Análisis de Sistema Eléctrico de 2º orden de TC

G. Mata H.

27 de enero de 2017

Índice general

1.1. Sistema lineal e invariante en el tiempo SLIT 2
1.2. Equipo y material 5
1.3. Actividad de investigación y desarrollo previo 5
1.4. Actividad: Sistema de 2° orden 6
1.5. Bibliografía 7

Objetivo de aprendizaje

El alumno conocerá un sistema de segundo orden de forma experimental, a tavés de identificar el modelo, la representación matemática, la función de transferencia, los parámetros del sistema y el comportamiento a una entrada escalón.

1.1. Sistema lineal e invariante en el tiempo SLIT

El modelo general de un sistema LIT se indica en la Ec.(1.1), en donde los coeficientes son constantes.

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = \sum_{n=0}^{M} b_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} \tag{1.1}$$

El orden del sistema está establecido por la derivada de mayor orden. También corresponde al número de elementos que almacenan energía.

El sistema General de Segundo Orden es el indicado en la Ec.(1.2),

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + a_i \frac{dy}{dt} + a_0 y(t) = kx(t) \tag{1.2}$$

misma que se puede expresar en términos de sus parámetros como

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\zeta w_n \frac{dy}{dt} + {w_n}^2 = {w_n}^2 x(t) \tag{1.3}$$

siendo:
w_n La frecuencia natural del sistema
ζ La razón de amortiguamiento

La función de transferencia se obtiene mediante la transformada de Laplace de la Ec.(1.3),

$$H(s) = \frac{{w_n}^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + {w_n}^2} \tag{1.4}$$

Comportamiento del Sistema

Con la ecuación característica, a partir de la función de transferencia obtenida en la Ec.(1.4), se obtienen los polos del sistema mediante:

$$s_{12} = \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{(2\zeta\omega_n)^2 - 4\omega_n^2}}{2}$$

Al simplificar se obtiene

$$s_{12} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

De aqui que las raíces (los polos) pueden adquirir cuatro valores:

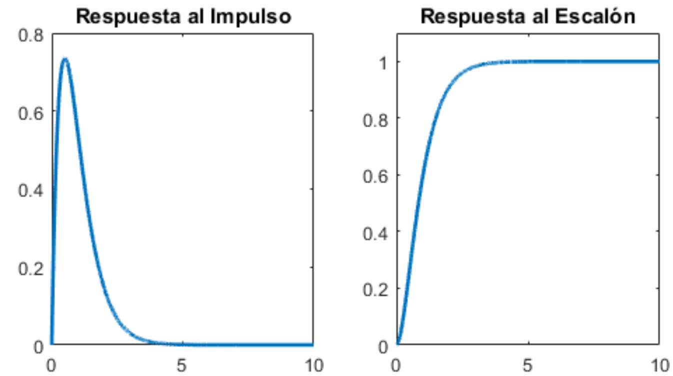
Caso 1:
Si $\zeta = 1$, entonces: $s_{12} = -\omega_n$, siendo las raíces reales e iguales., que al sustituir en la Ec.(1.4) y expandir en fracciones parciales se obtiene:

$$H(s) = \frac{{\omega_n}^2}{(s+\omega_n)^2} = \frac{A}{(s+\omega_n)^2} + \frac{B}{s+\omega_n}$$

Como son raíces reales y repetidas, se tiene que la respuesta al impulso del sistema va a ser de la forma:

$$h(t) = (Ate^{-\omega_n t} + Be^{-\omega_n t})u(t)$$

donde A y B son constantes a determinar. La respuesta al impulso y la respuesta al escalón tienen la forma mostrada en la figura 1.1.



A este comportamiento se le conoce como Críticamente Amortiguado.

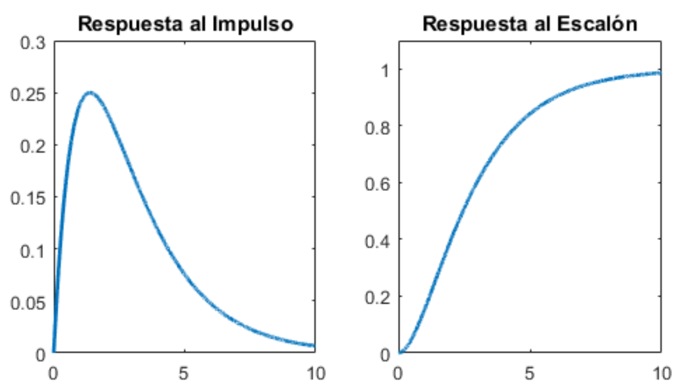
Caso 2:
Si $\zeta > 1$, entonces: $s_{12} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$.

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{(s+s_1)(s+s_2)} = \frac{A}{(s+s_1)} + \frac{B}{(s+s_1)}$$

Como son raíces reales, diferentes y negativas, se tiene que la respuesta al impulso del sistema va a ser de la forma:

$$h(t) = (Ae^{-s_1 t} + Be^{-s_2 t})u(t)$$

donde A y B son constantes a determinar. La respuesta al impulso y la respuesta al escalón tienen la forma general mostrada en la figura 1.1.



A este comportamiento se le conoce como Sobreamortiguado.

Caso 3:

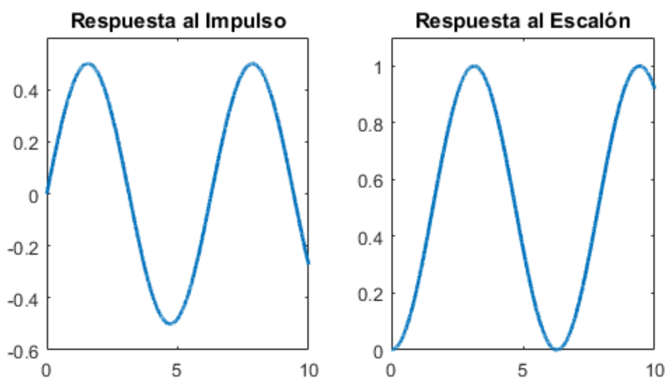
Si $\zeta = 0$, entonces: $s_{12} = \pm j\omega_n$
Sustituyendo se obtiene:

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + j\omega_n)(s - j\omega_n)} = \frac{A}{(s - j\omega_n)} + \frac{A^*}{(s + j\omega_n)}$$

Como son raíces imaginarias conjugadas, se tiene que la respuesta del sistema va a ser de la forma:

$$h(t) = (Ae^{j\omega_n t} + A^* e^{-j\omega_n t})u(t)$$

donde A es una constante a determinar. La respuesta al impulso y la respuesta al escalón tienen la forma general mostrada en la figura 1.1.



A este comportamiento se le conoce como Oscilatorio.

Caso 4:

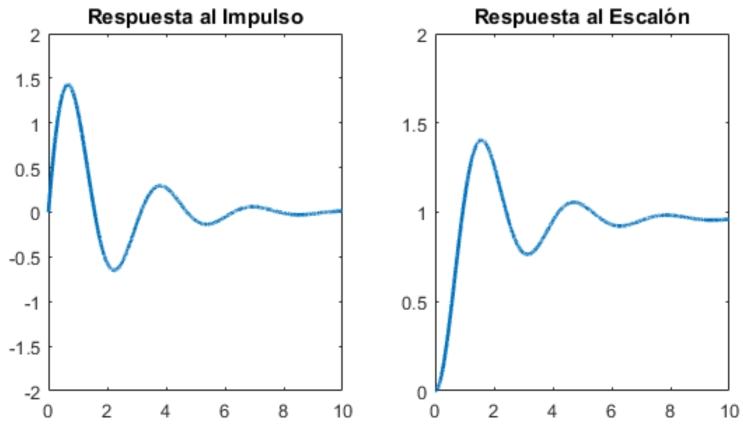
Si: $0 < \zeta < 1$, entonces: $s_{12} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + s_1)(s + s_2)}$$

Como son raíces complejas conjugadas, se tiene que la respuesta al impulso del sistema va a ser de la forma:

$$h(t) = [Ae^{-\zeta\omega_n t}cos((\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2})t) + Be^{-\zeta\omega_n t}sen((\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2})t)]u(t)$$

donde A y B son constantes a determinar. A este comportamiento se le conoce como Subamortiguado.

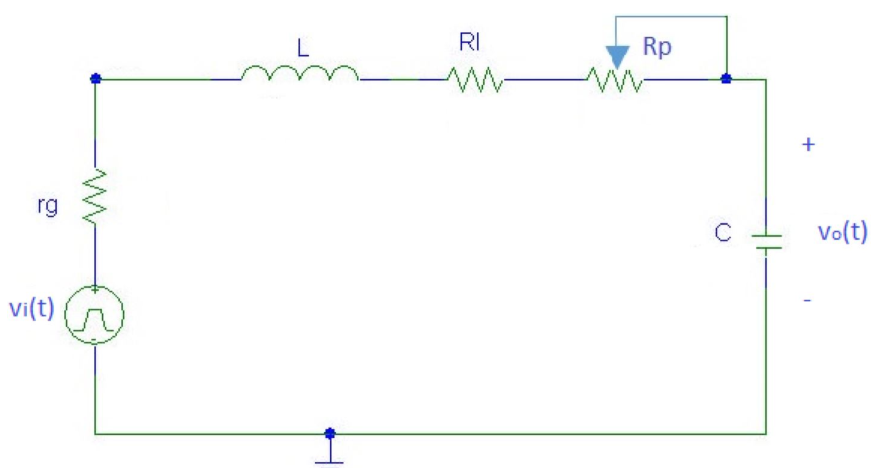


1.2. Equipo y material

- Osciloscopio
- Generador de formas de onda
- 1 potenciómetro de $2\,k\Omega$
- 1 capacitor cerámico de $0.22\mu F$ a 25 V o mayor
- 1 inductor de $50mH$.
- 6 cables caimán-caimán
- 6 cables banana-banana
- 6 cables banana-caimán
- 1 protoboard

1.3. Actividad de investigación y desarrollo previo

En el sistema eléctrico mostrado en la figura $v_i(t)$ es la entrada y $v_o(t)$ la salida. El modelo es el indicado en la Ec. (1.5).



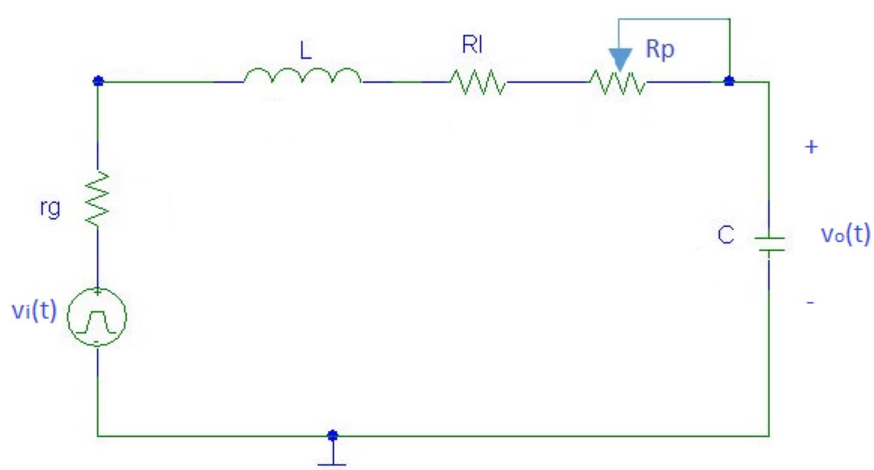
$$LC\frac{d^2v_o(t)}{dt^2}+R_eC\frac{dv_o(t)}{dt}+v_o(t)= v_i(t) \tag{1.5}$$

en donde
L es un inductor de $50mH$
C es un capacitor de $0.22\mu F$
$R_e = r_g + R_l + R_p$ es la resistencia equivalente con los valores de $50\,\Omega$, $50\,\Omega$ y $2000\,\Omega$, respectivamente.

1. Determine la función de transferencia del sistema (FTS).
2. Identifique los coeficientes de la FTS con los de la Ec.(1.4) y exprese la frecuencia natural del sistema w_n y la razón de amortiguamiento ζ en términos de R_e, L, C .
3. Con $R_p = 0$ determine el valor de ζ y el de w_n.
4. Obtenga las raíces del sistema y dibuje el diagrama de polos y ceros.
5. Determine y grafique la respuesta al impulso y diga que comportamiento tiene el sistema.
6. Determine y grafique la respuesta al escalón.
7. Con $R_p = 2000\,\Omega$, máximo valor, determine el valor de ζ y el de w_n.
8. Obtenga las raíces del sistema y dibuje el diagrama de polos y ceros.
9. Determine y grafique la respuesta al impulso y diga que comportamiento tiene el sistema.
10. Determine y grafique la respuesta al escalón.
11. Determine el valor de R_p con el que se obtiene un comportamiento criticamente amortiguado.
12. Obtenga las raíces del sistema y dibuje el diagrama de polos y ceros.
13. Con ese valor determine y grafique la respuesta al impulso.
14. Determine y grafique la respuesta al escalón.

1.4. Actividad: Sistema de 2° orden

1. Genere una señal cuadrada periódica con una frecuencia de 100Hz. esta señal corresponde a una suma infinita de señales escalón.
2. Arme el circuito de la figura y alimente con la señal cuadrada.



3. Conecte un canal del osciloscopio en la entrada del circuito y otro canal en la salida.

4. Coloque el cursor del potenciómetro en el máximo valor y observe en el osciloscopio la señal de salida. Con base en la señal observada:

   a) Obtenga una copia de la forma de onda experimental y compare la respuesta teórica con la respuesta experimental.

   b) Especifique como se le nombra a este comportamiento del sistema.

5. Con $R_p = 0$ determine:

   a) Obtenga una copia de la forma de onda experimental y compare la respuesta teórica con la respuesta experimental.

   b) Especifique como se le nombra a este comportamiento del sistema.

6. Varíe el valor del potenciómetro al valor encontrado en el punto 11 de la investigación previa, en el osciloscopio se observará, de manera aproximada, que la respuesta al escalón tiene un comportamiento criticamente amortiguado. Obtenga una copia de la forma de onda experimental y compare la respuesta teórica con la respuesta experimental.

7. ¿Se puede lograr de forma experimental observar el comportamiento oscilatorio? Justifique su respuesta.

1.5. Bibliografía

Mata, G.,, Sánchez, V., y Gómez, J. Análisis de Sistemas y Señales con cómputo avanzado. C. de México. Facultad de Ingeniería UNAM, 2002