiente:

1. Demostrar las ecuaciones de síntesis y análisis de la Serie de Fourier.
2. Explicar brevemente las condiciones de Dirichlet para las funciones periódicas.
3. Demostrar, cuando menos, tres de las propiedades de la Serie de Fourier, por ejemplo: desplazamiento en to, desplazamiento en frecuencia y convolución.
4. Describir una aplicación de la Serie de Fourier en Ciencias o Ingeniería.

1.5 Desarrollo

1.5.1 Actividad 1

Se tiene la función periódica siguiente:

$$x(t) = \begin{cases} 1: 0 \leq t < 1 \\ 0: 1 \leq t < 3 \\ 1: 3 \leq t < 4 \end{cases}$$

Se pide obtener:

a) La representación gráfica de x(t).
b) Los coeficientes espectrales $a_k;\ -10 < k < 10$.
c) La función x(t) sintetizada, utilizando los valores principales de a_k.
d) Los coeficientes espectrales y la síntesis de x(t), utilizando la propiedad de desplazamiento:

$x(t) \rightarrow x(t + t_0)$, cuando $t_0 = 0.5\ segundos$.

El procedimiento con el Programa Matlab-Gui de Análisis de Fourier es como sigue:

1. Encender la computadora y cargar los programas **prueba_entrega_sf_dic16.fig** y **prueba_entrega_sf_dic16.m.**
2. El programa en curso aporta una ventana con diversos valores iniciales. Estos pueden modificarse de acuerdo a la función requerida. Para esto, primero debe operarse el programa con el triángulo verde del menú superior.
3. Debido a que los valores iniciales son exactamente los necesarios para la solución de este primer ejercicio, no se requiere realizar ninguna modificación. Así, sólo se procede a su revisión:

En la sección I. FUNCIÓN NOMINAL, verificar lo siguiente:
VECTOR TIEMPO: de acuerdo al período de la x(t): [0:0.01:4].
NÚMERO DE FUNCIONES: 4.
TIPO DE FUNCIÓN: La función se compone de sólo escalones; por tanto: [1 1 1 1].
PARÁMETROS Mn(Ant+Bn): Como se explicó en la introducción, los datos serán: [1 1 0 -1 1 -1 1 1 -3 -1 1 -4].

Una vez hecho esto, ya se está en disposición de obtener los coeficientes espectrales y la función sintetizada. Entonces:

4. Seleccionar la ventana INICIAR. A continuación , se deben apreciar las gráficas correspondientes a las ventanas siguientes:

I. FUNCIÓN NOMINAL. II. COEFICIENTES ESPECTRALES Y FUNCIÓN SINTETIZADA

En este paso, si se desea, pueden observarse los coeficientes espectrales reales o imaginarios, seleccionando las frases CER o CEI, respectivamente.
Como puede verse, la función sintetizada debe ser muy aproximada a la función nominal original.

Aquí termina la primera parte del ejercicio. La segunda se obtiene como sigue:

La transformación o desplazamiento de x(t), con t0=0.5 segundos, se realiza verificando este valor en la sección V. PARÁMETROS DE ANÁLISIS.

5. En la ventana IV. PROPIEDAD POR ANALIZAR, se selecciona precisamente la propiedad deseada: 2- DESPLAZAMIENTO EN t0. Acto seguido, aparecerán las gráficas de III: Coeficientes espectrales consecuentes y Función sintetizada consecuente.
6. Finalmente, y de la misma manera como se hizo en el paso 4, se pueden seleccionar los coeficientes espectrales reales o imaginarios, correspondientes a la propiedad aplicada, en este caso: CECR-2 o CECI-2.

Las gráficas completas del procedimiento utilizado deberán ser como se muestran a continuación:

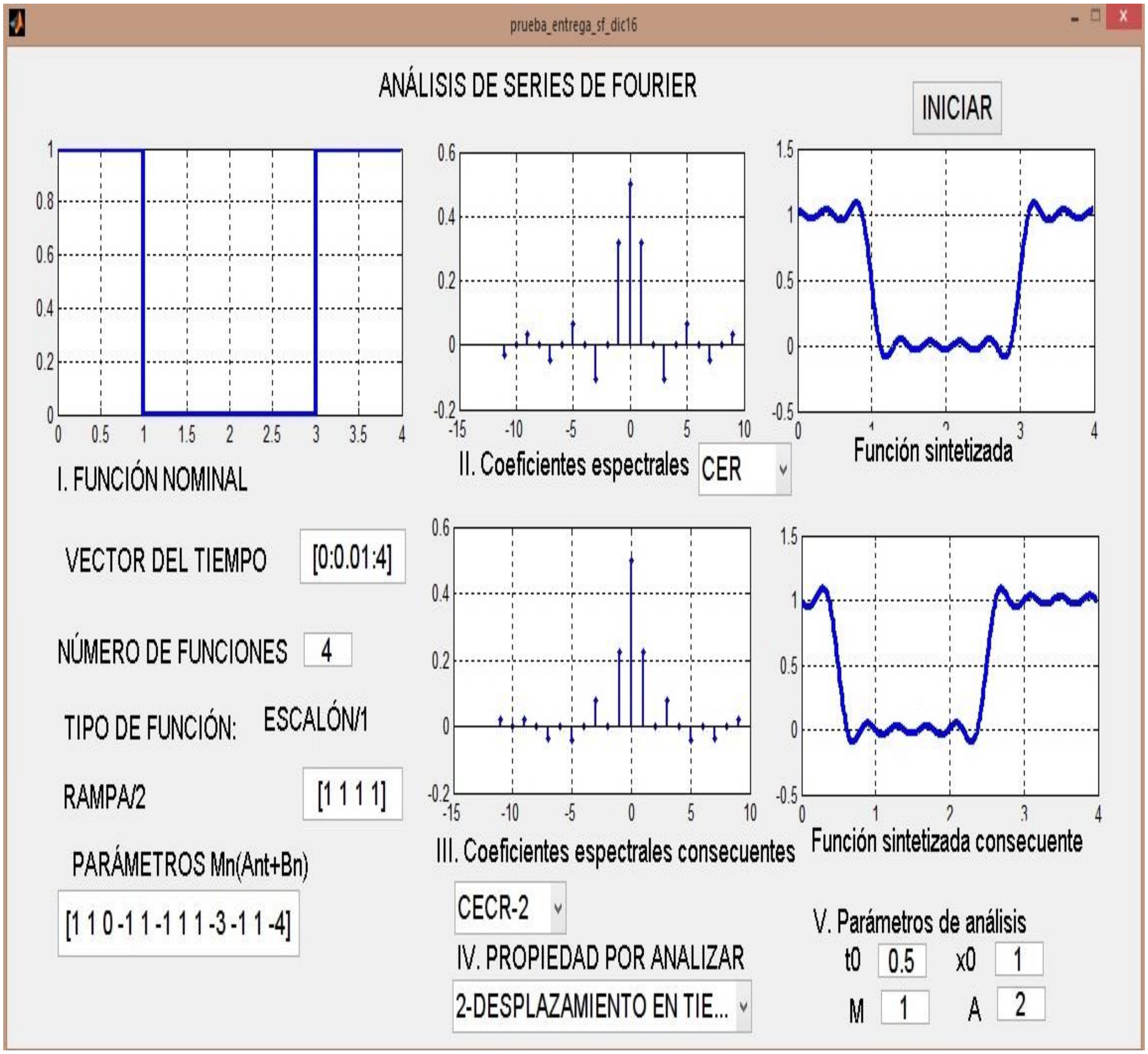

Fig. 3. Gráficas de la solución de la actividad 1.

1.5.2 Actividad 2

Se tiene ahora la siguiente función triangular:

$$x(t) = \begin{cases} t: 0 \leq t < 2 \\ -t + 4: 2 \leq t < 4 \end{cases}$$

Se pide obtener:

a) La representación gráfica de x(t).
b) Los coeficientes espectrales a_k; $-10 < k < 10$.
c) La función x(t) sintetizada, utilizando los valores principales de a_k.
d) Los coeficientes espectrales y la síntesis de x(t), utilizando la propiedad de diferenciación.

Siguiendo el mismo procedimiento con el Programa Matlab-Gui de Análisis de Fourier, se tiene:

1. Encender la computadora y cargar el programa prueba_entrega_sf_dic16.fig.

2. El programa en curso aporta una ventana con diversos valores iniciales. Estos pueden modificarse de acuerdo a la función requerida. Para esto, primero debe operarse el programa con el triángulo verde del menú superior.

En la sección I. FUNCIÓN NOMINAL, establecer lo siguiente:
VECTOR TIEMPO: de acuerdo al período de la x(t): [0:0.01:4].
NÚMERO DE FUNCIONES: 3.
TIPO DE FUNCIÓN: La función se compone de tres rampas: [2 2 2].
PARÁMETROS Mn(Ant+Bn): Como se explicó en la introducción, los datos serán: [1 1 0 -2 1 -2 1 1 -4]. En este punto se hace la aclaración de que la función establecida debe cubrir exactamente el período T. Debido a esto, se agrega la última rampa, para cancelar la rampa con pendiente negativa, a partir de t=4.

Una vez hecho esto, ya se está en disposición de obtener los coeficientes espectrales y la función sintetizada. Entonces:

3. Seleccionar la ventana INICIAR. A continuación , se deben apreciar las gráficas correspondientes a las ventanas siguientes:

II. FUNCIÓN NOMINAL. II. COEFICIENTES ESPECTRALES Y FUNCIÓN SINTETIZADA.

En este paso, si se desea, pueden observarse los coeficientes espectrales reales o imaginarios, seleccionando las frases CER o CEI, respectivamente.
Como puede verse, la función sintetizada debe ser muy aproximada a la función nominal original.

Aquí termina la primera parte del ejercicio. La segunda se obtiene como sigue:
Como no es necesario introducir ningún parámetro adicional al aplicar la propiedad de diferenciación, el proceso continúa.

En la ventana IV. PROPIEDAD POR ANALIZAR, se selecciona precisamente la propiedad deseada: 8- DIFERENCIACIÓN. Enseguida, aparecerán las gráficas de III: Coeficientes espectrales consecuentes y Función sintetizada consecuente.

4. Finalmente, y de la misma manera como se hizo en el paso anterior, se pueden seleccionar los coeficientes espectrales reales o imaginarios, correspondientes a la propiedad aplicada, en este caso: CECR-8 o CECI-8.
Las gráficas completas del procedimiento utilizado deberán ser como se muestran a continuación:

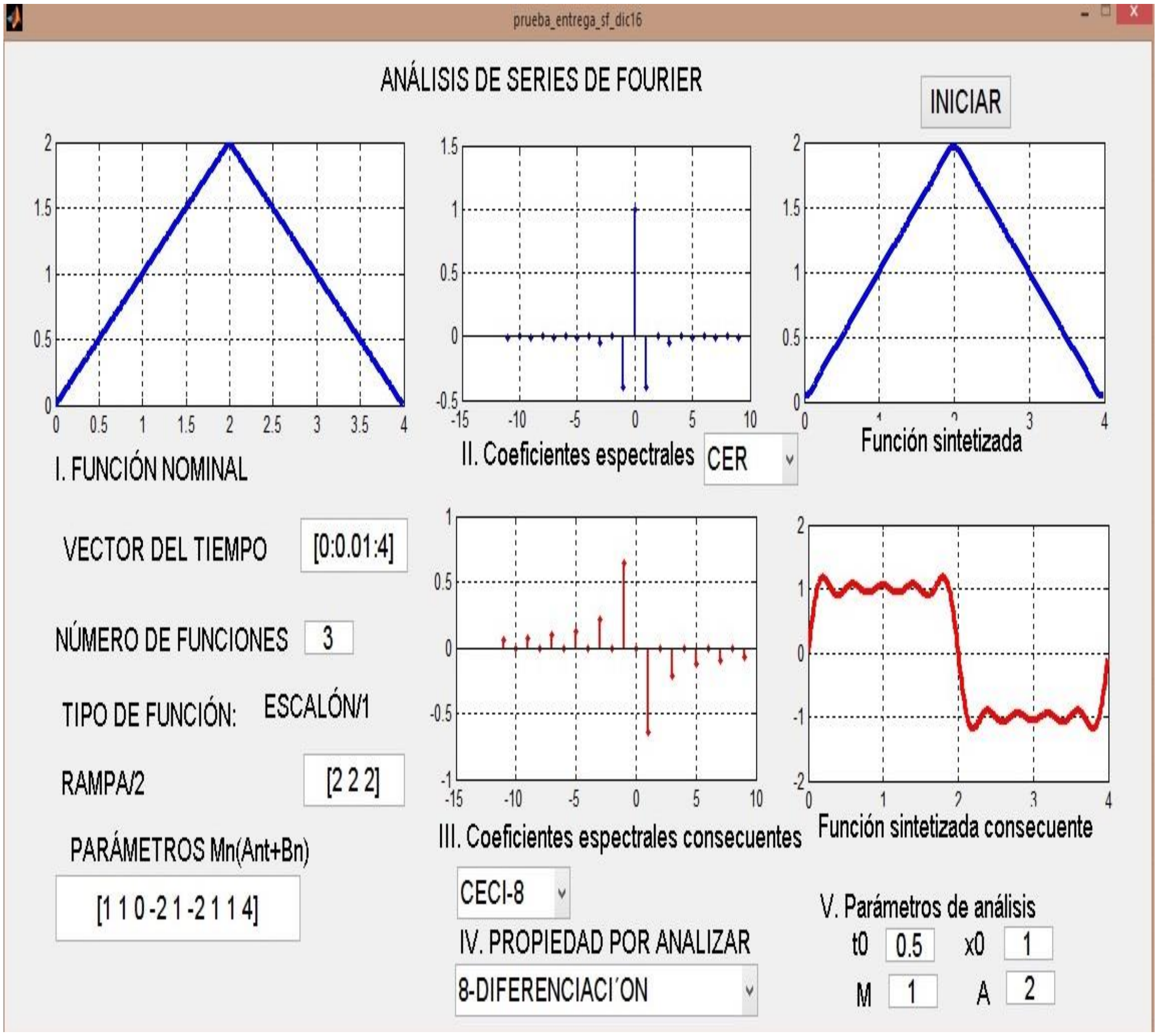

Fig.4. Gráficas resultantes en la actividad 2.

1.5.3 Cuestionario

De acuerdo al criterio y libertad de cátedra del profesor, se sugieren preguntas y temas relacionados con los resultados obtenidos y una aplicación real para el programa.

Se tienen las siguientes preguntas:

a) Demostrar analíticamente las propiedades utilizadas en la práctica.
b) Realizar los cálculos respectivos y compararlos con los resultados obtenidos.
c) Sugerir una aplicación real para el programa Matlab-Gui: Análisis de Series de Fourier.

1.5.4 Conclusiones

Propias de los estudiantes y de carácter obligatorio en el informe correspondiente

1.6 Bibliografía

[1] Mata Hernández G. & Sánchez Esquivel V. M. & Gómez González J. M. (2002). Análisis de Sistemas y Señales con Cómputo Avanzado. Universidad Nacional Autónoma de México. Facultad de Ingeniería. División de Ingeniería Eléctrica. Departamento de Ingeniería de Control. México.
[2] Hsu Hwei P. (1998). Análisis de Fourier. Prentice Hall. México.
[3] Hsu Hwei P. (2013). Señales y Sistemas. Segunda edición. McGraw-Hill. México.