Señales

Gloria Mata Hernández

11 de noviembre de 2016

Índice general

1.1. Objetivo de aprendizaje

El alumno conocerá e identificará el concepto de señales, a través de la simulación, la generación, el análisis y su modelado, que le servirán para realzar un procesamiento básico de las mismas.

1.2. Introducción Teórica

Señales básicas de tiempo continuo

Las señales base impulso y escalón unitario, en tiempo continuo y en tiempo discreto, son representaciones matemáticas ideales que tienen gran utilidad en la construcción y representación de otras señales.

Impulso unitario, delta de Dirac $\delta(t)$, $u_0(t)$ Es una función especial ya que se define en términos de su área y no de su valor.

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(t)dt = \begin{cases} 1 & t_1 < 0 < t_2 \\ 0 & otro\, valor \end{cases} \tag{1.1}$$

$$\delta(t) = 0 \qquad t \neq 0$$

Las características ideales que definen a $\delta(t)$ son:

- La amplitud de $\delta(t)$ es infinita
- Su duración es 0
- El área de $\delta(t)$ es unitaria

Escalón Unitario $u(t), u_{-1}(t)$

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

Rampa $ramp(t)$, $r(t)$, $u_{-2}(t)$

$$ramp(t) = \begin{Bmatrix} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{Bmatrix} = \int_{-\infty}^{t} u(\lambda)d\lambda = tu(t) \tag{1.3}$$

Rectángulo $rec(t), \Pi(t)$

$$rect(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{1}{2} \\ 0 & |t| > \frac{1}{2} \end{cases} \tag{1.4}$$

Triángulo $tri(t)$

$$tri(t) = \begin{cases} 1 - |t| & |t| < 1 \\ 0 & |t| \geq 0 \end{cases} \tag{1.5}$$

Exponencial Generalizada

$$x(t) = Ce^{rt} \tag{1.6}$$

Exponenciales Complejas

- Exponencial compleja: C es constante y $r = j\omega$

$$x(t) = C\, e^{j\omega t} \tag{1.7}$$

$$x(t) = C\, cos(\omega t) + j\, C\, sen(\omega t)$$

- Exponencial compleja defasada: $C = C_1 e^{j\theta}$ y $r = j\omega$

$$x(t) = C_1 e^{j(\omega t + \theta)} \tag{1.8}$$

$$x(t) = C_1 cos(\omega t + \theta) + jC_1 sen(\omega t + \theta)$$

- Exponencial compleja creciente o decreciente, defasada : $C = C_1 e^{j\theta}$ y $r = r_1 + j\omega$

$$x(t) = C_1 e^{r_1} e^{j(\omega t + \theta)} \tag{1.9}$$

$$x(t) = C_1 e^{r_1} cos(\omega t + \theta) + jC_1 e^{r_1} sen(\omega t + \theta)$$

Sinusoidales en tiempo continuo

La señal senoidal esta dada por

$$x(t) = C\, cos(\omega t + \theta) \tag{1.10}$$

Usando la notación de Euler:

$$C\, e^{j(\omega t + \theta)} = C\, cos(\omega t + \theta) + j\, C\, sen(\omega t + \theta)$$

Señales básicas de tiempo discreto

Muestra unitaria o Delta de Kronecker $\delta[n]$

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \tag{1.11}$$

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

Secuencia Escalón unitario $u[n]$

$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \tag{1.12}$$

Secuencia Rampa $ramp[n]$

$$ramp[n] = \begin{cases} n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \tag{1.13}$$

Exponencial generalizada

$$x[n] = C\alpha^n \tag{1.14}$$

Exponencial Real: C y $\alpha > 1$ son constantes reales.

Exponencial compleja : C es constante, $\alpha = e^{j\omega}$

$$x[n] = Ce^{j(\omega\, n)} \tag{1.15}$$

$$x[n] = C(cos(w\, n) + jsen(w\, n))$$

Exponencial compleja creciente o decreciente, defasada : $C = C_1 e^{j\theta}$, $\alpha = \alpha_1 e^{j\omega}$

$$x[n] = C_1 \alpha_1^n e^{j(\omega\, n + \theta)} \tag{1.16}$$

$$x[n] = C_1 \alpha_1^n (cos(w\, n + \theta) + j sen(w\, n + \theta))$$

Sinusoidales en tiempo discreto

Al igual qu en tiempo continuo, las señales sinusoidales están relacionadas con las exponenciales complejas, mediante la parte real o la parte imaginaria,

$$x[n] = C\, cos(\omega\, n + \theta)$$

o bien,

$$x[n] = C\, sen(\omega\, n + \theta)$$

Señales Par e Impar

Una señal $x(t)$ o $x[n]$ se define como **par** si, para toda t o para toda n es idéntica su reflexión, inversión o transposición en el tiempo en el origen.

$$x(t) = x(-t)$$

$$x[n] = x[-n]$$

Una señal $x(t)$ o $x[n]$ se define como **impar** si, para toda t o para toda n es idéntica su reflexión, inversión o transposición en el tiempo en el origen e invertida en amplitud, esto es:

$$x(t) = -x(-t)$$

$$x[n] = -x[-n]$$

Cualquier señal de tiempo continuo o discreto, se puede descomponer en dos señales: una par y otra impar, o bien, cualquier señal puede expresarse como la suma las correspondientes señales par e impar, es decir, Para señales en TC:

$$Par\{x(t)\} = x_{par}(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)] Impar\{x(t)\} = x_{impar}(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x(t)] \tag{1.17}$$

o bien, para señales en TD:

$$Par\{x[n]\} = x_{par}[n] = \frac{1}{2}[x[n] + x[-n]]$$

$$Impar\{x[n]\} = x_{impar}[n] = \frac{1}{2}[x[n] - x[-n]]$$

En donde la suma de ambas señales producen la señal original $x(t)$ o $x[n]$.

$$x(t) = x_{par}(t) + x_{impar}(t)$$

$$x[n] = x_{par}[n] + x_{impar}[n]$$

1.3. Material y equipo

- Micrófono y bocinas.
- Computadora con Matlab.

1.4. Actividad de trabajo previo

1. Defina las señales singulares escalón y rampa de tiempo continuo y de tiempo discreto, como funciones (**function**), en archivos *.m en Matlab. Nómbrelas respectivamente, las de tiempo continuo como us.m, rs.m, y las de tiempo discreto como ud.m, rd.m. Obtenga la gráfica de cada una de ellas.

2. Con las funciones singulares definidas en la activida del punto 1, obtenga y grafique las siguientes señales:

a) $x_1(t) = u(t-1) - u(t-5)$

b) $x_2(t) = r(t) - r(t-2) - r(t-4) + r(t-6)$

c) $x_1[n] = u[n+1] - u[n-5]$

d) $x_2[n] = r[n+1] - r[n-4]$

3. Para cada una de las señales mostradas en las figuras 1.1 a 1.4 de tiempo continuo y de tiempo discreto, en donde el valor de la señal es cero fuera del intervalo de la gráfica, obtenga lo siguiente:

   a) Exprese y grafique las señales en términos de funciones singulares.

   b) Determine y grafique la correspondiente señal $\{Par\}$.

   c) Determine y grafique la correspondiente señal $\{Impar\}$.

   d) Grafique las señales resultantes $\{Par + Impar\}$.

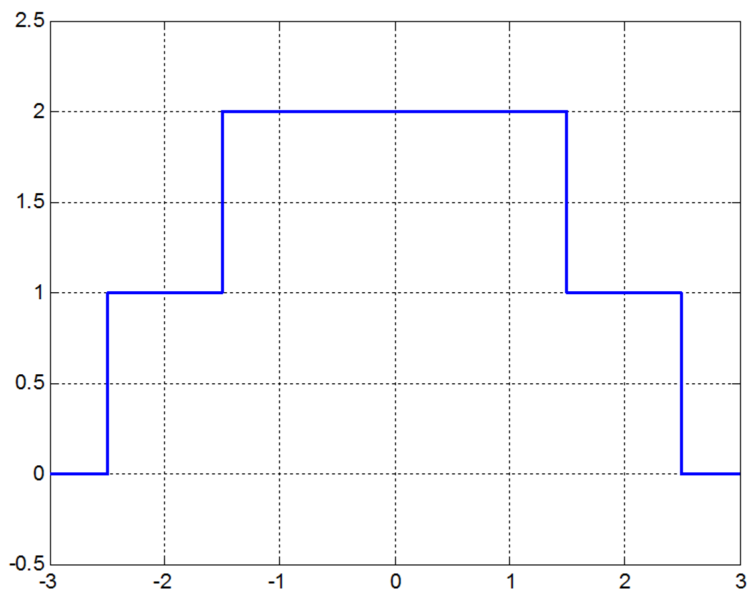

Figura 1.1: Señal de tiempo continuo $x_1(t)$.

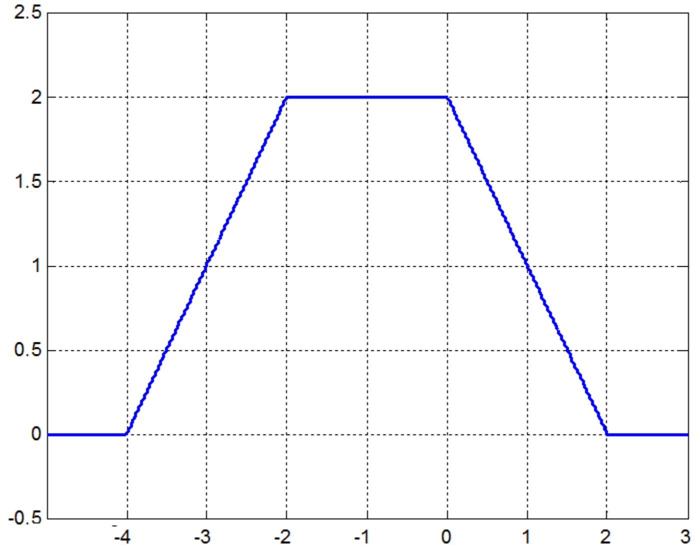

Figura 1.2: Señal de tiempo continuo $x_2(t)$.

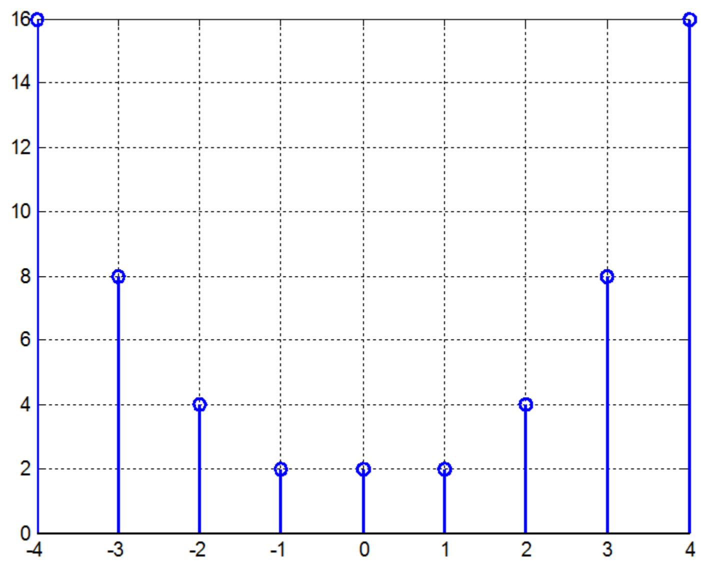

Figura 1.3: Señal de tiempo discreto $x_1[n]$.

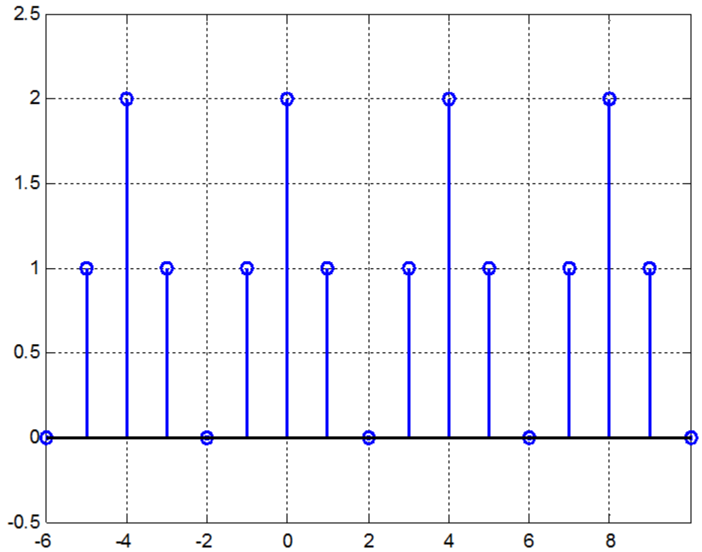

Figura 1.4: Señal de tiempo discreto $x_2[n]$.

4. Considere el par de señales de tiempo continuo y de discreto:
   $x_1(t) = u(t) - u(t-5)$
   $x_2(t) = e^{-2t}u(t)$
   a) Utilizando el comando **subplot(21X)**, grafique $x_1(t)$ y $x_2(t)$.
   b) Realice un cambio de variables y repita la gráfica anterior con $x_1(\tau)$ y $x_2(\tau)$.
   c) Utilizando el comando **plot()**, grafique las dos señales indicadas en cada caso de forma traslapada. Considere el cambio de variable realizado en el punto anterior y el intervalo de $-5 \leq \tau \leq 10$.
      1) $x_1(\tau)$ y $x_2(t-\tau)$ con $t = -2.5$.
      2) $x_1(\tau)$ y $x_2(t-\tau)$ con $t = 0$.
      3) $x_1(\tau)$ y $x_2(t-\tau)$ con $t = 2.5$.
      4) $x_1(\tau)$ y $x_2(t-\tau)$ con $t = 5$.
      5) $x_1(\tau)$ y $x_2(t-\tau)$ con $t = 7.5$.
   d) Con base en la gráficas obtenidas en 4*c*), especifique en cada caso el intervalo de τ en el que el producto de $x_1(\tau)\, x_2(t-\tau) \neq 0$.

1.5. Desarrollo

1.5.1. Actividad: Familiarización señales y su visualización

En esta actividad el estudiante manipula funciones sinusoidales, ya concebidas como señales y se familiariza con la frecuencia y periodo de muestreo.

1. *a*) Genere en Matlab la siguiente señal:
   $x(t) = sin(\omega t)$
   $\omega = 2\pi(10)$

```
t=0:49;
fs=200;  %Frcuencia de muestreo
Ts=1/fs; %Periodo de muestreo
fx=10;
x=sin(2*pi*fx*t/fs) ;
plot(t,x); grid %valores de t tomando en cuenta fs
hold on
stem(t,x)  %valores discretos de t
```

b) Grafique una a una las señales con las frecuencias de muestreo indicadas: $fs = 10, 50, 100, 200, 500$.

c) De manera cualitativa, a partir de que valor de fs se puede identificar la señal $x(t)$ que corresponda a la expresión matemática?.

d) ¿Cual es la función de fs, o bien de Ts?

e) Verifique el periodo de la señal $x(t)$, tomando en cuenta diferentes valores de frecuencia de muestreo $fs = 100, 200, 500$.

```
t=0:49;
fs=100;  %Frcuencia de muestreo
Ts=1/fs; %Periodo de muestreo
fx=10;
x=sin(2*pi*fx*t/fs) ;
plot(t/fs,x); grid %valores de t tomando en cuenta fs
```

1.5.2. Actividad: Generación de señales con Matlab

En esta actividad se establece una asociación de funciones matemáticas generadas con señales físicas.

2. a) Obtenga las siguientes señales: $do = sin(\omega_0 t/fs)$
$re = sin(\omega_1 t/fs)$
$mi = sin(\omega_2 t/fs)$
en donde
$\omega_0 = 2\pi(261.63)$
$\omega_1 = 2\pi(293.7)$
$\omega_2 = 2\pi(329.6)$
$fs = 4000$ y un vector de tiempo de $t = 0 : 4999$.

b) Define un vector "*spa*" de 500 muestras con la función zeros.

c) Genere un vector **notas=[do spa re spa mi spa]**

d) Escuche el vector **notas** generado con la función **sound(notas,fs)**

e) Repita el punto anterior con diferentes frecuencias de muestreo $fs = 2000, 4000, 8000, 16000$.

1.5.3. Adquisición de señales con micrófono

En esta actividad se establece una asociación de señales físicas adquiridas con su representación matemáticas.

3. Utilizando un micrófono, realice la grabación de las señales indicadas. Utilice la función **wavread(filename)** para leer los datos del archivo de audio y recuperar tanto los datos como la tasa de muestreo de las señales de audio.

- Un silbido, de amplitud lo más constante posible.
- La nota de un instrumento musical.
- El sonido de un diapasón

a) Grafique un segmento central de cada una de las señales, identifique y describa la forma de onda.

b) Con la frecuencia de muestreo, determine la frecuencia de cada una de las señales.

1.5.4. Inversión y escalamiento en el tiempo de una señal

En esta actividad el estudiante podrá vincular los conceptos de inversión y escalamiento en el tiempo con una señal real.

4. a) Utilizando un micrófono, grabe un palíndromo.

b) Recupere los valores del palíndromo y la frecuencia de muestreo con la función **wavread()**.

c) Con la función **sound()** escuche el palíndromo.

d) Utilice la función flip() con la señal del palíncromo.

e) Vuelva a escuchar el palíndromo e identifique que fue lo que se relizó.

f) Vuelva a escuchar el palíndromo con diferentes frecuencias de muestreo.

g) Presente la argumentación matemática de lo que realizó en esta actividad.

1.6. Bibliografía

Mata H. Gloria, Sánchez E. Víctor, Gómez G. Juan, (2001), Análisis de Sistemas y Señales con cómputo avanzado. F.I. UNAM