

Síntesis de señales periódicas empleando las series trigonométrica y exponencial de Fourier

**Propuesta de práctica para el laboratorio de las
asignaturas:**

ANÁLISIS DE SISTEMAS Y SEÑALES

y

SEÑALES Y SISTEMAS

Hecha por Antonio Salvá Calleja

Octubre de 2016

Contenido

Objetivo general de aprendizaje	3
1. Teoría Básica acerca de la serie trigonométrica de Fourier (STF)	3
1.1 Condiciones para que una STF converja	3
1.2 Obtención de los coeficientes de una STF	4
1.3 Valor de una STF para los puntos en los que $f(t)$ tiene una discontinuidad finita	5
1.4 Serie exponencial de Fourier	6
2. Descripción general de la práctica	7
2.1 Fenómeno de Gibbs	15
3. Trabajo para el estudiante	17
4. Equipo básico requerido para la realización de esta práctica	17
5. Referencias	18

Objetivo general de aprendizaje: Que el alumno asimile que la representación de una señal periódica usando las series trigonométrica y exponencial de Fourier, son una aproximaciones a la señal original, y se percate de lo que sucede en las discontinuidades finitas que pudiera presentar la señal que se aproxime mediante una de las series en un momento dado.

1. Teoría Básica acerca de la serie trigonométrica de Fourier (STF)

La serie trigonométrica de Fourier (STF), es una entidad matemática que se define frecuentemente de la siguiente manera:

$$STF(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nwt) + b_n \text{sen}(nwt) \dots \dots \dots (1)$$

Donde se aprecia que una STF es una señal periódica con periodo T, conformada por la suma de componentes senoidales cuyas frecuencias son múltiplos de una frecuencia cuyo valor es:

$$w = \frac{2\pi}{T} \dots \dots \dots (2)$$

A las componentes senoidales implicadas se les denomina armónicas. En la práctica un uso frecuente para la STF es el aproximar una señal periódica con periodo T. Si a dicha señal se le denota como f(t), se tendrá:

$$f(t) \approx \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nwt) + b_n \text{sen}(nwt) \dots \dots \dots (3)$$

Donde se aprecia que la señal f(t) es aproximada mediante la suma de componentes armónicos senoidales, cuyas frecuencias son múltiplos de la frecuencia correspondiente al periodo T.

1.1 Condiciones para que una STF converja

Dado que la STF es una serie infinita, para que ésta converja, se requiere que para cualquier punto del periodo de la señal que se pretende aproximar, se satisfagan condiciones matemáticas que para una STF, se ha probado que son las siguientes tres:

1. $\int_{-T/2}^{T/2} | f(t) | dt < \infty$

2. f(t) tiene un número finito de máximos y mínimos dentro del periodo

3. f(t) tiene un número finito de discontinuidades dentro del periodo

A las cuales en la literatura sobre el tema, se les denomina como condiciones de Dirichlet. **Es importante señalar que en la práctica de Ingeniería, las señales con las que se trabaja por lo regular satisfacen las tres condiciones antes mencionadas; esto es, cualquier señal periódica generada en un laboratorio o en situaciones de aplicaciones prácticas de Ingeniería, podrá ser aproximada con una STF.**

En la práctica, para fines de la aproximación de la señal $f(t)$ se usan un número finito de componentes armónicos, esto es, se trabaja con una STF truncada. Al número de armónicas a considerar en un momento dado se le denota aquí con la literal “nc”. Apreciándose que conforme el número de componentes aumenta, la aproximación a la señal $f(t)$ empleando un determinado número de componentes “nc”, es mejor que la obtenida empleando un número de componentes menor que “nc”.

1.2 Obtención de los coeficientes de una STF

Los coeficientes de una STF pueden obtenerse empleando las siguientes ecuaciones:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(nwt) dt \dots \dots \dots (4)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \text{sen}(nwt) dt \dots \dots \dots (5)$$

Si se aproximara la señal $f(t)$ mediante una STF truncada tomando “nc” componentes armónicos, dicha aproximación puede expresarse como:

$$f(t) \approx K_{cd} + \sum_{n=1}^{n=nc} a_n \cos(nwt) + b_n \text{sen}(nwt) \dots \dots \dots (6)$$

Donde K_{cd} representa a la componente de directa de la señal $f(t)$, que viene siendo el valor promedio asociado con ésta.

Considérese ahora el siguiente índice de desempeño:

$$ECM = \int_{-T/2}^{T/2} [f(t) - K_{cd} - \sum_{n=1}^{n=nc} a_n \cos(nwt) + b_n \text{sen}(nwt)]^2 dt \dots \dots \dots (7)$$

Que es el error cuadrático medio entre la señal $f(t)$ y la aproximación de ésta empleando una STF truncada. Se aprecia que este índice de desempeño es una función de $2nc + 1$ variables. Aplicando la teoría de máximos y mínimos para funciones de varias variables independientes [5], puede verse que los $2nc + 1$ valores que minimizan a la función

ECM son: para los coeficientes a_n y b_n con $n= 1, 2, \dots, n_c$, los que se obtienen empleando las ecuaciones (4) y (5), y que el valor de la variable K_{cd} es:

$$K_{cd} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega t) dt \dots \dots \dots (8)$$

Que es la mitad del valor de a_0 , obtenido mediante la ecuación (4) con $n=0$.

Esto es:

$$K_{cd} = \frac{a_0}{2} \dots \dots \dots (9)$$

Además, puede verse que a medida que aumenta el valor del número de armónicas empleadas en una determinada aproximación, el valor mínimo presentado para el ECM expresado en la ecuación (7) disminuye, tendiendo a cero conforme $n_c \rightarrow \infty$.

1.3 Valor de una STF para los puntos en los que $f(t)$ tiene una discontinuidad finita

Acorde con (1), una STF es la suma de funciones continuas; por lo tanto, si ésta converge implica que en ningún punto del periodo la STF presentará discontinuidades, aún cuando la señal $f(t)$ que se pretende aproximar, si las tenga en uno o varios puntos dentro del periodo. Por lo anterior es claro que en los puntos donde $f(t)$ tenga discontinuidades, la STF presentará un valor determinado. **Está probado que para los puntos del periodo donde la $f(t)$ presenta una discontinuidad, la STF asociada converge al valor medio de la discontinuidad.** Esto se expresa mediante las siguientes ecuaciones, en las cuales se denota con la literal t_0 a una determinada abscisa para la cual $f(t)$ presenta una discontinuidad finita.

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \text{sen}(n\omega t) = \frac{1}{2} (f(t_0^-) + f(t_0^+)) \dots \dots \dots (10)$$

Donde:

$$f(t_0^-) = \lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t) \dots \dots \dots (11)$$

$$f(t_0^+) = \lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t) \dots \dots \dots (12)$$

1.4 Serie exponencial de Fourier

Empleando la identidad de Euler se puede expresar una STF de una forma alterna denominada serie exponencial de Fourier (SEF), esto sabiendo que:

$$\cos(n\omega t) = \frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2} \dots\dots\dots(13)$$

$$\text{sen}(n\omega t) = \frac{e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}}{2j} \dots\dots\dots(14)$$

Sustituyendo (13) y (14) en la expresión general para una STF dada en (1), y agrupando términos, la forma genérica de la SEF es:

$$SEF(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n e^{jn\omega t} \dots\dots\dots(15)$$

Donde:

$$c_n = \frac{a_n - jb_n}{2} \dots\dots\dots(16)$$

$$c_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2} \dots\dots\dots(17)$$

Sustituyendo (4) y (5) en (16) y considerando la identidad de Euler, fácilmente se puede ver que los coeficientes de la SEF estarían dados por:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega t} dt \dots\dots\dots(18)$$

De esta manera si se aproximara una determinada señal periódica empleando una SEF truncada a n_c armónicas, esto se expresaría como:

$$f(t) \approx \sum_{n=-n_c}^{n=n_c} c_n e^{jn\omega t} \dots\dots\dots(19)$$

Y la serie tendría $2n_c + 1$ componentes.

2. Descripción general de la práctica

Para la realización de las experiencias asociadas con esta práctica se emplea un sistema integrado por software y hardware denominado: Sistema para la Ilustración y Aprendizaje de Conceptos de la Teoría de Sistemas y Señales (SIACTSS), desarrollado en el Departamento de Control y Robótica de la Facultad de Ingeniería de la UNAM. En la figura 1 se muestran los componentes del SIACTSS.



Fig 1. Componentes del sistema SIACTSS

Para fines de los conceptos propios de esta práctica, mediante el SIACTSS se pueden efectuar diversas acciones, las cuales se ejemplifican a continuación, apoyándose para ello en una forma de onda definida previamente en la IU_SIACTSS.

1. Especificar, en la pantalla virtual de la IU_SIACTSS, los vértices que delimitan tramos rectos que integran la forma del periodo de una señal para la cual se desea calcular los coeficientes de las series trigonométrica y/o exponencial de Fourier. El número posible de vértices está comprendido entre 2 y 100. En la figura 2 se muestra, en la ventana principal de la IU_SIACTSS, la especificación de una señal periódica de 9 vértices, con un periodo de 10 ms y dominio especificado entre -5 y +5 ms.
2. Guardar en un archivo sfp, la señal especificada en el paso anterior, para el caso aquí ilustrado onda35.sfp, es el nombre del archivo donde se almacenó la señal mostrada en la figura 2.
3. Especificar el número de muestras por periodo a utilizar en el procesamiento de la señal periódica presente en la pantalla virtual de la IU_SIACTSS. En el ejemplo de la figura 2 se ha predeterminado el utilizar 400 muestras/periodo.
4. Especificar el número de armónicas cuyos coeficientes se van a calcular.

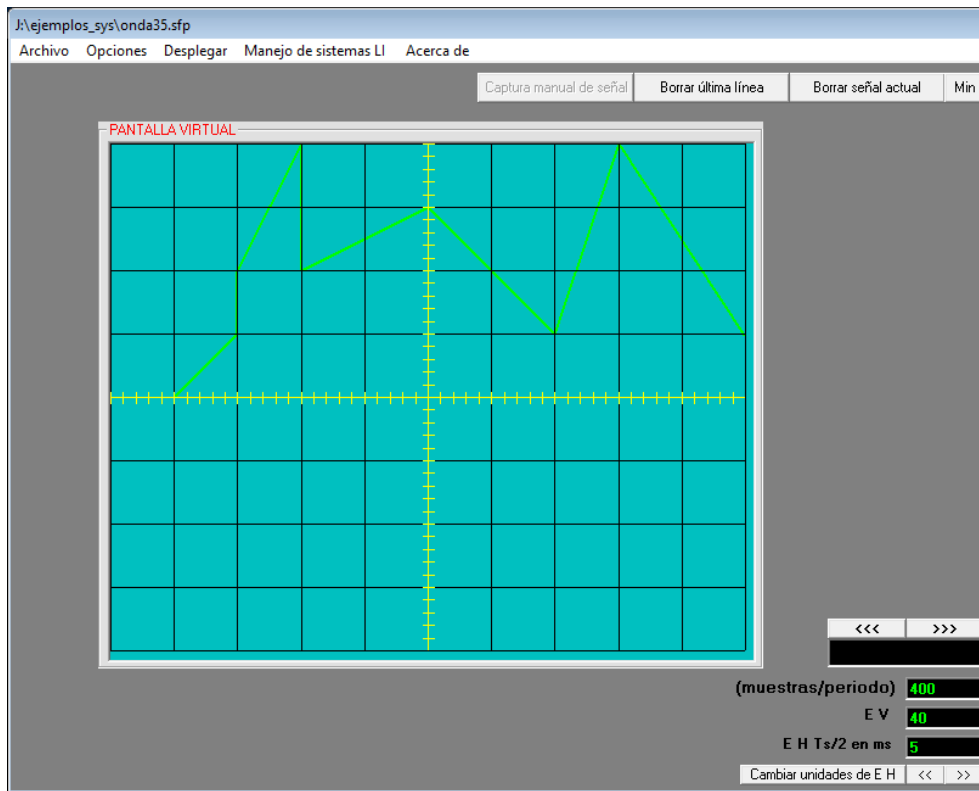


Fig 2. Señal periódica de nueve vértices a procesar por la IU_SIACSS

5. Obtener, para el número de componentes definido en el paso anterior, los coeficientes asociados de las series trigonométrica y exponencial de Fourier. Estos serán visibles uno a uno en la ventana principal de la IU_SIACSS. Para avanzar en su despliegue el usuario deberá oprimir el botón [\gg], presente en la esquina inferior derecha de la ventana de interfaz; para retroceder en el despliegue el usuario deberá oprimir el botón [\ll], presente a la izquierda del botón de avance. Una vez que se han obtenido los coeficientes, el software presenta, en rojo en la pantalla virtual, la forma de onda correspondiente a la aproximación a la señal presente dada por la serie trigonométrica de Fourier truncada hasta el número de componentes armónicos cuyos coeficientes recién se han calculado. En la figura 3 se muestra la aproximación de la señal mostrada en la figura 2 empleando sólo cinco componentes armónicos de la serie trigonométrica y, la componente de directa asociada. Ahí se aprecian los coeficientes a_5 y b_5 de la STF y la magnitud y el ángulo correspondientes al coeficiente C_5 de la serie exponencial.
6. Graficar en la pantalla virtual de la IU_SIACSS la magnitud de los coeficientes C_i ($i = -n_c, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n_c$) de la serie exponencial de Fourier, donde n_c es el número de componentes utilizados para fines de la aproximación de la señal que se esté analizando en un momento dado. En la figura 4 se muestra esto para los coeficientes C_i ($i = -5, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, 5$) de la aproximación de la señal de la figura 2.

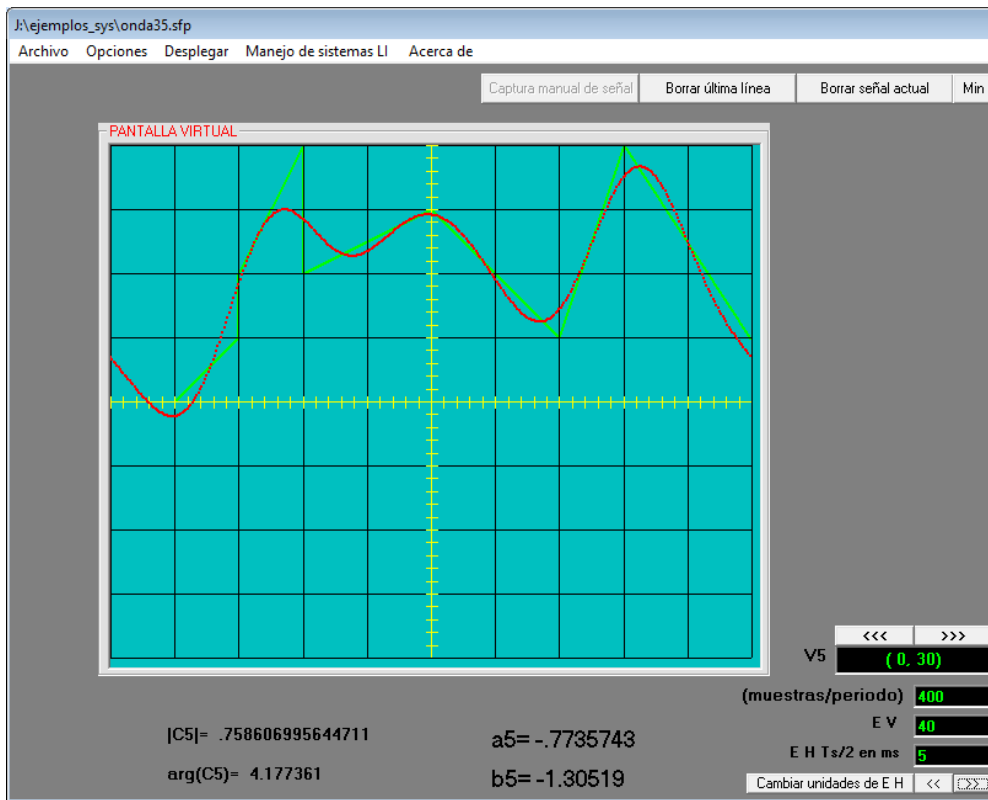


Fig 3. Aproximación de Fourier a la señal mostrada en la figura 2 empleando cinco armónicas

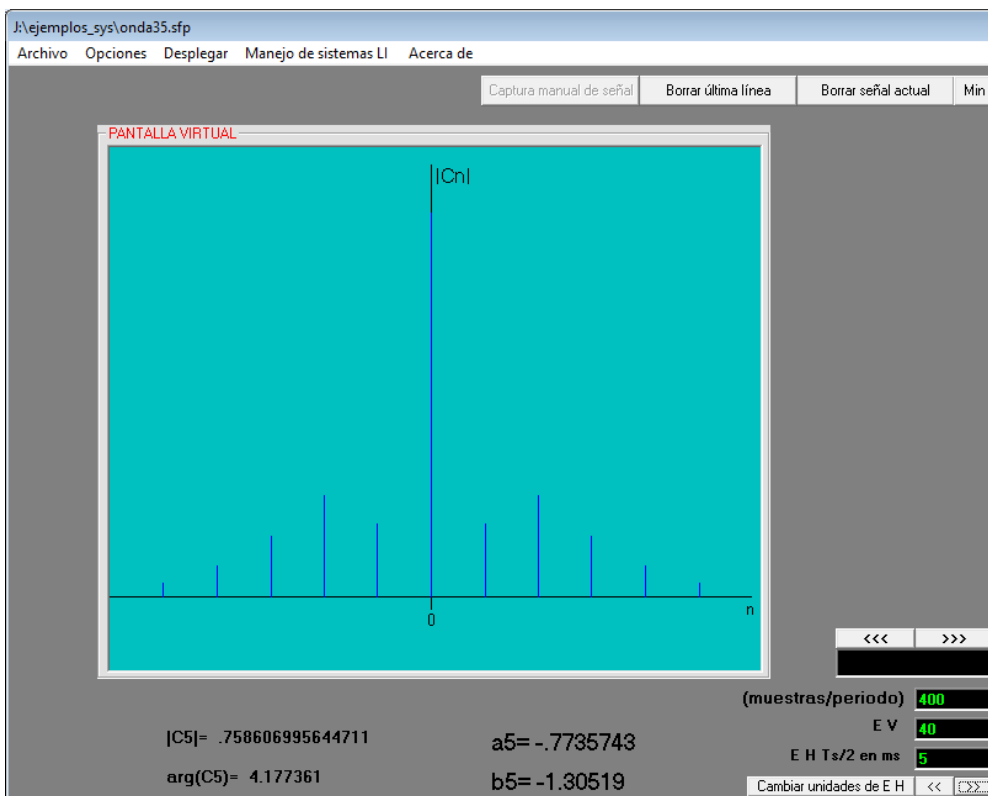


Fig 4 Magnitud de los coeficientes C_n para n de -5 a 5 de la SEF asociada con la señal de la figura 2

7. Bajar la señal original a la IH_SIACTSS, de modo que ésta aparezca en la salida SIH de dicha interfaz. En la figura 5 se muestra la salida mencionada vista en la pantalla de un osciloscopio, cuando se ha bajado a la IH_SIACTSS la señal mostrada en la figura 2.

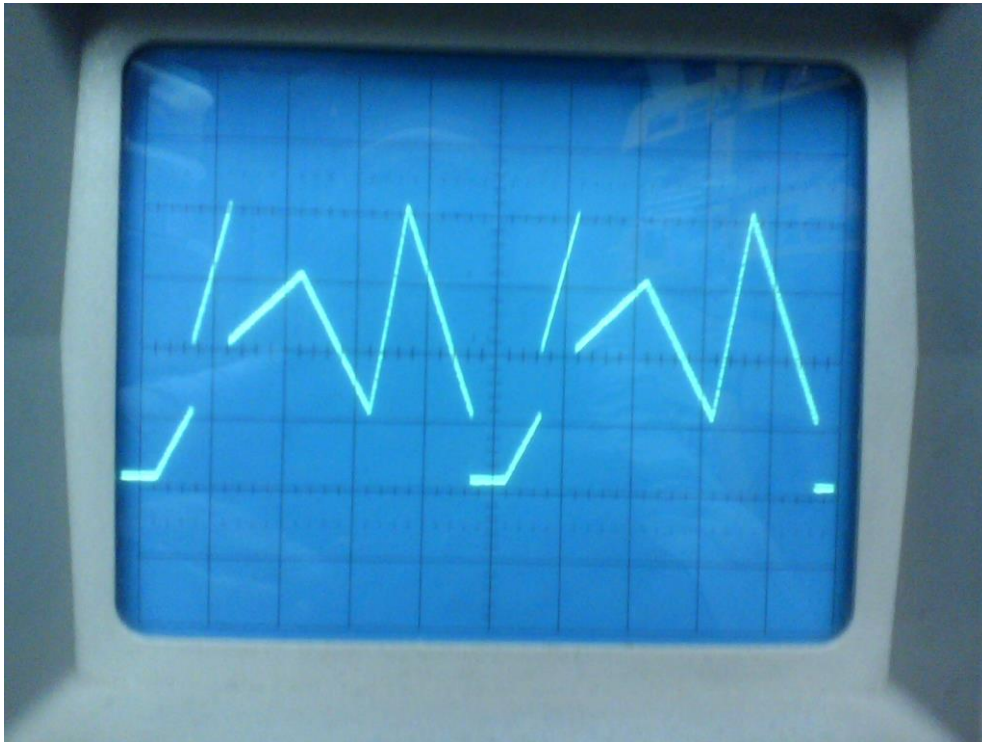


Fig 5. Señal definida en la figura 2 y generada físicamente en la salida SIH de la IH_SIACTSS. EV 5 V/div, EH 2 ms/div.

8. Bajar a la IH_SIACTSS la señal generada al tomar sólo un cierto número de armónicas de la STF, asociada con la señal que se procese en un momento dado; de modo que ésta aparezca en la salida SIH de dicha interfaz. En la figura 6 se muestra la salida mencionada vista en la pantalla de un osciloscopio, cuando se ha bajado a la IH_SIACTSS la señal producida por la STF cuando sólo se han considerado cinco armónicas en ésta. (Señal en rojo de la figura 3).

Cabe señalar aquí que, para la versión actual del hardware de la IH_SIACTSS, las señales generadas en la salida SIH de ésta, siempre tendrán media cero y un valor Vpp de 20 volts. Para que dichas señales aparezcan con el Vpp y valor promedio ilustrados en la pantalla virtual de la IU_SIACTSS, habría que agregar a la IH_SIACTSS hardware de procesamiento analógico controlado por el MCU que gobierna el funcionamiento de ésta. Además, para que una determinada señal pueda ser generada en la salida de la IH_SIACTSS su periodo T_s en segundos, deberá satisfacer la siguiente desigualdad:

$$10^{-5} \leq \frac{T_s}{nmp} \leq 0.419424$$

Donde nmp representa el número de muestras por periodo, que se ha especificado para fines del análisis de una señal determinada. En caso de que el periodo de la señal presente en la pantalla virtual no satisfaga la desigualdad anterior, se notifica esto al usuario y se deshabilitan las facilidades propias del bajado de señales a la IH_SIACTSS. Sin embargo, esto no deshabilita el que para la señal presente se puedan

obtener los coeficientes de sus series trigonométrica y exponencial de Fourier, y se puedan usar las facilidades de graficación en la pantalla virtual de la IU_SIACTSS.

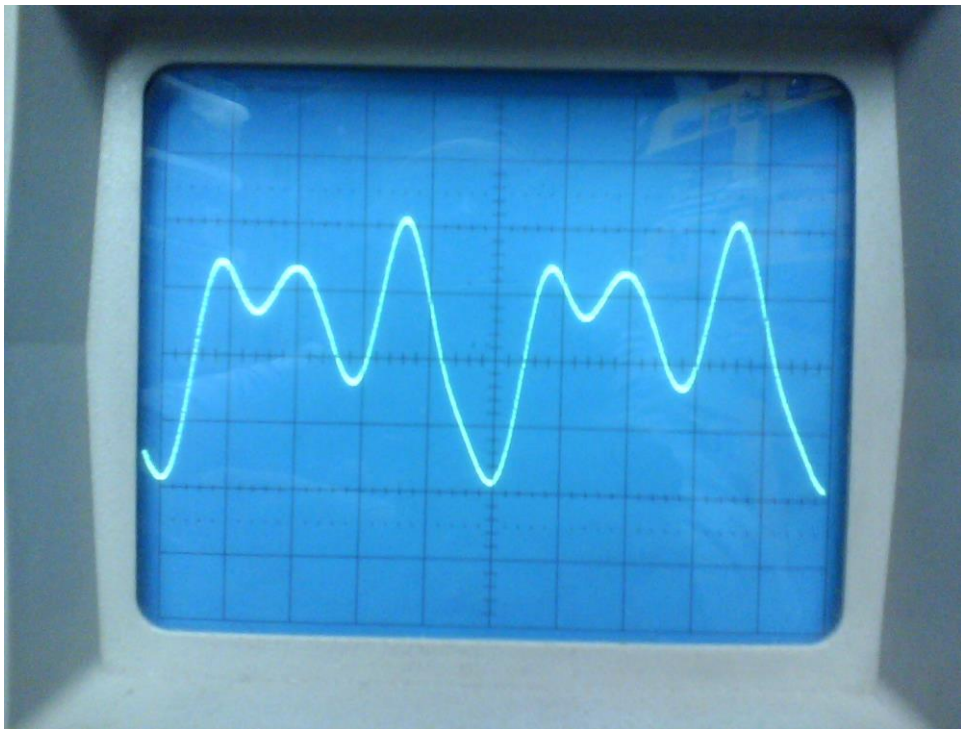


Fig 6. Aproximación de cinco armónicas de la STF asociada con la señal de la figura 2, presente en la SIH de la IH_SIACTSS. EV 5 V/div, EH 2 ms/div.

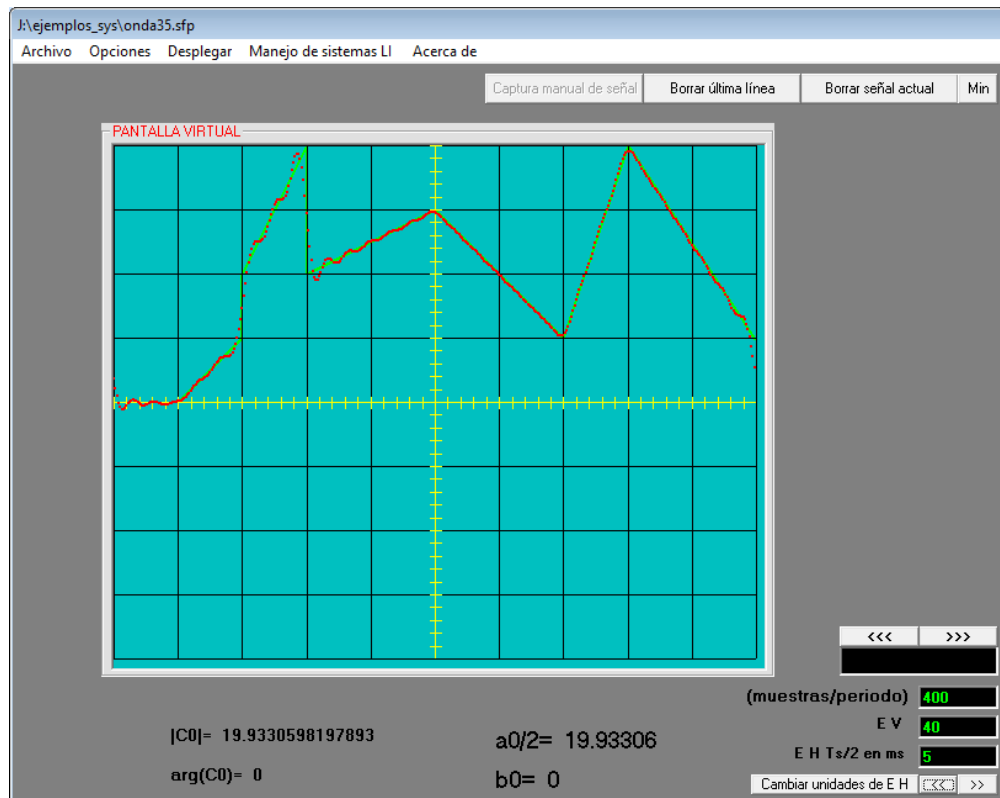


Fig 7. Aproximación de Fourier a la señal mostrada en la figura 2 empleando 30 armónicas

En la figura 7 se muestra la aproximación a la señal de la figura 2, cuando se han empleado 30 componentes armónicas en la STF asociada. Ahí se aprecia que en los puntos donde hay discontinuidades en la señal por aproximar, la STF converge al valor medio de la discontinuidad de cada caso, tal como se prevé en la teoría.

En la figura 8 se aprecia el despliegue de la magnitud de los 61 componentes asociados con la SEF truncada a 30 armónicas.

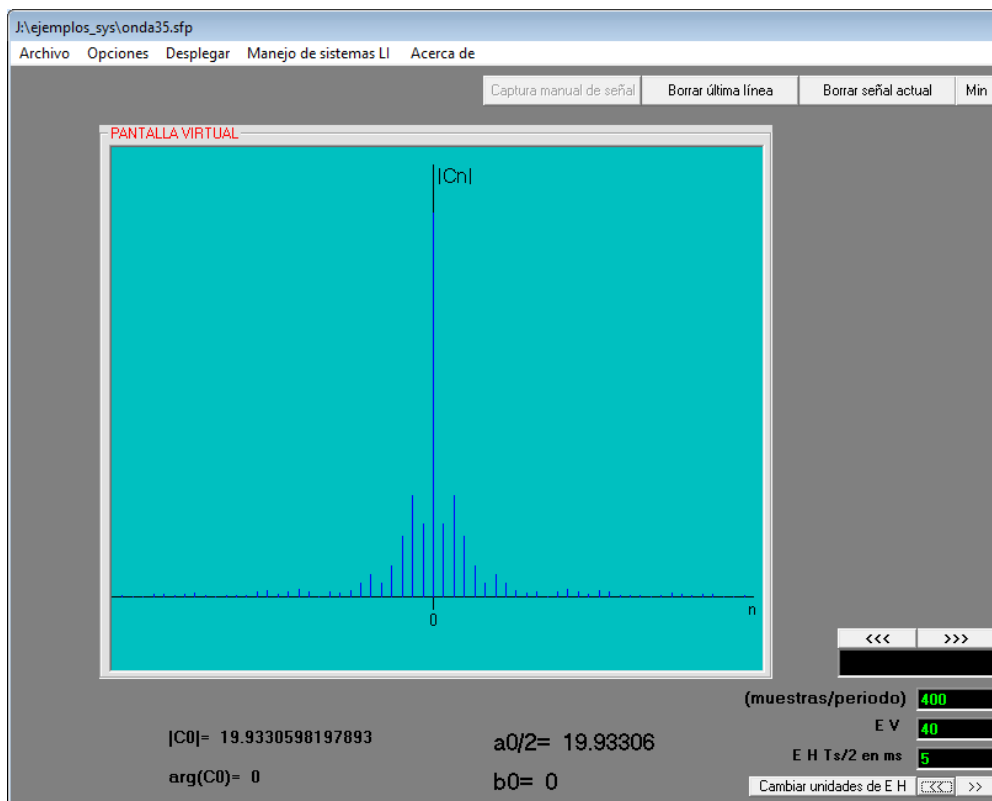


Fig 8. Magnitud de los coeficientes C_n para n de -30 a 30 de la SEF asociada con la señal de la figura 2

En la figura 9 se muestra la salida de la SIH de la IH_SIACTSS, cuando se ha bajado a ésta la señal que aproxima a la mostrada en la figura 2, empleando para ello una STF truncada de 30 armónicas.

Para aclarar ideas se muestra a continuación el procesamiento mediante el SIACTSS, de dos señales clásicas cuyas componentes asociadas con la STF que las aproximan, son bien conocidas en la literatura. La primera de estas señales es una onda cuadrada par con media diferente de cero. En la figura 10 se muestra esta señal, ahí se aprecia que el periodo es de 9 ms y se emplean 500 muestras/periodo para su análisis. En la figura 11 se muestra la aproximación a la señal empleando para ello a una STF truncada a cinco armónicas; en la figura 12 se muestra la aproximación a la misma señal pero ahora empleando 30 armónicas. Al desplegar los coeficientes de la serie en la IU_SIACTSS, se aprecia como es conocido para esta señal, que la STF solo contiene armónicas impares; además, se puede ver que en los dos puntos donde hay discontinuidad la STF converge al valor medio de éstas tal como lo predice la teoría.

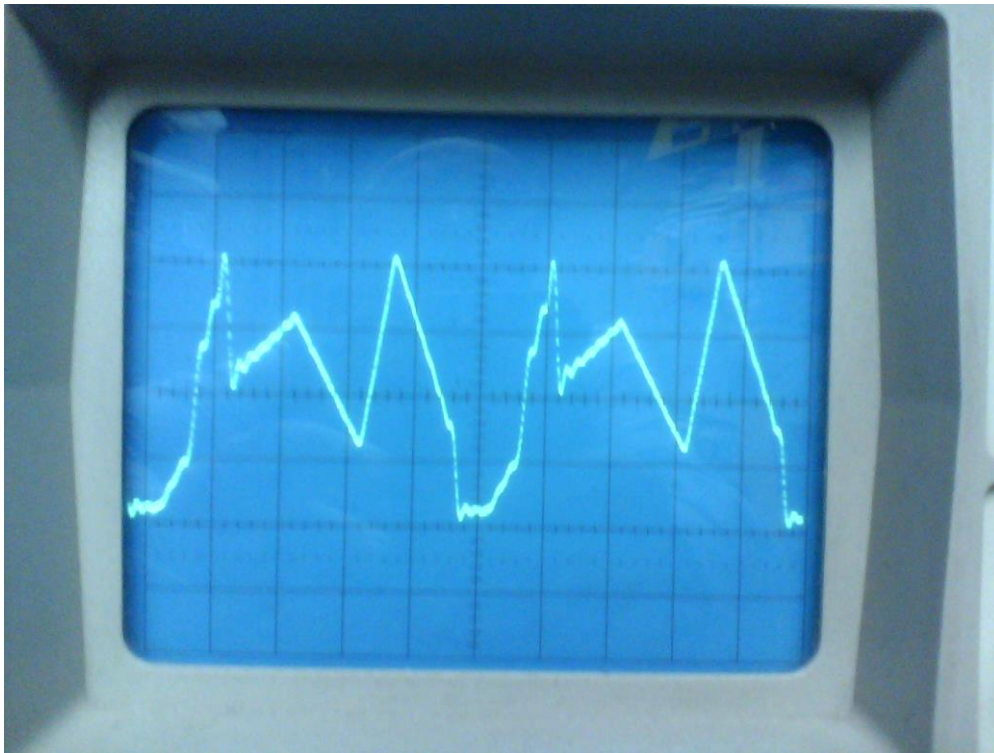


Fig 9. Aproximación de cinco armónicas de la STF asociada con la señal de la figura 2, presente en la SIH de la IH_SIACTSS. EV 5 V/div, EH 2 ms/div.

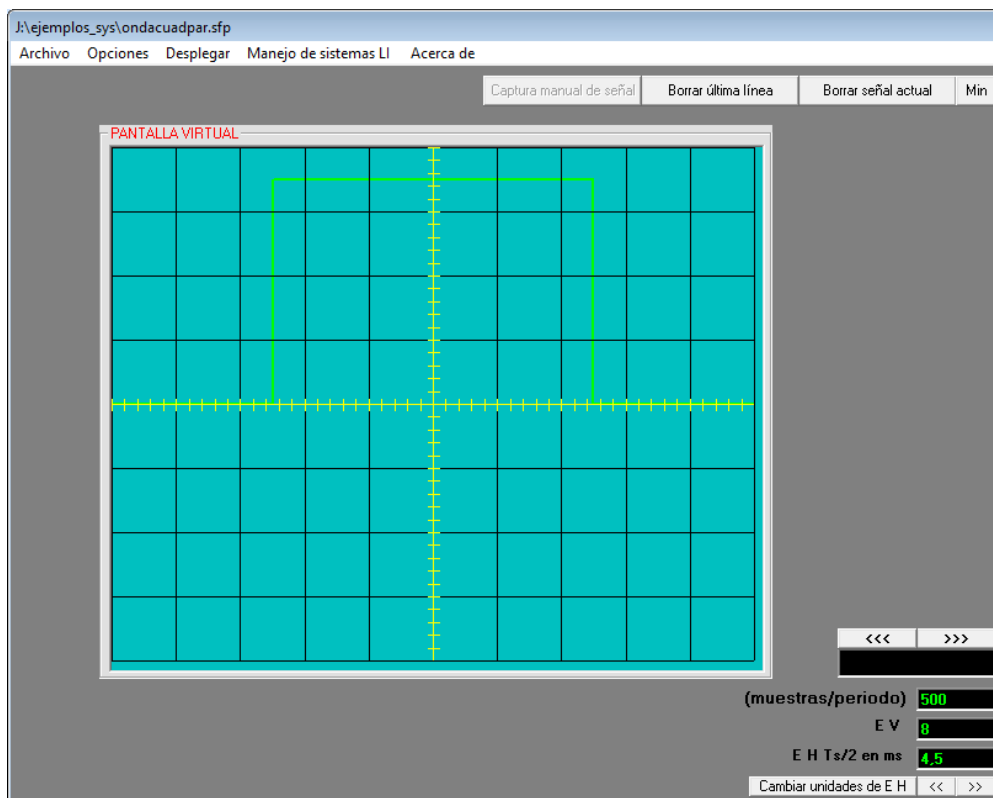


Fig 10. Onda cuadrada par con periodo de 9 ms y valor tope de 7 unidades

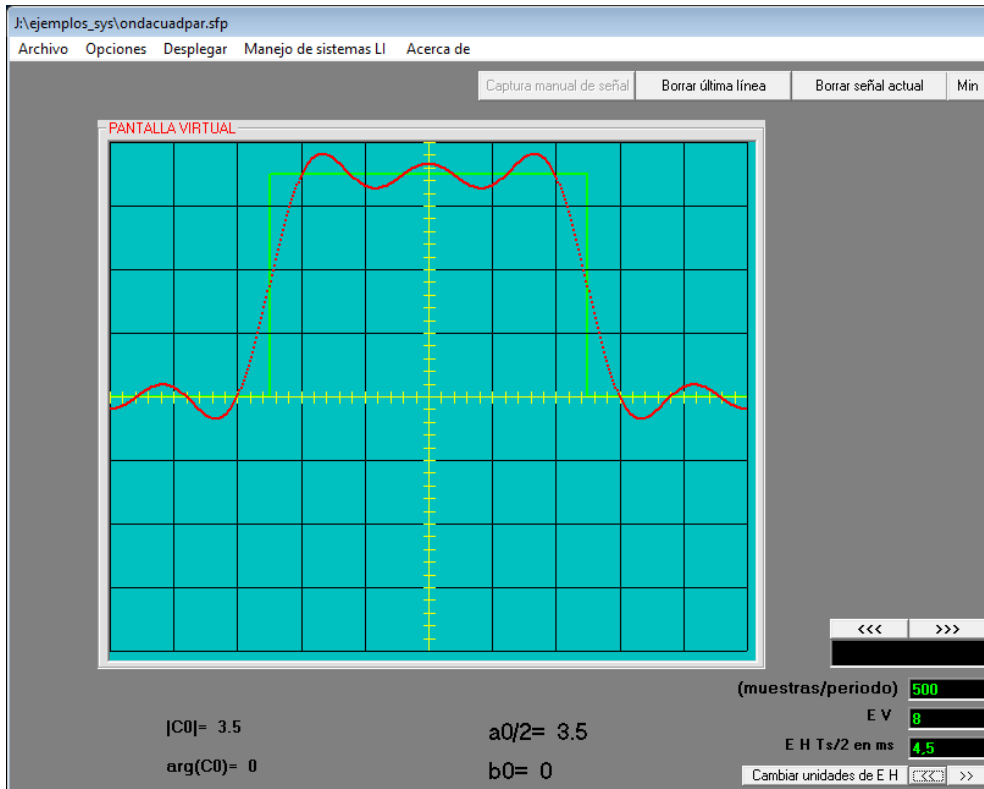


Fig 11. Aproximación de la señal de la figura 10 cuando se emplea una STF truncada a cinco armónicas.

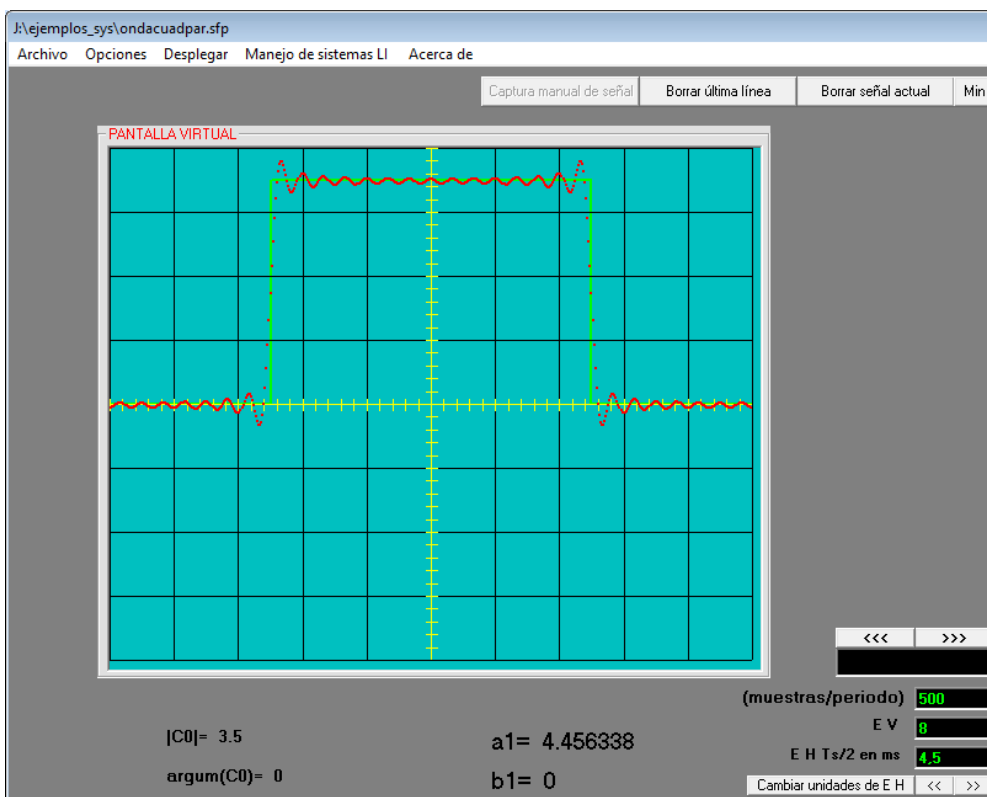


Fig 12. Aproximación de la señal de la figura 10 cuando se emplea una STF truncada a treinta armónicas.

2.1 Fenómeno de Gibbs

En las aproximaciones para la señal de la figura 10 mostradas en las figuras (11) y (12), se aprecia que la STF truncada presenta ondulaciones antes y después de las discontinuidades, observándose el que éstas tienden a ser de periodo cada vez más corto, conforme el número de componentes armónicos aumenta. A este hecho se le conoce en la literatura como *fenómeno de Gibbs*, y se sabe que siempre estará presente alrededor de los puntos de discontinuidad de tipo salto, para una STF truncada que aproxime una señal con estas características. Además, es bien conocido que, conforme el número de armónicas consideradas tiende a infinito, el valor máximo del sobrepaso de las ondulaciones tiende a ser el 8.949% de la magnitud de la discontinuidad implicada. Una prueba elegante de lo anterior puede verse en la referencia [3], que se basa ampliamente en la referencia [4].

La segunda señal, mostrada en la figura 13, es una onda diente de sierra que tiene un periodo 5 ms y se emplean 500 muestras/periodo para fines de su procesamiento con el SIACTSS. En las figuras 14 y 15 se muestran respectivamente las aproximaciones para cinco y treinta armónicas en la STF asociada.

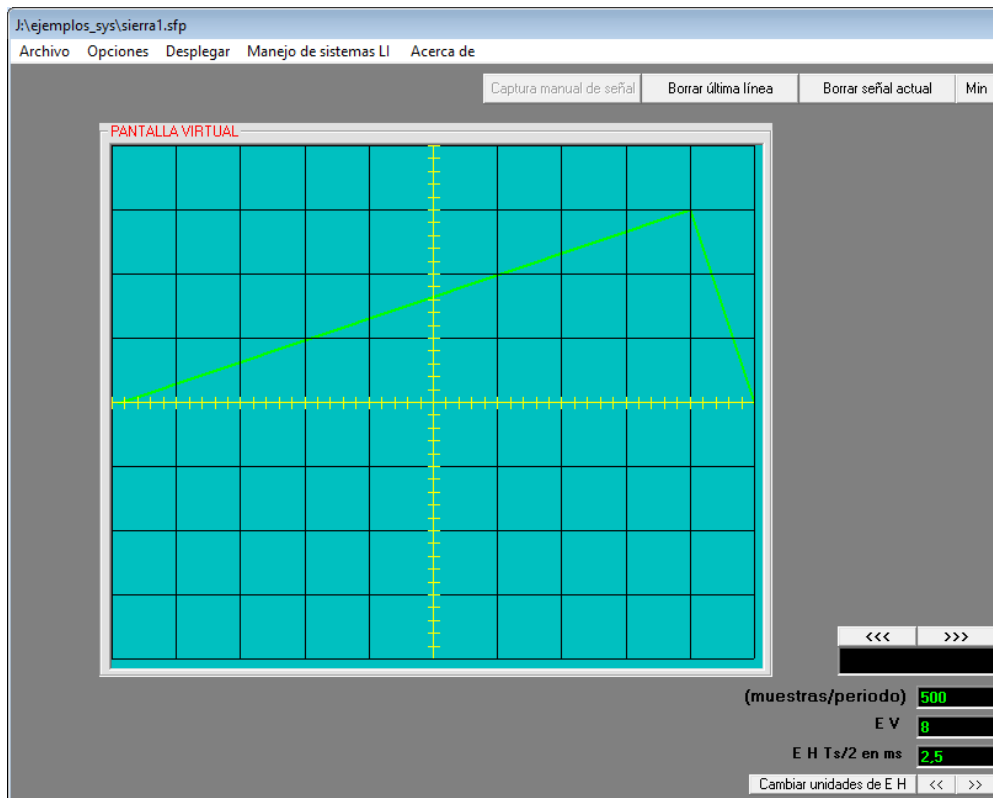


Fig 13. Onda diente de sierra para procesar con el SIACTSS

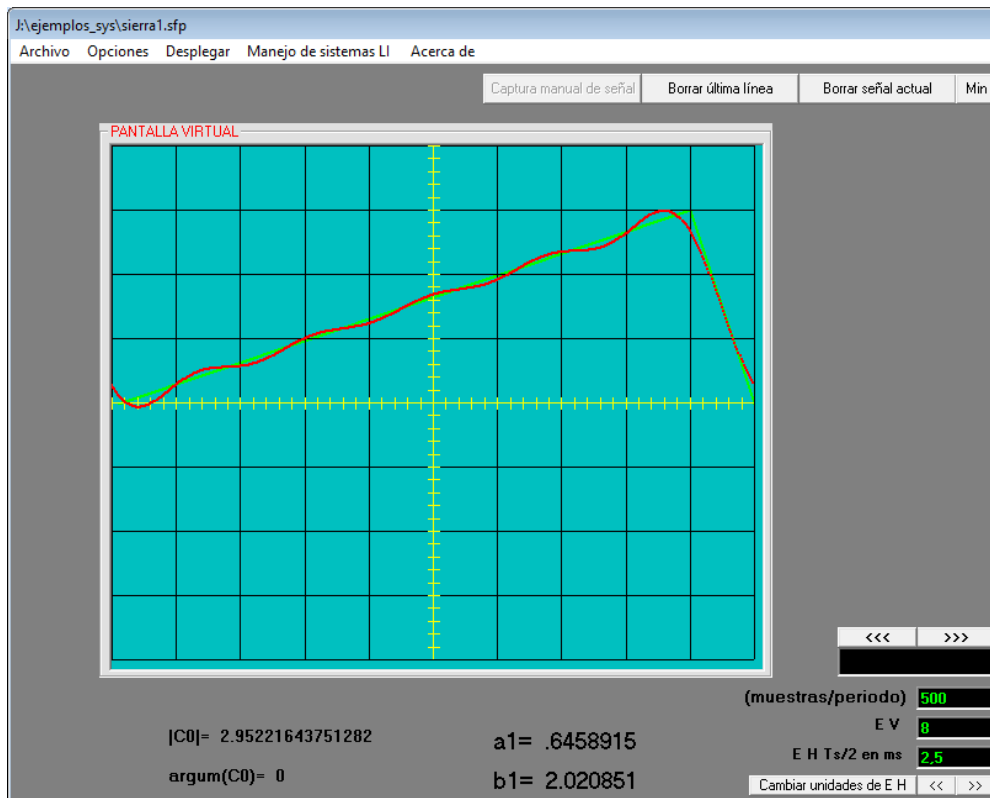


Fig 14. Aproximación de la señal de la figura 13 cuando se emplea una STF truncada a cinco armónicas.

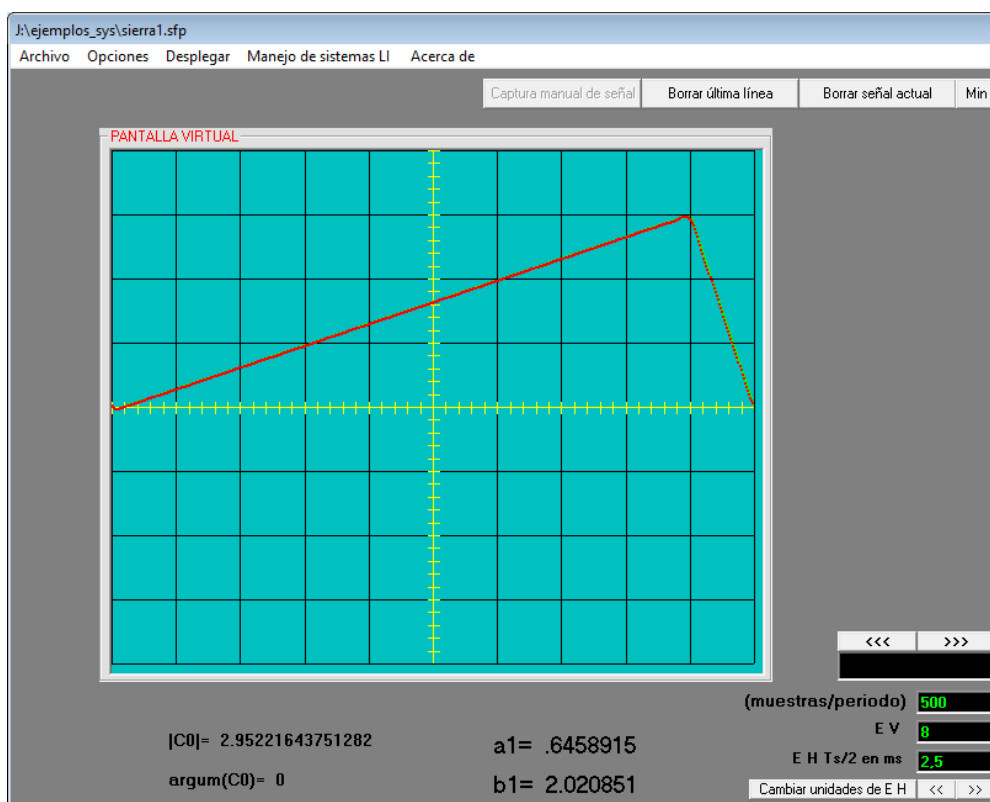


Fig 15. Aproximación de la señal de la figura 13 cuando se emplea una STF truncada a treinta armónicas.

Nótese que dado que la señal de la figura 13 no presenta discontinuidades, el fenómeno de Gibbs no está presente en las STF que aproximan a esta señal mostradas en las figuras 14 y 15.

3. Trabajo para el estudiante

Empleando la IU_SIACTSS, el trabajo para el alumno podría ser:

1. Empleando la IU_SIACTSS, especificar la forma del periodo básico propio de una determinada señal periódica. La señal en cuestión podría ser definida por el propio estudiante, o bien, por el profesor del laboratorio.
2. Empleando la IU_SIACTSS, obtener una aproximación de la señal definida en el paso anterior, empleando para ello una STF truncada a un determinado número de armónicas.
3. Aprender en la pantalla virtual de la IU_SIACTSS que tan buena o mala es la aproximación.
4. Repetir el paso dos empleando ahora un número mayor de armónicas, y apreciar la mejora en la aproximación.
5. Tomar nota de los valores de los coeficientes de la STF y la SEF calculados por la IU_SIACTSS.
6. Empleando las ecuaciones (4), (5), (9) y (19); corroborar los valores de los coeficientes capturados en el paso anterior.
7. Si se tiene disponible la IH_SIACTSS, bajar a ésta las señales originales con las que se experimente en un momento dado. Para su uso bajo la instancia que sea conveniente.
8. Si se tiene disponible la IH_SIACTSS, bajar a ésta las STF que aproximen a las señales originales con las que se experimente en un momento dado. Para su uso bajo la instancia que sea conveniente.

4. Equipo básico requerido para la realización de esta práctica

1. Computadora PC con el software instalado que valida a la IU_SIACTSS. Es deseable que dicha computadora tenga puerto serie físico; si no es el caso, habría que emplear un adaptador USB - SERIE comercial.
2. Interfaz de hardware del SIACTSS (IH_SIACTSS).
3. Osciloscopio

5. Referencias

- [1] C. L. Liu, Jane W. S., Liu, Linear Systems Analysis. McGraw – Hill, 1975.
- [2] MATA, G. H., et al. Análisis de sistemas y señales con cómputo avanzado Todos 1era edición México Facultad de Ingeniería, UNAM, 2002
- [3] Documento Gibbs_almira.pdf. Este documento está basado ampliamente en el libro de texto. “Matemáticas para la recuperación de señales” Ver referencia [4].
- [4] Almira J. M., “Matemáticas para la recuperación de señales”, Grupo Editorial Universitario, España 2005.
- [5] Salvá A, Justificación de las expresiones para los coeficientes de una Serie Trigonométrica de Fourier empleando la teoría de máximos y mínimos para funciones de varias variables independientes. Documento jus_coef_fourier.pdf