Primer Orden Continuo y Discreto

Autor: Omar Andrés Osorio Ramos

27 de Enero de 2017

Índice general

1.1 Objetivo de aprendizaje

El alumno conocerá y aplicará el método de los coeficientes indeterminados para encontrar la respuesta de un sistema de primer orden ya sea en tiempo discreto o en tiempo continuo separando la respuesta en respuesta Libre y Forzada así como la utilización de Matlab para la simulación y graficación de las soluciones. Adicionalmente conocerá y aplicará el método de aproximación de Euler para una ecuación en diferencias en la simulación de la respuesta de un sistema de primer orden.

1.2. Introducción Teórica

1.2.1 Sistemas de Primer Orden

Un sistema de primer orden es aquel que es descrito por un modelo matemático tal como una ecuación diferencial de primer orden o bien una ecuación en diferencias de primer orden. En la ingeniería eléctrica asociamos una ecuación diferencial de primer orden con un sistema que contiene un elemento capaz de almacenar energía tales como un Capacitor que almacena energía en forma de campo eléctrico debido a la acumulacion de carga eléctrica , o bien una inductancia que almacena energía en forma de campo magnético o ecuaciones que describen el movimiento en sistemas dinámicos y aunque tales ecuaciones , las de primer orden , suelen describir también sistemas donde el almacenamiento de energía no es tan obvio , tal como el caso de los modelos poblacionales , modelos económicos o modelos presa depredador.

La presente práctica ejemplifica un sistema eléctrico de primer orden con un circuito RC serie , el cual se analiza desde un punto de vista de un modelo en tiempo continuo , la ecuación diferencial de primer orden , y desde el punto de vista del tiempo discreto , la ecuación en diferencias de primer orden . El análisis de ambas nos permitirá establecer las similitudes y diferencias en las formas de solución , así como la comparación de los resultados obtenidos con la ejecución y gráficas usando MATLAB.

Se utilizará un ciclo de carga y descarga del capacitor para simular la respuesta forzada y libre del sistemad de primer orden. Tmbién se observará cuales son los efectos de variar el período de muestreo sobre los resultados obtenidos.

Desarrollo Teórico.

Para el circuito RC en serie de la sgte. figura al que se le aplica una excitación de tipo escalón de duración finita de la sgte. forma.

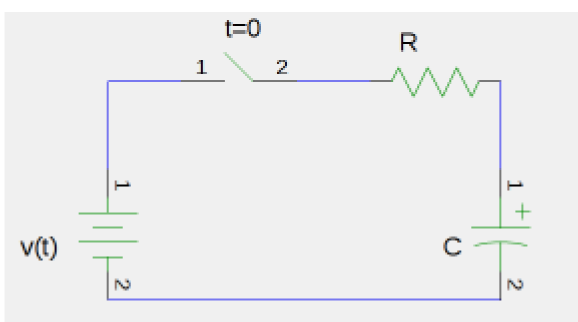

Figura 1.-Circuito Resistor Capacitor

1.2.2 Análisis de Tiempo Continuo

La ecuación diferencial que lo describe el sistema es de la forma (1)

$$\frac{dV_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC}V_c(t) = \frac{V(t)}{RC} \dots\dots (1)$$

donde v(t) es un escalón de magnitud v , la cual en términos del operador derivada puede expresarse de la sgte. forma

$$\left[D + \frac{1}{RC}\right]V_c(t) = \frac{V(t)}{RC} \dots\dots (2)$$

la cual para su solución se separa en dos partes la respuesta libre y la forzada , para la respuesta forzada usando el anulador de (1) se tiene lo sgte.

$$\left[D + \frac{1}{RC}\right]\ [D]V_c(t) = 0\ \longrightarrow\ \left[\lambda + \frac{1}{RC}\right]\ \lambda = 0 \dots\dots (3)$$

de donde es

$$V_c(t) = K_{f1}\ e^{-\frac{t}{RC}} + K_{f2} \dots\dots (4)$$

para la respuesta libre se tiene que resolver la sgte. ecuación , que se expresa en términos del operador derivada a continuación

$$\left[D + \frac{1}{RC}\right]\ V_c(t) = 0 \dots\dots (5)$$

de donde usando la ecuación característica es posible proponer la sgte. solución para la respuesta libre

$$\left[D + \frac{1}{RC}\right] = 0 \longrightarrow \left[\lambda + \frac{1}{RC}\right]\ = 0 \dots\dots (6)$$

por lo que la solución propuesta es

$$V_c(t) = K_{h1}\ e^{-(\frac{t}{RC})} \dots\dots (6)$$

Para las obtener las constantes se debe observar que por condiciones físicas y condiciones de continuidad de la propia ecuación diferencial se establece que $V_c(t = 0^-)$ desde (6)

$$V_c(t = 0^-) = K_{h1}\ e^{-\left(\frac{t}{RC}\right)} \dots\dots (7)$$

y desde (4)

$$V_c(t = 0^+) = K_{f1}\ e^{-\left(\frac{0}{RC}\right)} + K_{f2}\ \longrightarrow\ K_{f1}\ + K_{f2} = 0 \longrightarrow K_{f1} =\ -K_{f2} \dots\dots (8)$$

con $V_c(t = 0^-) = 0$ y recordando la definición de la corriente en el capacitor y dado que la corriente en $(t = 0^+)$ es

$$i_c(t) = C \frac{d\left[K_{f1}\, e^{-\frac{t}{RC}} + K_{f2}\right]}{dt} \longrightarrow i_c(t) = C\, K_{f1}\, e^{-\left(\frac{t}{RC}\right)} \frac{1}{RC} \longrightarrow i_c(t) = K_{f1} \frac{1}{R}\, e^{-\left(\frac{t}{RC}\right)}$$

$$i_c(t=0^+) = K_{f1} \frac{1}{R}\, e^{-\left(\frac{0}{RC}\right)} \longrightarrow i_c(t=0^+) = \frac{V(t)}{R} \longrightarrow \frac{V(t)}{R} = \frac{K_{f1}}{R} \longrightarrow V(t) = K_{f1} \ldots\ldots (9)$$

Donde $V(t)$ |corresponde a la magnitud del escalón aplicado para este caso $K_{f1} = -K_{f2}$ por (8) y (9) de donde la solución total para el sistema es la suma de la respuesta forzada y la respuesta libre donde $K_{f1} = K_{f1} = 3[V]$

$$V_c(t) = K_{f1} - K_{f1}\, e^{-\left(\frac{t}{RC}\right)} + K_{h1}\, e^{-\left(\frac{t}{RC}\right)} = 3 - 3\, e^{-\left(\frac{t}{RC}\right)} + 3\, e^{-\left(\frac{t}{RC}\right)} \ldots\ldots (10)$$

Dado que en este caso se carga y descarga, el voltaje en el capacitor presentará durante la aplicación de la excitación sólo respuesta forzada y al momento de que se quite la excitación, el capacitor presentará sólo respuesta libre por lo que el modelo en sentido estricto para el primer ciclo es

$$V_c(t) = 3 - 3\, e^{-\left(\frac{t}{RC}\right)} + 3\, e^{-\left(\frac{t-1}{RC}\right)} \ldots\ldots (11)$$

Que es el modelo que se usará para la simulación con el sgte. programa (RC_respuesta_pulso.m)

```
%% RC_respuesta_pulso.m
clf;
R=10E3; %% resistencia de 10 kiloohms
C=10E-6; %% Capacitor de 10 microfaradios
Vdc=3;  %% voltaje de Excitación 1 volt
Vdc2=3;  %% condición inicial de respuesta libre
tau=(1/(R*C))
t=[0:0.0001:1]; %% tiempo desde 0 a 1 segundo a intervalos de 0.0001
segundo
vc_t=Vdc*(1-exp(-tau.*t)); %% respuesta forzada
t2=1:0.0001:5;  %% tiempo desde 0 a 1 segundo a intervalos de 0.0001
segundo
vc_t2=Vdc2*(exp(-1/(R*C)*(t2-1)));%% respuesta libre
hold on
t3=-1:0.01:2;
g_pulso=[zeros(1,100),ones(1,100),zeros(1,101)];
Vdc_g_pulso=Vdc.*g_pulso;
plot(t,vc_t,'or',t2,vc_t2,'ob',t3,Vdc_g_pulso,'k','linewidth',5);%%
grafica 't' y 't2'  en eje 'x' , 'vc_t' y 'vc_t2' en el eje 'y'
%con circulos en rojo
title ('Respuesta a Excitación Pulso para Circuito RC Serie');
xlabel('Tiempo en (sg)');
ylabel('Magnitud de Vc(t) en [V]');
axis([-1,2.0,-1,(Vdc+1)]);%% eje 'x' desde 0 a 2.5 segundos y eje 'y' de
0 a 5.1
grid on;
legend('Respuesta Forzada','Respuesta Libre','Exitacion Pulso');
```

El cual al ejecutarse produce la sgte. gráfica

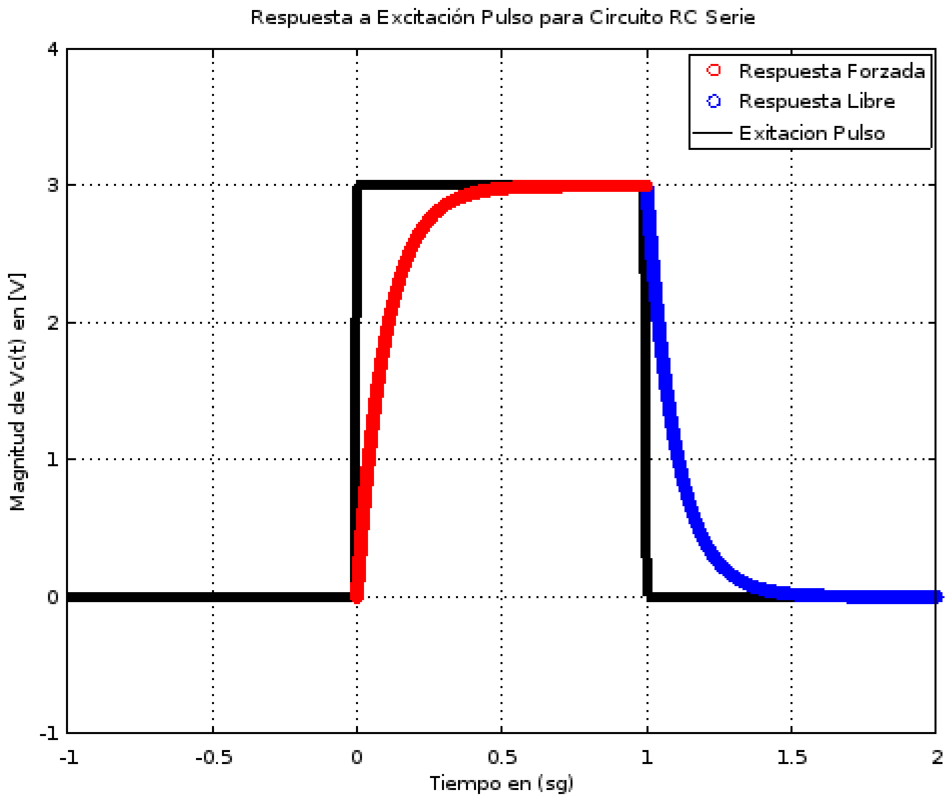

Figura 2.- Respuesta Forzada y Libre de un Circuito RC Serie.

1.2.3 Análisis del Caso Discreto

En el caso de la ecuación en diferencias es posible obtenerla partir de la ecuación (1) recordando la definición fundamental de la derivada como se muestra a continuación

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \; para\ este\ caso \; \frac{dV_c(t)}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{V_c(t+h) - V_c(t)}{h} \cong \frac{V_c[kT+T] - V_c[kT]}{T} \ldots\ldots(12)$$

nótese que la calidad de la aproximación depende de T, con lo cual es posible establecer lo sgte.

$$\frac{V_c[kT+T] - V_c[kT]}{T} + \frac{1}{RC} V_c(t) \cong \frac{V(t)}{RC} \ldots\ldots(14)$$

remplazando t por kT , se obtiene

$$\frac{V_c[kT+T] - V_c[kT]}{T} + \frac{1}{RC} V_c[kT] \cong \frac{V[kT]}{RC} \ldots\ldots(15)$$

y dado que

$$\frac{V_c[kT+T]-V_c[kT]}{T} \cong \frac{V_c[kT]-V_c[kT-T]}{T} \ldots\ldots(16)$$

es posible establecer la sgte. relación

$$\frac{V_c[kT]-V_c[(k-1)T]}{T} + \frac{1}{RC}V_c[kT] \cong \frac{V[kT]}{RC} \ldots\ldots(17)$$

nos permite establecer la ecuación en diferencias de primer orden y después de hacer un poco de algebra

$$V_c[kT]\left[\frac{RC+T}{RC}\right] - V_c[(k-1)T] = T\left(\frac{V[kT]}{RC}\right) \ldots\ldots(18)$$

multiplicando por $\left(\frac{RC}{RC+T}\right)$

$$V_c[kT] - V_c[(k-1)T]\left(\frac{RC}{RC+T}\right) = T\left(\frac{V[kT]}{RC}\right)\left(\frac{RC}{RC+T}\right)$$

$$V_c[kT] - V_c[(k-1)T]\left(\frac{RC}{RC+T}\right) = V[kT]\left(\frac{T}{RC+T}\right)$$

si se consideran que α y β como se muestra a continuación

$$\alpha = \left(\frac{RC}{RC+T}\right) \ \ y \ \ \beta = \left(\frac{T}{RC+T}\right)$$

se puede expresar la ecuación como se muestra

$$V_c[kT] - \alpha\, V_c[(k-1)T] = \beta\, V[kT] \ldots\ldots(20)$$

sustituyendo $V_c[kT]$ y $V_c[(k-1)T]$ por su representación en operador corrimiento como se tiene que es posible plantear la sgte. ecuación.

$$V_c[kT] - \alpha\, V_c[(k-1)T] = \beta\, V[kT] \longrightarrow (1-\alpha\lambda^{-1})V_c[kT] = \beta\, V[kT] \ldots\ldots(21)$$

Donde λ^{-1} representa un retraso o corrimiento de $V_c[kT]$ o dicho de otro modo

$$\lambda^{-1}V_c[kT] = V_c[kT - T] = V_c[(k-1)T] \ldots\ldots (22)$$

de esta manera se puede establecer la sgte. ecuación en diferencias en términos del operador algebraico λ como se muestra a continuación.

$$(1 - \alpha\lambda^{-1})V_c[kT] = \beta\, V[kT] \longrightarrow \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda}\right)V_c[kT] = \beta\, V[kT] \ldots\ldots (23)$$

Es importante observar que en general el voltaje en el capacitor no siempre es cero y de la misma manera la excitación del sistema también es distinta de cero por lo que si se desea solucionar la ecuación de manera algebraica es necesario hacer que de alguna manera que esta se transforme en una ecuación en que uno de los miembros sea cero.

$$\left(\frac{\lambda - \alpha}{\lambda}\right)V_c[kT] = \beta\, V[kT] \ldots\ldots (24)$$

También resulta clarísimo que λ debe ser diferente de cero , sin embargo es claro que el factor $(\lambda - \alpha)$ no se encuentra restringido a ser distinto de cero y si se considera a la excitación como nula es posible establecer una ecuación en que el miembro derecho es cero como se muestra a continuación.

$$\left(\frac{\lambda - \alpha}{\lambda}\right)V_c[kT] = 0 \longrightarrow (\lambda - \alpha) = 0 \longrightarrow \lambda = \alpha$$

Con lo cual puede proponerse una solución a la ecuación tanto para la ecuación en diferencias sin excitación alguna a la cual se le denomina solución homogénea o respuesta libre del sistema y es la que se muestra

$$V_c[kT] = K_h\, \alpha^{kT} \ldots\ldots (25)$$

donde K es el valor de la condición inicial en k=0.

Para la solución particular se utiliza el operador anulador de una constante , que es la primera diferencia hacia atrás,

$$\nabla = (1 - \lambda^{-1}) = \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda}\right)$$

transformando así la ecuación en diferencias a una ecuación en diferencias homogénea. Por lo que

$$\left(\frac{\lambda - \alpha}{\lambda}\right)\left(\frac{\lambda - 1}{\lambda}\right) V_c[kT] = \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda}\right)[\beta\, V[kT]] \longrightarrow \left(\frac{\lambda - \alpha}{\lambda}\right)\left(\frac{\lambda - 1}{\lambda}\right) V_c[kT] = 0 \ldots\ldots (26)$$

de donde por lo señalado en párrafos anteriores

$$(\lambda-\alpha)(\lambda-1)=0 \ldots\ldots(27)$$

tiene las sgtes. raíces

$$\lambda=1 \;\; y \;\; \lambda=\alpha$$

Por lo que la solución propuesta para la ecuación no homogénea o respuesta forzada es

$$V_c\,[kT]=K_{f1}1^k+K_{f2}\,\alpha^k \;=\; K_{f1}+K_{f2}\,\alpha^k \;\ldots\ldots(28)$$

De manera similar a la ecuación diferencial la ecuación en diferencias también requiere de la evaluación de las constantes para expresar de manera especifica el modelo discreto que describe el comportamiento del sistema , para ello se deben utilizar las condiciones iniciales.

$$V_c(t=0^-\,)=V_c[kT=0^-]=3[V]\,y\;\; V_c(t=0^+\,)=V_c[kT=0^+\,]=0\;[V]$$

por lo que es claro que para la respuesta libre obtenida desde la ecuación (17) se tiene que :

$$V_c[kT=0^-]=K_h\,\alpha^0 \;\longrightarrow 3[V] \;=\; K_h \ldots\ldots(29)$$

por lo que la respuesta libre en tiempo discreto que se graficará es

$$V_c[kT]=3\;\alpha^k \ldots\ldots(30)$$

De la ecuación (28) se establece que

$$V_c[kT=0^+]=0=K_{f1}1^0+K_{f2}\,\alpha^0 \;\longrightarrow 0=\;K_{f1}+K_{f2} \;\;\longrightarrow\; -K_{f1}=\;K_{f2}$$

por lo que

$$V_c[kT]=\;K_{f1}+K_{f2}\,\alpha^k \;\ldots\ldots(31)$$

y de manera similar a lo hecho para la ecuación diferencial se puede utilizar la ecuación (20) para determinar el valor de la constante

$$V_c[kT] - \alpha\, V_c[(k-1)T] = \beta\, V[kT]$$

por lo que sustituyendo la solución propuesta

$$(\ K_{f1} - K_{f2}\,\alpha^k\ ) - \alpha\,(\ K_{f1} - K_{f2}\,\alpha^{k-1}\ ) = \ \beta\, V[kT]$$

$$K_{f1} - \ K_{f1}\,\alpha^k - \ \alpha\ \ K_{f1}\ +\ \ K_{f1}\ \ \alpha^k\ =\ \beta\, V[kT]$$

$$K_{f1} - \ \alpha\ \ K_{f1}\ \ =\ \beta\, V[kT]\ \ldots\ldots(32)$$

con los valores originales para α y β

$$K_{f1}\ (\ 1 - \ \alpha\ )\ \ =\ \beta\, V[kT]$$

$$K_{f1}\ (\ 1 - \left[\frac{RC}{RC+T}\right])\ \ =\ \left[\frac{T}{RC+T}\right]\ V[kT]$$

$$K_{f1}\ [(RC+T\ +\ RC)/(RC+T)]\ \ \ =\ [T/(RC+T)]\ \ V[kT]$$

$$K_{f1}\ \ \left[\frac{T}{RC+T}\right]\ \ =\ \left[\frac{T}{RC+T}\right]\ V[kT]$$

$$K_{f1}\ \ \ \ =\ V[kT]\ \ldots\ldots(33)$$

Por lo que finalmente el voltaje forzado el en capacitor en tiempo discreto es

$$V_c\,[kT] = \ V[kT] + \ V[kT]\,\alpha^k\ \longrightarrow\ V_c\,[kT]\ \ =\ V[kT]\,(\ 1\ +\ \alpha^k\ )$$

$$V_c\,[kT] = \ V[kT]\ \left(1 - \ \left[\frac{RC}{RC+T}\right]^k\right)\ldots\ldots(34)$$

Que es la ecuación que se graficará como respuesta forzada en tiempo discreto con el sgte. programa

```
% RC_respuesta_escalon_discreta_forzada.m
clf;
R=10E3;                 %% resistencia de ? kiloohms
C=10E-6;                %% Capacitor de ? microfaradios
V1=3;                   % voltaje de Excitación 1 volt
V2=3;                   %% condición inicial de respuesta libre
amp=V1+1;
T=.5;                   %% período de muestreo al menos 2 veces menor que
lamda
RC=(R*C);
```

```
lamda=(1/(RC));        %% constante de tiempo
t_max=10;              %% limite superior de tiempo
n0=(t_max/T)+1;        %% total de muestras sobre el eje del tiempo
kT=[0:T:t_max];        %% muestras de 0 a t_max sg cada T segundos
n1=(t_max/T)+1         %% vector de muestras para instante de 0 a n-1 este
se debe usar para el tren de impulsos

Vcc=V1*(1-exp(-kT.*lamda));
plot(kT,Vcc,'-b');
title ('Respuesta Forzada a Excitación Escalón de un Sistema Discreto de
1er Orden');
xlabel('Tiempo (KT) en [sg]');
ylabel('Amplitud en [V]');
grid on;
axis([0,t_max+1,0,amp]);
hold on;
alfa=((RC)/(RC+T))
x=(alfa).^(kT);
Vcd=(V1 - (V1*(x)));
plot(kT,Vcd,'or');   % usar plot o stem en esta linea
escalon_d=[ones(1,(n0))];
V1_escalon_d=V1.*escalon_d;
stem(kT,V1_escalon_d,'^g');  %active y desactive este reglon para mejor
observación
legend('Respuesta Forzada a Escalón Continua ','Respuesta Forzada a
Escalón Discreto','Escalón Discreto');
hold off;
```

El cual al ejecutarse debe producir la sgte. salida.

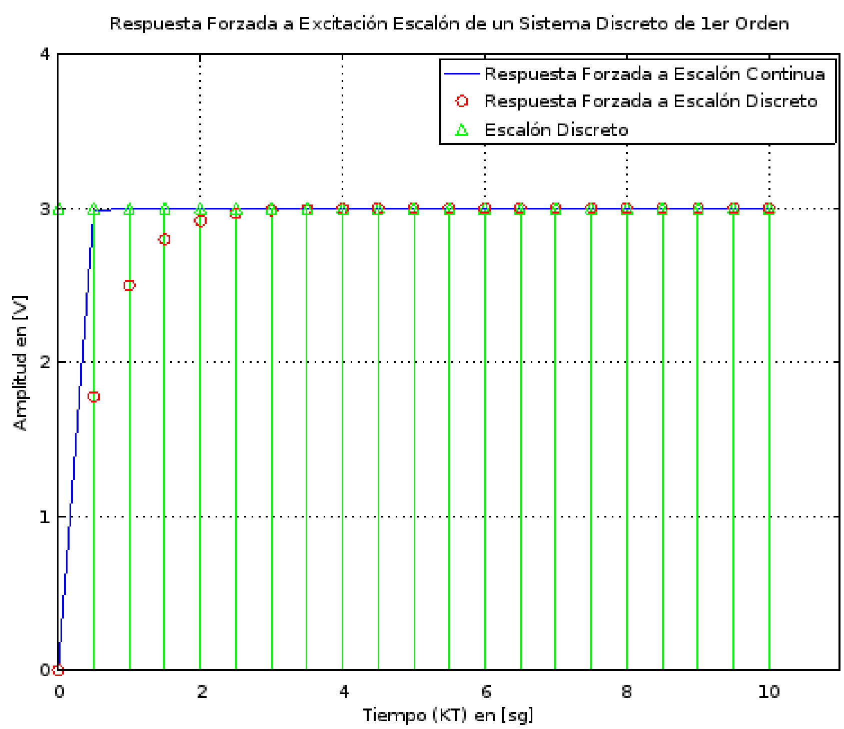

Figura 3.- Respuesta Forzada a Escalón Discreto de un Circuito RC Serie.

1.2.4 Aproximación por Método de Euler

Cabe señalar que existe una forma de aproximar la ecuación en diferencias a partir de la ecuación diferencial que se conoce como método de Euler y se desarrolla a continuación :

$$\frac{dV_c(t)}{dt} = \frac{V(t)}{RC} - \frac{1}{RC}V_c(t) \dots \dots (35)$$

de donde se puede establecer la sgte. función

$$\frac{dV_c(t)}{dt} = g\ (\ t\ , y\ (t)) \dots \dots (36)$$

por lo que

$$g\left(\ t\ , y\ (t)\right) = \frac{V(t)}{RC} - \frac{1}{RC}V_c(t) \dots \dots (37)$$

y considerando la ecuación (14) con t=kT para el valor anterior de t y t+T =kT+T para el sgte. valor de t es posible establecer lo sgte.

$$\frac{V_c[kT] - V_c[(k-1)T]}{T} + \frac{1}{RC}V_c[kT] = \frac{V[kT]}{RC} \dots \dots (38)$$

es claro que se puede definir el sgte. valor del voltaje del capacitor como sigue:

$$V_c\ [\ (k+1)T] = V_c\ [kT] + T\ \left[\frac{V\ [kT]}{RC} - \frac{V_c\ [kT]}{RC}\right] \dots \dots (39)$$

o bien para este caso concreto

$$V_c[\ (k+1)T] = V_c[kT] + T\left[\frac{V\ [kT]}{RC} - \frac{V_c\ [kT]}{RC}\right] \longrightarrow V_c[\ (k+1)T] = V_c\ [kT] + Tg\big[\ V[kT]\ , V_c\ [kT]\big]$$

que es lo que se utilizará para programar la ecuación en diferencias por medio del método de Euler como se muestra a continuación.

```
% Euler2.m
Ts = .05           % Periodo de muestreo
```

```
t_max=2;
t = [0:Ts:t_max];       % Matriz renglón de muestras de tiempo
R=10E+03;
C=10E-6;
tau=(1/(R*C));
Vdc=1;
amp=Vdc+1;
% Calculo de la respuesta exacta
y = 1-exp(-tau.*t);    % Repuesta forzada exacta
% Cálculo de la solución aproximada usando método de Euler
yapr = zeros(size(t));
yapr(1) = 0;       % Condicion inicial.
for k = 1:length(yapr)-1 ,
  g =(((-Vdc*yapr(k))+Vdc)*tau);
  yapr(k+1) = yapr(k)+Ts*g;
end;
% Grafica exacta y Solución aproximada.
clf;
subplot(2,1,1);
plot(t,y,'b-',t,yapr,'ro');
grid on;
title('Soluciones Exacta y approximada para un circuito RC');
xlabel('Tiempo (sec)');
ylabel('Amplitud');
axis([-.05 ,t_max,0,amp]);
hold on;
% Calculo y grafica del porcentaje del error aproximado.
err_pct = (yapr-y)./y*100;
subplot(2,1,2);
plot(t,err_pct,'ro'); grid
plot(t(2:length(t)),err_pct(2:length(t)),'bo'); grid
title('Porcentaje de error de la aproximación');
xlabel('Tiempo (sec)');
ylabel('Error (%)');
subplot(2,1,1);
legend('Solución Exacta','Solución Aproximada','location','SouthEast');
```

El cual produce la sgte. salida

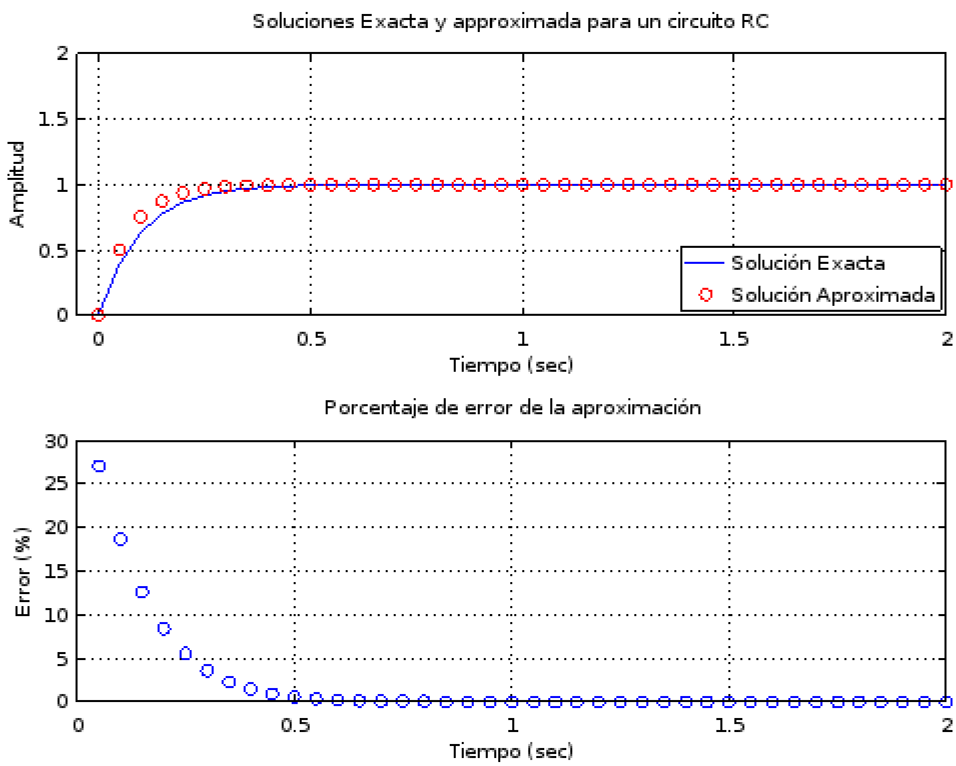

Figura 4.- Comparación entre Aproximación de Euler y Solución Continua o Exacta

1.2.5 Obsevaciones .

Se debe observar que el primer método utilizado para aproximar y obtener la respuesta usando la ecuación en diferencias es un método que converge hacia respuesta permanente de manera muy lenta y eso se aprecia al comparar las respuestas obtenidas en la ejecución del programa para tiempo discreto en comparación con los obtenidos en tiempo continuo que converge rápidamente a los valores permanentes o definitivos en un tiempo pequeño. Otro punto importante de señalar es que también debe considerarse es que finalmente las simulaciones tanto en tiempo continuo como discreto son métodos numéricos para aproximar el comportamiento real del sistema. También se debe observar que por la propia naturaleza de la aproximación exponencial , en tiempo continuo , concurre rápidamente al valor final de la respuesta y que una aproximación rectangular la usada en el análisis de tiempo discreto y es mucho más lenta para aproximarse a la respuesta permanente. Cabe mencionar que la simulación del circuito en tiempo continuo empieza con una respuesta forzada que asegura la condición inicial para una respuesta libre y de esta manera aproximar de manera númerica el ciclo de carga y descarga de un capacitor.

1.3. Material y equipo

Computadora Personal con Matlab Instalado.

Impresora o capturador de pantalla

1.4 Actividad Previa

Obtener los modelos matemáticos apropiados para los valores de las tablas 1 y 2 y los puntos 1.5.1 a 1.5.7 de esta práctica

1.5.0 Desarrollo

1.5.1. Respuesta en Tiempo Continuo .

Determine el voltaje en capacitor tiempo continuo solucionando la ecuación diferencial del circuito de la figura 1. Para respuesta Libre y Forzada.

1.5.2. Respuesta Tiempo Discreto.

Determine el voltaje en capacitor tiempo discreto encontrando la solución de la ecuación diferencias para el circuito de la figura 1. Para respuesta Libre y Forzada.

1.5. 3. Simulación Respuesta Forzada .-Capture el sgte. programa para obtener respuesta forzada en tiempo continuo.

```
%% RC_respuesta_escalon_forzada.m
clf;
R=10E3; %% resistencia de 10 kiloohms
C=10E-6; %% Capacitor de 10 microfaradios
Vdc=3;  %% voltaje de Excitación 1 volt
t=[0:0.0001:3]; %% tiempo desde 0 a 1 segundo a intervalos de 0.0001
segundo
vc_t=Vdc*(1-exp(-1/(R*C)*t)); %% respuesta forzada
hold on
t3=-1:0.01:3;
g_escalon=[zeros(1,100),ones(1,100),ones(1,100),ones(1,101)];
Vdc_g_escalon=Vdc.*g_escalon;
plot(t,vc_t,'or',t3,Vdc_g_escalon,'k','linewidth',5);%% grafica 't' y
't2'  en eje 'x' , 'vc_t' y 'vc_t2' en el eje 'y' con circulos en rojo
title ('Respuesta Forzada a Excitación Escalón para Circuito RC
Serie');
xlabel('Tiempo en (sg)');
ylabel('Amplitud de Vc(t) en [V]');
axis([-1,3.0,-1, (Vdc+1)]);%% eje 'x' desde 0 a 2.5 segundos y eje 'y'
de 0 a 5.1
grid on;
legend('Respuesta Forzada','Excitación Escalón');
```

Que produce la sgte. salida al ejecutarse.

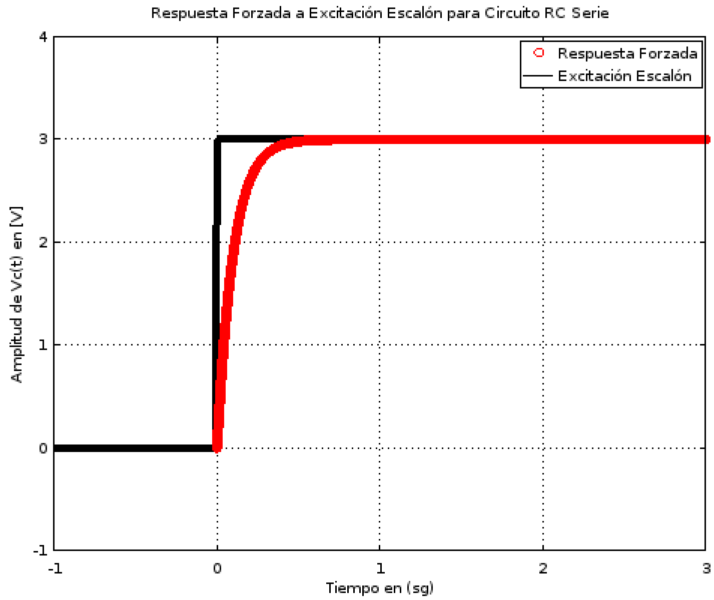

Figura 5.-Respuesta Forzada a Excitación de Tipo Escalón de un Sistema de Primer Orden en Tiempo Continuo

Modifique el programa mostrado para siguientes valores de R y C

Tabla 1

R [ohms]	C [Fd]	1/(R*C)
100	20 E -6	
100 E 3	20 E-6	
100 E4	20 E -6	
100 E 5	20 E -6	
100 E 6	20 E-6	

especificándolo en la figura , para almacenarlo con otro nombre. Ejecútelos y adicione a su reporte sus graficas y comentarios.

1.5.4. Simulación Respuesta Libre .Capture el sgte. programa para obtener respuesta libre en tiempo continuo.

```
%% RC_respuesta_libre.m
%% Version continua de respuesta libre ante condicion inicial
clf;
R=10E3; %% resistencia de 10 kiloohms
C=10E-6; %% Capacitor de 10 microfaradios 6
Vdc=3;  %% voltaje de Excitación 3 volt
Vdc2=3;  %% condición inicial de respuesta libre
```

```
t2=0:0.0001:3;  %% tiempo desde 0 a 1 segundo a intervalos de 0.0001
segundo
vc_t2=Vdc2*(exp(-1/(R*C).*(t2)));%% respuesta libre
hold on;
plot(t2,vc_t2,'-b','linewidth',2);%% grafica "t" y "t2"  en eje "x" ,
"vc_t" y "vc_t2" en el eje "y" con circulos en rojo
title ('Respuesta Libre para Circuito RC Serie');
xlabel('Tiempo en (sg)');
ylabel('Amplitud de V(t) en [V]');
axis([-1,3.0,-1, (Vdc+1)]);%% eje "x" desde 0 a 2.5 segundos y eje "y"
de 0 a 5.1
grid on;
legend('Respuesta Libre');
```

Cuya ejecución produce la sgte. gráfica

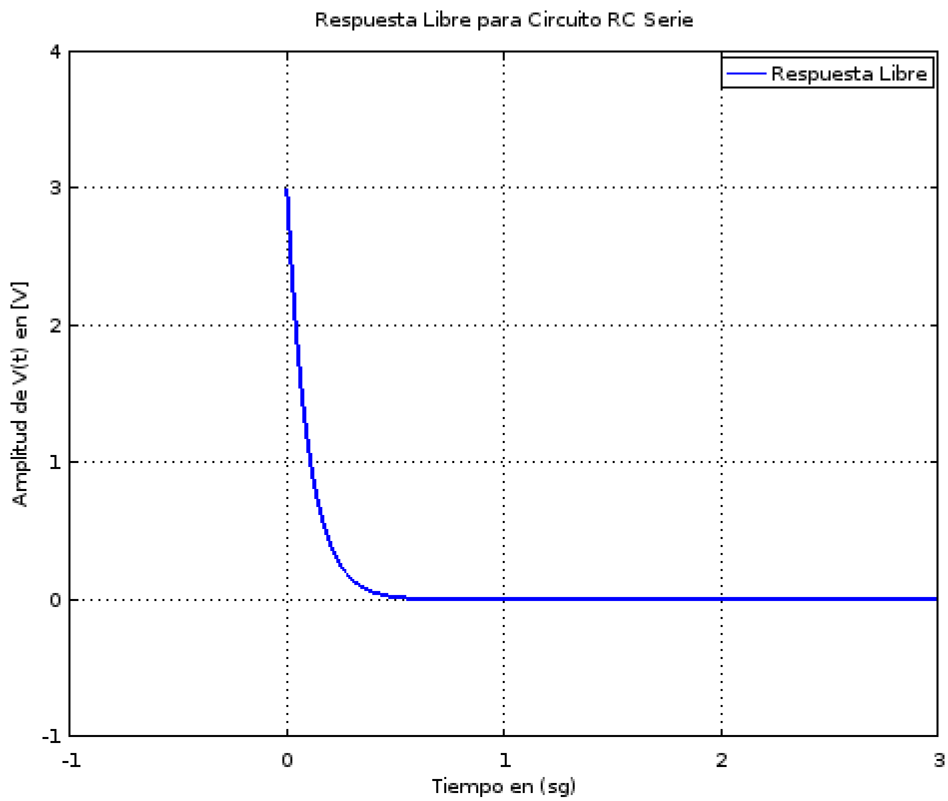

Figura 6 .- Respuesta Libre en Tiempo Continuo

Modifique el programa mostrado para siguientes valores de R , C y condición inicial

Tabla 2

R [ohms]	C [Fd]	1/(RC)	Condición Inicial [V]
100	20E-6		3

100E3	20E-6		3
100E4	20E-6		3
100E6	10E-6		3

especificándolo en la figura , para almacenarlo con otro nombre. Ejecútelos y adicione a su reporte sus gráficas y comentarios.Recuerde que debe modificar la amplitud de la gráfica para que se aprecien los resultados.

1.5.5.- SimulacionRespuesta Forzada Discreta. Capture el sgte. programa para obtener respuesta forzada en tiempo discreto.(use el análisis previo)

```
% RC_respuesta_escalon_discreta_forzada.m
clf;
R=10E3;                 %% resistencia de ? kiloohms
C=10E-6;                %% Capacitor de ? microfaradios
V1=3;                   % voltaje de Excitación 1 volt
V2=3;                   %% condición inicial de respuesta libre
amp=V1+1;
T=.5;                   %% período de muestreo al menos 2 veces menor que
lamda
RC=(R*C);
lamda=(1/(RC));         %% constante de tiempo
t_max=10;               %% limite superior de tiempo
n0=(t_max/T)+1;         %% total de muestras sobre el eje del tiempo
kT=[0:T:t_max];         %% muestras de 0 a t_max sg cada T segundos
n1=(t_max/T)+1          %% vector de muestras para instante de 0 a n-1
este se debe usar para el tren de impulsos

Vcc=V1*(1-exp(-kT.*lamda));
plot(kT,Vcc,'-b');
title ('Respuesta Forzada a Excitación Escalón de un Sistema Discreto
de 1er Orden');
xlabel('Tiempo (KT) en [sg]');
ylabel('Amplitud en [V]');
grid on;
axis([0,t_max+1,0,amp]);
hold on;
alfa=((RC)/(RC+T))
x=(alfa).^(kT);
Vcd=(V1 - (V1*(x)));
plot(kT,Vcd,'or');   % usar plot o stem en esta linea
escalon_d=[ones(1,(n0))];
V1_escalon_d=V1.*escalon_d;
stem(kT,V1_escalon_d,'^g');  %active y desactive este reglon para
mejor observación
legend('Respuesta Forzada a Escalón Continua ','Respuesta Forzada a
Escalón Discreto','Escalón Discreto');
hold off;
```

Al ejecutarlo se obtiene la sgte. figura

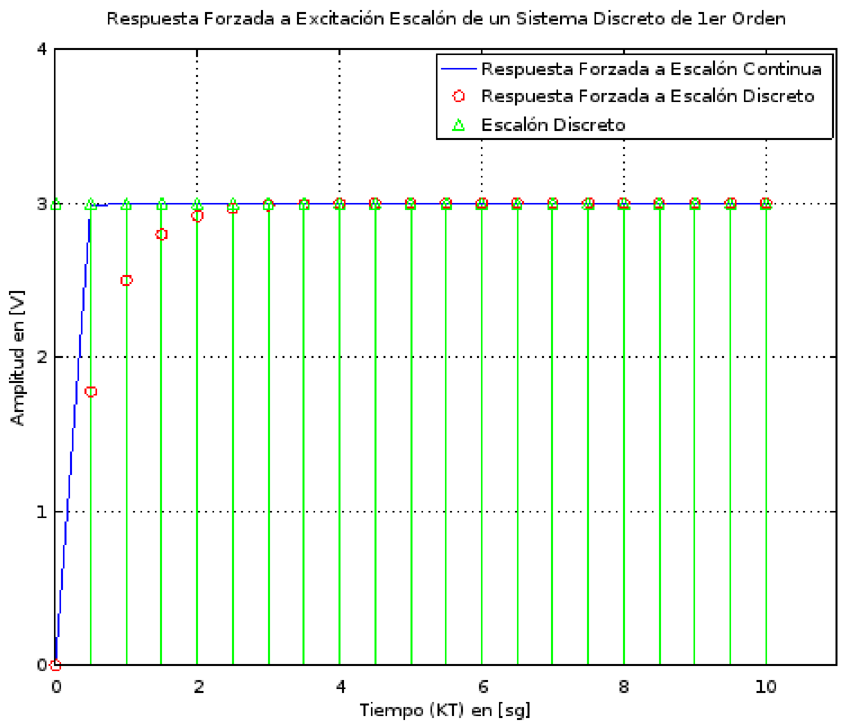

Figura 7.- Respuesta a Excitación Escalón de un Sistema Discreto de Primer Orden

En este programa realice modificaciones con respecto del período de muestreo para T=1.0 [sg],T=0.5 [sg],T=0.2 [sg],T=0.1 [sg] en distintos programas manera que en la gráfica aparezca el periódo de muestreo.

Adicione las gráficas y sus comentarios al reporte de esta práctica.

1.5.6. Simulación de Respuesta Libre Discreta. Capture el sgte. programa para obtener respuesta libre en tiempo discreto.(use el análisis previo)

```
% RC_respuesta_discreta_libre.m
clf;
R=10E3;                 %% resistencia de ? kiloohms
C=10E-6;                %% Capacitor de ? microfaradios
V1=3;                   % voltaje de Excitación 1 volt
V2=3;                   %% condiciÃ³n inicial de respuesta libre
amp=V1+1;
T=.5;                   %% período de muestreo al menos 2 veces menor que
tau
RC=(R*C)
```

```
lamda=(1/(RC))        %% constante de tiempo
t_max=10              %% limite superior de tiempo
n0=(t_max/T)+1        %% total de muestras sobre el eje del tiempo
kT=[0:T:t_max];       %% muestras de 0 a t_max sg cada T segundos
n1=(t_max/T)+1        %% vector de muestras para instante de 0 a n+1
este se debe usar para el tren de impulsos

Vcc=V2*(exp(-kT.*lamda));
plot(kT,Vcc,'-b');
title ('Respuesta Libre de un Sistema Discreto de 1er Orden');
xlabel('Tiempo (KT) en [sg]');
ylabel('Amplitud en [V]');
grid on;
axis([0,t_max+1,0,amp]);
hold on;
alfa=((RC)/(RC+T))
x=(alfa).^(kT);
Vcd=((V2.*(x)));
plot(kT,Vcd,'or');   % usar plot o stem en esta linea
legend('Respuesta Continua Libre','Respuesta Discreta Libre');
hold off;
```

Sobre este programa haga modificaciones con respecto del período de muestreo para T=1.0 [sg],T=0.5 [sg],T=0.2 [sg],T=0.1 [sg] en distintos programas de manera que en la gráfica aparezca el periódo de muestreo.

Adicione las gráficas y sus comentarios al reporte de esta práctica.

1.5.7.-Respuesta al Pulso Discreto. A partir de lo realizado diseñe, construya y ejecute un programa que obtenga la respuesta discreta a un pulso en tiempo continuo de al menos 4 segundos.

1.4.0 Cuestionario

Desde sus observaciones a las simulaciones realizadas en matlab conteste las sgtes. preguntas.

1.-¿Qué sucede con las gráficas de tiempo continuo al aumentar las resistencias y capacitores?

2.-¿Explique el comportamiento observado en la pregunta anterior desde el punto de vista de la E.D.O?

3.-¿Que sucedió al con la respuesta libre al aumentar o disminuir las condiciones iniciales con los distintos valores de R y C?

4.-¿Que sucedió con la respuesta discreta al aumentar o disminuir el período de muestreo en la respuesta en tiempo discreto ?

5.-¿Cómo explica usted el fenómeno que sucede en la pregunta anterior?

Bibliografía

Digital Signal Processing

A Computer-Based Approach

Third Edition

Sanjit K. Mitra

Mc Graw Hill International Edition

Singapore 2006

-

Tratamiento Digital de Señales

Principios, algoritmos y aplicaciones

3ra. Edición

John G. Proakis

Dimitris G. Manolakis

Pearson Educación

4ta. Reimpresión

España 2000

-

Métodos Numéricos

Luthe, Olivera, Schutz

Ed. Limusa

México 1980.

-

Ecuaciones Diferenciales y en Diferencias

Próspero Garcia

Ed. Limusa

México

-

Discrete Time Control Systems

Katsuhiko Ogata

Prentice Hall Inc.

USA 1987.