

## Teoremas de Redes

### Objetivo

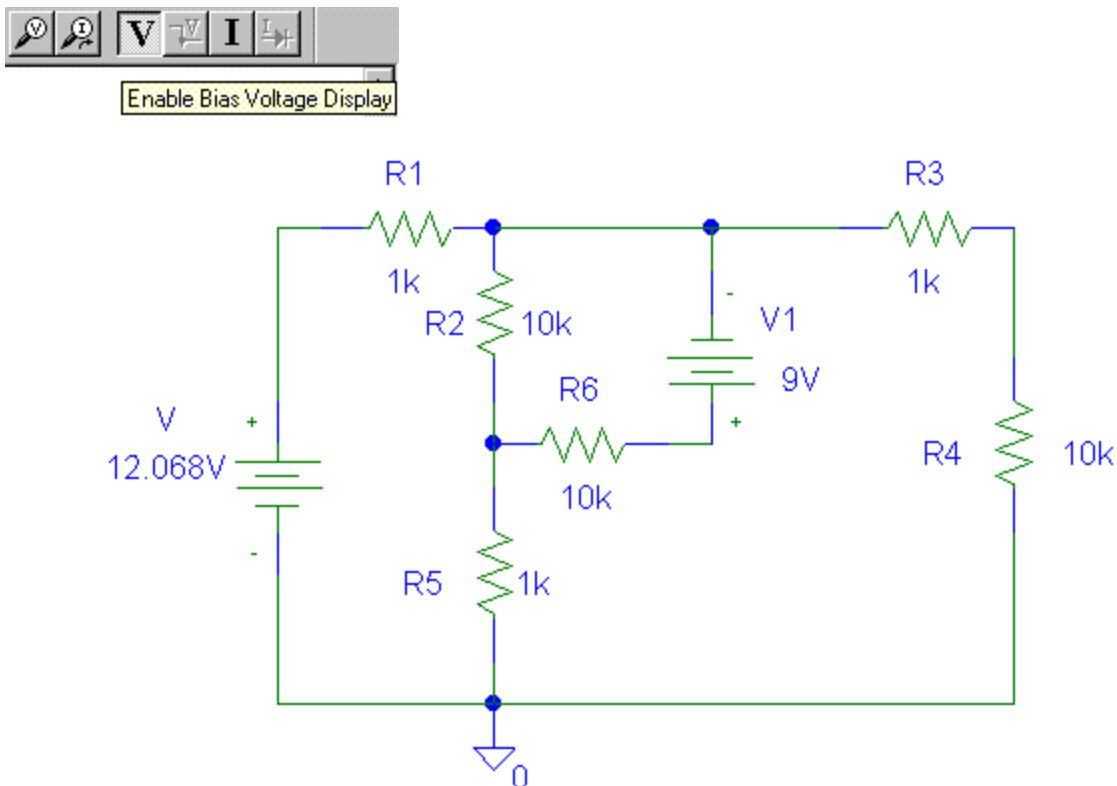
Analizar los teoremas de Sustitución, Tellegen, Superposición, Thévenin, Norton y Reciprocidad haciendo uso de la herramienta de simulación Pspice.

### Teorema de Sustitución

Este teorema se aplica a circuitos lineales o no lineales, variantes o invariantes en el tiempo. Establece que una rama en un circuito con un voltaje en sus terminales  $V_{ab}$  y una corriente  $I_{ab}$ , puede sustituirse por una fuente de voltaje o una fuente de corriente de valores  $V_{ab}$  e  $I_{ab}$ , respectivamente

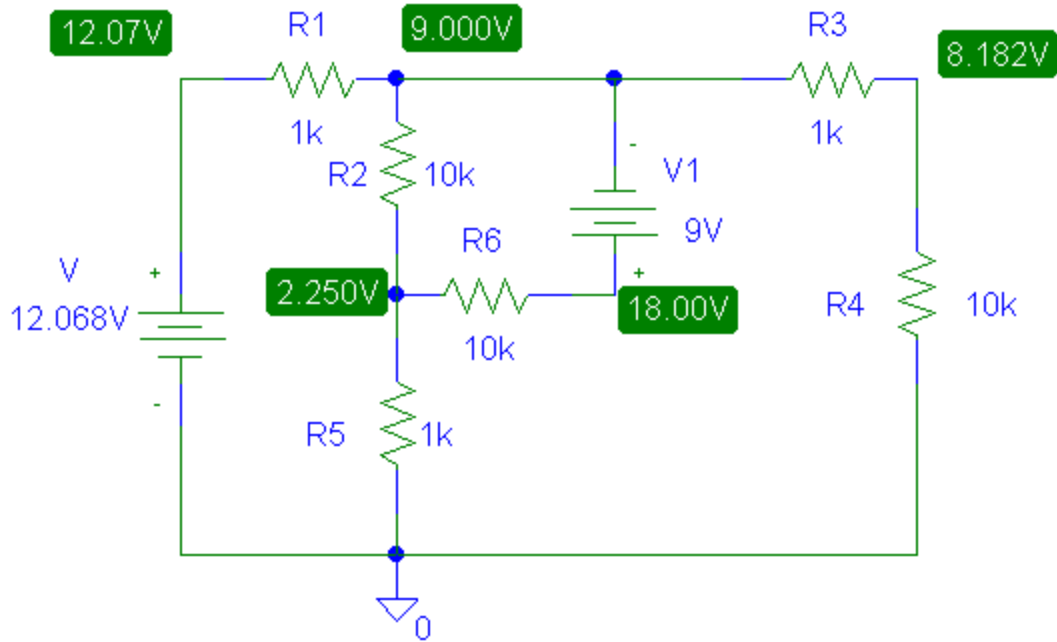
### Experimento I Circuito de referencia

Se arma en Pspice el siguiente circuito, y se habilita en la barra de *Menu el Display* de voltaje, el cual permitirá observar directamente los voltajes de nodo, a partir de los cuales se determinan los voltajes específicos del circuito, es decir,  $V1 = V_{R1}$ ,  $V2 = V_{R2} + V_{R5}$ ,  $V3 = V_{R3}$  y  $V4 = V_{R4}$ .

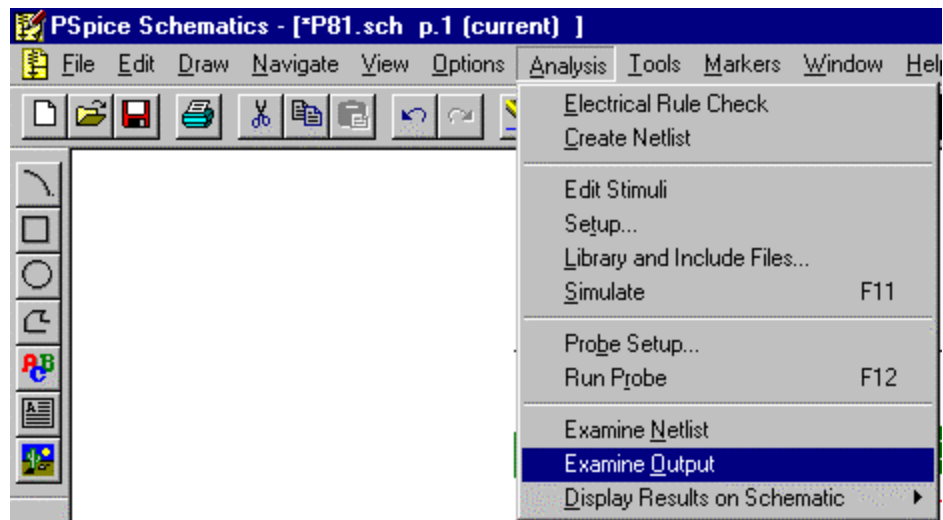


Una vez que se ha realizado lo anterior, se simula directamente el circuito con la tecla **F11**. Puede ser que el programa active la pantalla de *Probe*, pero como no se requieren valores en el tiempo, se puede cerrar y regresar a la pantalla de *Schematics*.

El circuito simulado se presentará con los voltajes de nodo.



En el *Menu de Analysis* se puede seleccionar la opción de *Examine Output*, con la cual se presenta la descripción detallada del circuito incluyendo los valores específicos de los voltajes de nodo.



```

P81.out - Bloc de notas
Archivo Edición Buscar Ayuda
* C:\Mis documentos\CircuitosSpice\PracticasSPICE\P81.sch

**** SMALL SIGNAL BIAS SOLUTION TEMPERATURE = 27.000 DEG C

*****

NODE VOLTAGE NODE VOLTAGE NODE VOLTAGE NODE VOLTAGE

($N_0001) 12.0680 ($N_0002) 2.2500
($N_0003) 18.0000 ($N_0004) 8.9999
($N_0005) 8.1817

VOLTAGE SOURCE CURRENTS
NAME CURRENT
U_U -3.068E-03
U_U1 -1.575E-03

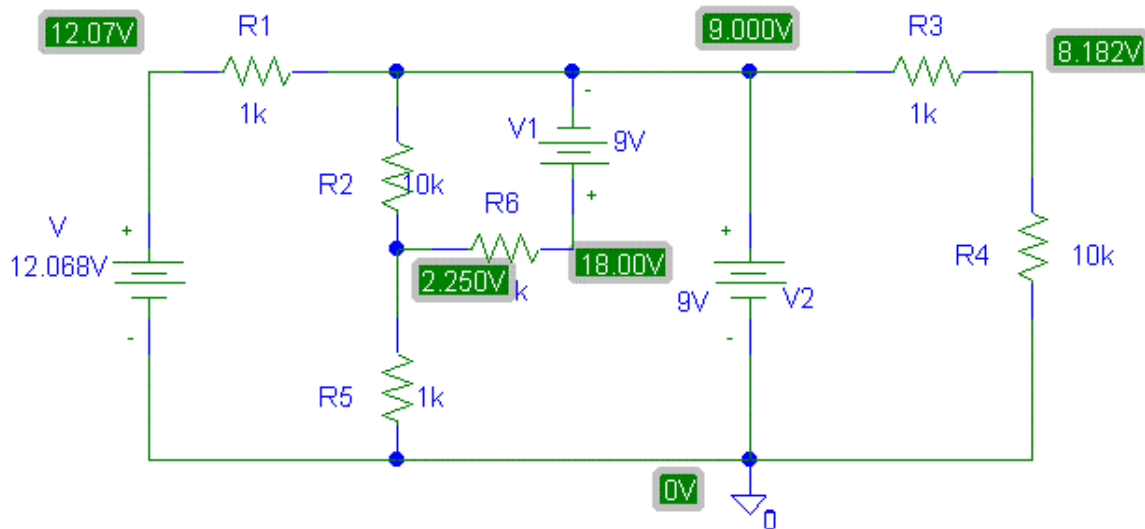
TOTAL POWER DISSIPATION 5.12E-02 WATTS
    
```

A partir de estos datos podemos determinar los voltajes del circuito de referencia.

V1=	12.0680	-	9.0000	=	3.0680
V2=	9.0000	-	0	=	9.0000
V3=	9.0000	-	8.1817	=	0.8183
V4=	8.1817	-	0	=	8.1817

### Experimento II Circuito para comprobar el teorema de Sustitución

De manera similar al Experimento I, ahora se arma en Pspice el siguiente circuito, que es igual al de referencia, pero se ha agregado una fuente de voltaje en paralelo con la rama se ha de sustituir, ambas tienen un voltaje de 9V, por lo que es de esperarse que los voltajes restantes no se deben alterar.



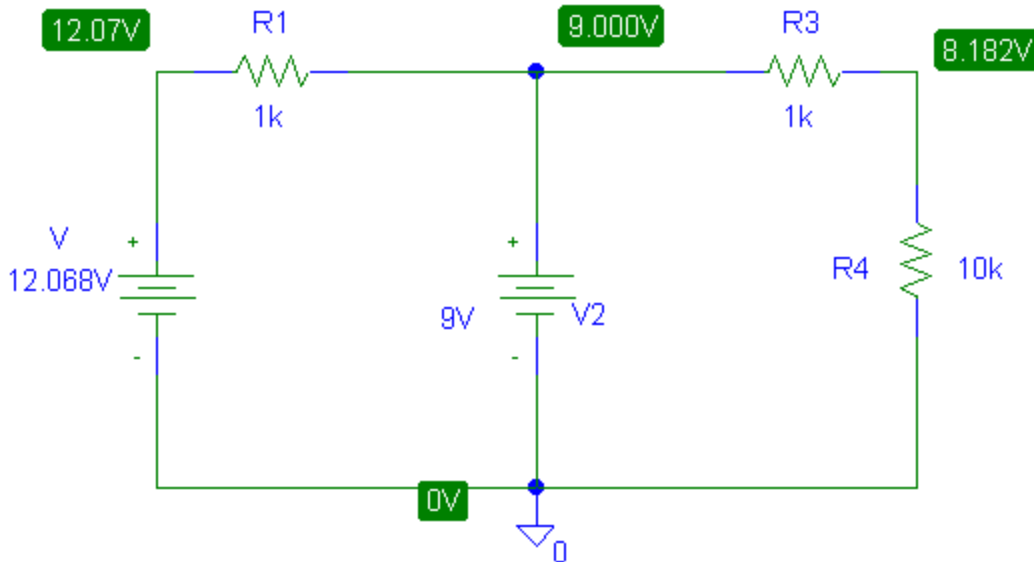
Se observa que el circuito no se altera al incorporar la fuente de 9V, ya que el voltaje en esas terminales es igual al voltaje V2. Los voltajes del circuito siguen siendo los mismos.

<b>V1=</b>	<b>12.0680</b>	<b>-</b>	<b>9.0000</b>	<b>=</b>	<b>3.0680</b>
<b>V2=</b>	<b>9.0000</b>	<b>-</b>	<b>0</b>	<b>=</b>	<b>9.0000</b>
<b>V3=</b>	<b>9.0000</b>	<b>-</b>	<b>8.1817</b>	<b>=</b>	<b>0.8183</b>
<b>V4=</b>	<b>8.1817</b>	<b>-</b>	<b>0</b>	<b>=</b>	<b>8.1817</b>

### Experimento III Aplicación del teorema de Sustitución

Para comprobar el teorema, se sustituye la rama cuyo voltaje es V2, con la fuente de voltaje de 9V.

Se alambra en Pspice, de manera similar a los anteriores, el circuito modificado proporcionando los siguientes voltajes de nodo.



Obteniendo de nuevo los mismos voltajes del circuito, con lo cual se verifica la validez de este teorema.

<b>V1=</b>	<b>12.0680</b>	<b>-</b>	<b>9.0000</b>	<b>=</b>	<b>3.0680</b>
<b>V2=</b>	<b>9.0000</b>	<b>-</b>	<b>0</b>	<b>=</b>	<b>9.0000</b>
<b>V3=</b>	<b>9.0000</b>	<b>-</b>	<b>8.1817</b>	<b>=</b>	<b>0.8183</b>
<b>V4=</b>	<b>8.1817</b>	<b>-</b>	<b>0</b>	<b>=</b>	<b>8.1817</b>

## Teorema de Tellegen

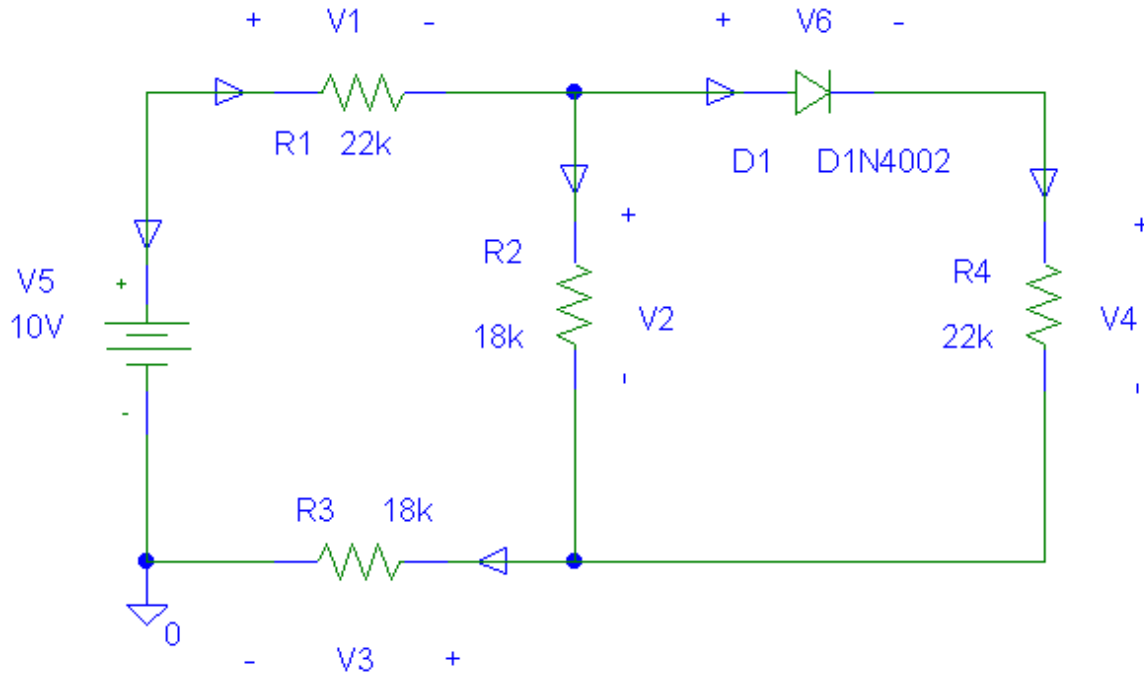
Este teorema se aplica a circuitos lineales o no lineales, variantes o invariantes en el tiempo. Establece que en un circuito la suma de potencias en las ramas es igual a cero, o bien, la potencia suministrada es igual a la consumida por el mismo.

### Experimento I Circuito de referencia

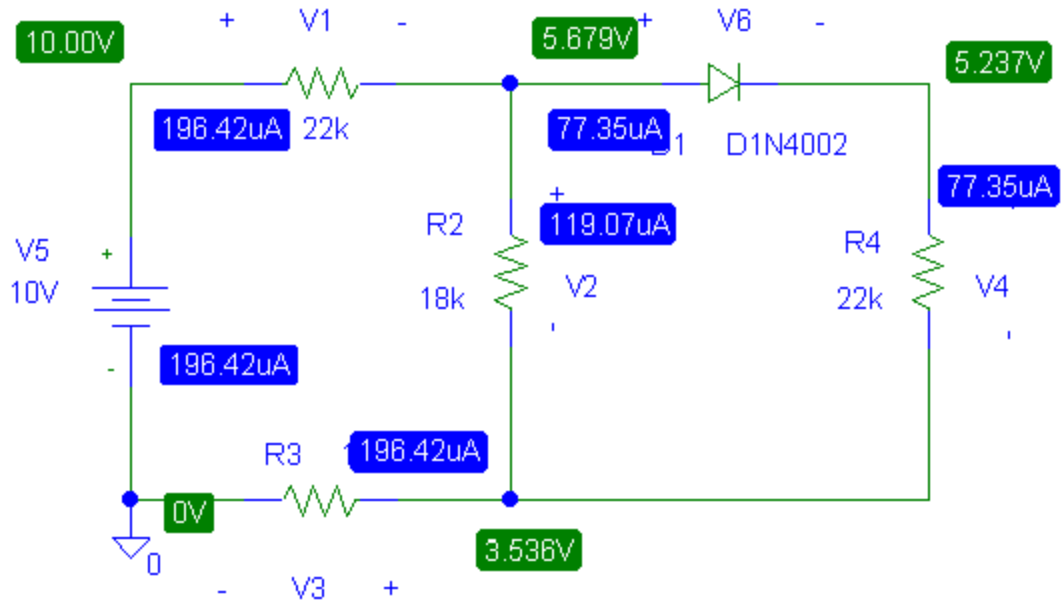
Se arma en Pspice el circuito, sólo se habilita en la barra de *Menu los Display de voltajes y de corrientes* de CD y se ejecuta la simulación con *F11*.



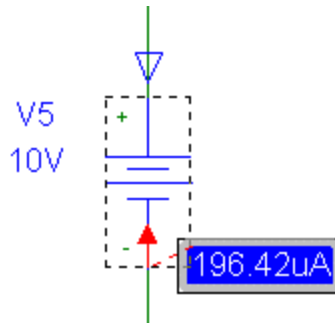
En el circuito se han marcado todas las corrientes de rama con dirección de + a -.



Los datos de voltaje y de corriente en cada rama proporcionados en la simulación son los siguientes



Cabe hacer la aclaración que las corrientes indicadas son positivas, en donde la dirección de esa corriente se puede observar al seleccionar con el mouse el *display* de esa corriente como se indica a continuación; que para este caso de  $I_5 = -196.42\mu\text{A}$ , de acuerdo a la dirección especificada en el circuito de referencia.



Con los datos anteriores, podemos resumir los voltajes, corrientes y potencias en cada rama como

Voltajes de rama				Corrientes de rama				Potencias de rama				
V1=	10	-	5.6788	=	4.3212	I1=	1.96E-04	P1=	8.49E-04			
V2=	5.6788	-	3.5355	=	2.1433	I2=	1.19E-04	P2=	2.55E-04			
V3=	3.5355	-	0	=	3.5355	I3=	1.96E-04	P3=	6.94E-04			
V4=	5.2372	-	3.5355	=	1.7017	I4=	7.74E-05	P4=	1.32E-04			
V5=	10	-	0	=	10	I5=	-1.96E-04	P5=	-1.96E-03			
V6=	5.6788	-	5.2372	=	0.4416	I6=	7.74E-05	P6=	3.42E-05			
									$\Sigma$	5.04E-09		

Se verifica la LCK

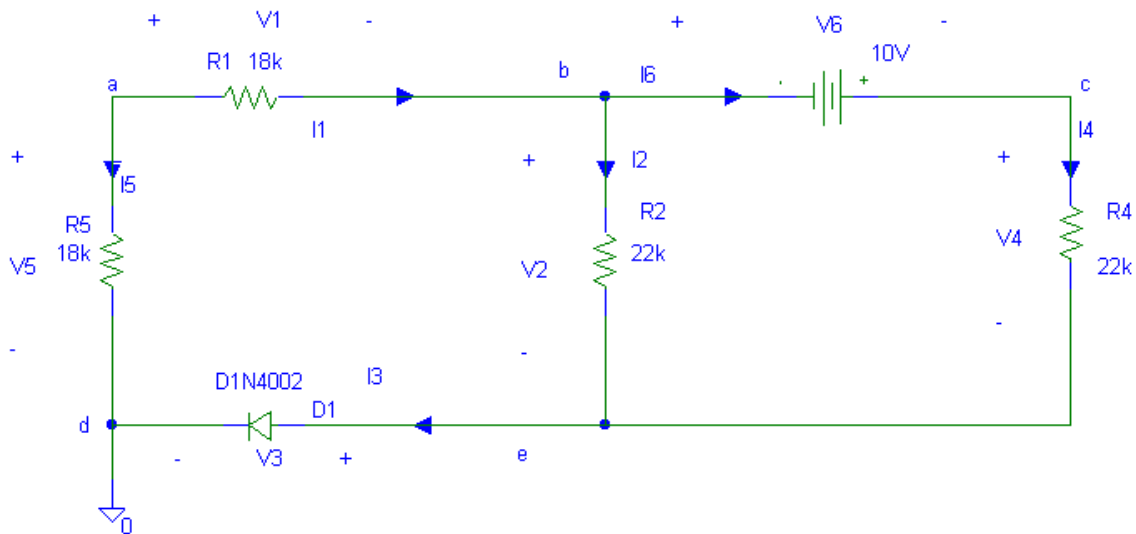
Nodo b: $I1 - I2 - I6 =$	$196.418E-6 \cdot$	$119.072E-6 -$	$77.350E-6 =$	$-4.040E-9$
Nodo e: $I2 + I4 - I3 =$	$119.072E-6 \cdot$	$77.350E-6 -$	$196.417E-6 =$	$5.556E-9$

y la LVK

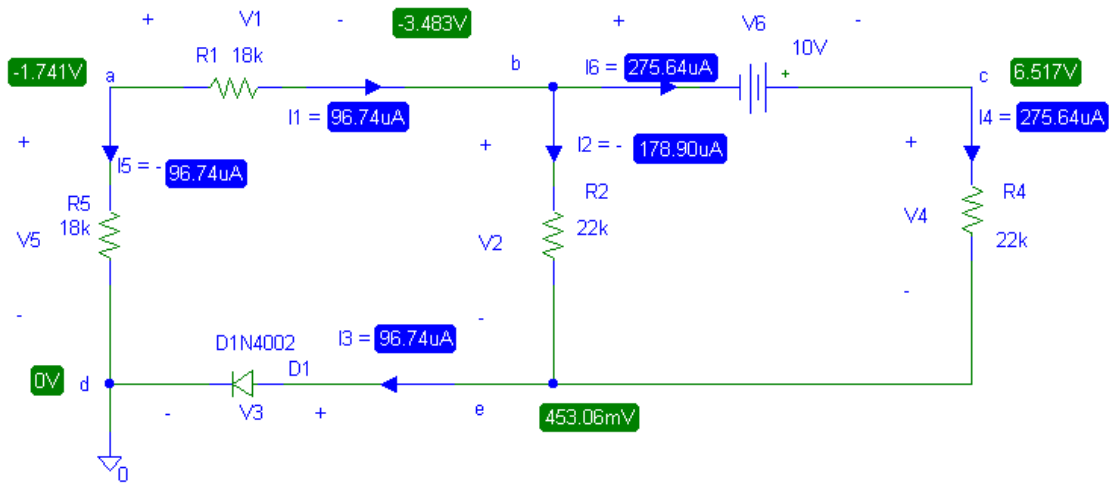
Malla I: $V1 + V2 + V3 - V5 =$	$4.3212 +$	$2.1433 +$	$3.5355 -$	$10.0000 =$	$0.0000$
Malla II: $-V2 + V6 + V4 =$	$-$	$2.1433 +$	$0.4416 +$	$1.7017 =$	$0.0000$

### Experimento II Verificación del teorema de Tellegen

A partir del circuito del Experimento I, ahora se modifica la configuración del circuito, manteniéndose las mismas direcciones de corriente y polaridad de voltajes. Este se muestra en el siguiente diagrama



En esta simulación sólo se habilita el *display de voltajes y corrientes* en la barra de *Menu* y se ejecuta con *F11*, proporcionando los voltajes de nodo y las corrientes de rama. Observe que las direcciones que proporciona la simulación todas son positivas y tienen la dirección indicada mostrada cuando se selecciona con el mouse el display de corriente, como en el caso de la corriente I2.



En la Tabla se presentan los voltajes de rama que se obtienen a partir de los voltajes de nodo, las corrientes de rama y las respectivas potencias que sumándolas da  $\approx 0$  por el redondeo.

Voltajes de rama	Corrientes de rama	Potencias de rama
V1= -1.7414 - -3.4828 = 1.7414	I1= 9.67E-05	P1= 1.68E-04
V2= -3.4828 - 0.4531 = -3.936	I2= -1.79E-04	P2= 7.04E-04
V3= 0.4531 - 0 = 0.4531	I3= 9.67E-05	P3= 4.38E-05
V4= 6.5172 - 0.4531 = 6.0641	I4= 2.76E-04	P4= 1.67E-03
V5= -1.7414 - 0 = -1.741	I5= -9.67E-05	P5= 1.68E-04
V6= -3.4828 - 6.5172 = -10	I6= 2.76E-04	P6= -2.76E-03
		$\Sigma$ 3.15E-08

Se verifica la LCK

Nodo b: I1 - I2 - I6 =	96.744E-6	-	-178.905E-6	-	275.641E-6	=	8.081E-9
Nodo e: I2 + I4 - I3 =	-178.905E-6	+	275.641E-6	-	96.744E-6	=	-8.081E-9

y la LVK

Malla I: V1 + V2+ V3 - V5 =	1.7414	+	-3.9359	+	0.4531	-	-1.7414	=	0.0000
Malla II: - V2 + V6 + V4 =		-	-3.9359	+	-10.0000	+	6.0641	=	0.0000

Con los datos anteriores se verifican las siguientes potencias

Potencia en el circuito (1) de referencia

$$\sum_K V_K I_K = 0$$



Potencia del circuito (1) de referencia con respecto al circuito (2) modificado

$$\sum_K V_K \hat{I}_K = 0$$

Potencia del circuito (2) modificado con respecto al circuito (1) de referencia

$$\sum_K \hat{V}_K I_K = 0$$

Potencia en el circuito (2) modificado

$$\sum_K \hat{V}_K \hat{I}_K = 0$$

Estas potencias se resumen en la siguiente Tabla

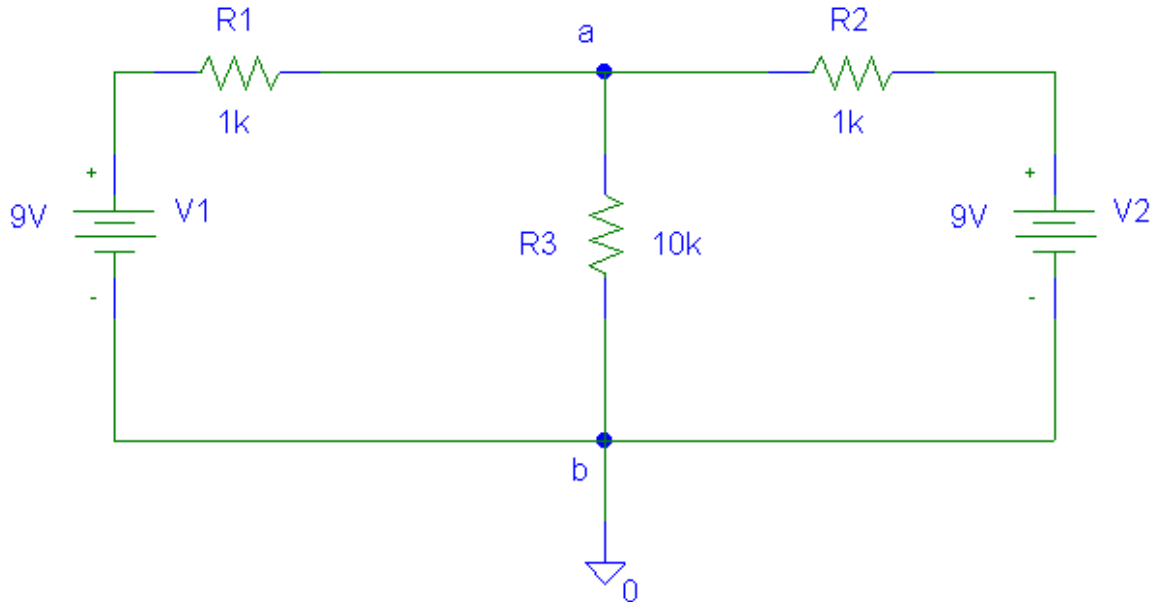
	Potencia Cto 1	Potencia Cto 1-2	Potencia Cto 2-1	Potencia Cto 2
Rama	Voltaje Cto 1 * Corriente Cto 1	Voltaje Cto 1 * Corriente Cto 2	Voltaje Cto 2 * Corriente Cto 1	Voltaje Cto 2 * Corriente Cto 2
1	848.762E-6	418.052E-6	342.043E-6	168.471E-6
2	255.207E-6	-383.446E-6	-468.656E-6	704.150E-6
3	694.431E-6	342.040E-6	88.996E-6	43.835E-6
4	131.626E-6	469.058E-6	469.058E-6	1.672E-3
5	-1.964E-3	-967.444E-6	342.043E-6	168.471E-6
6	34.158E-6	121.723E-6	-773.500E-6	-2.756E-3
Σ	3.303E-9	-17.320E-9	-16.589E-9	31.805E-9

### Teorema de Superposición

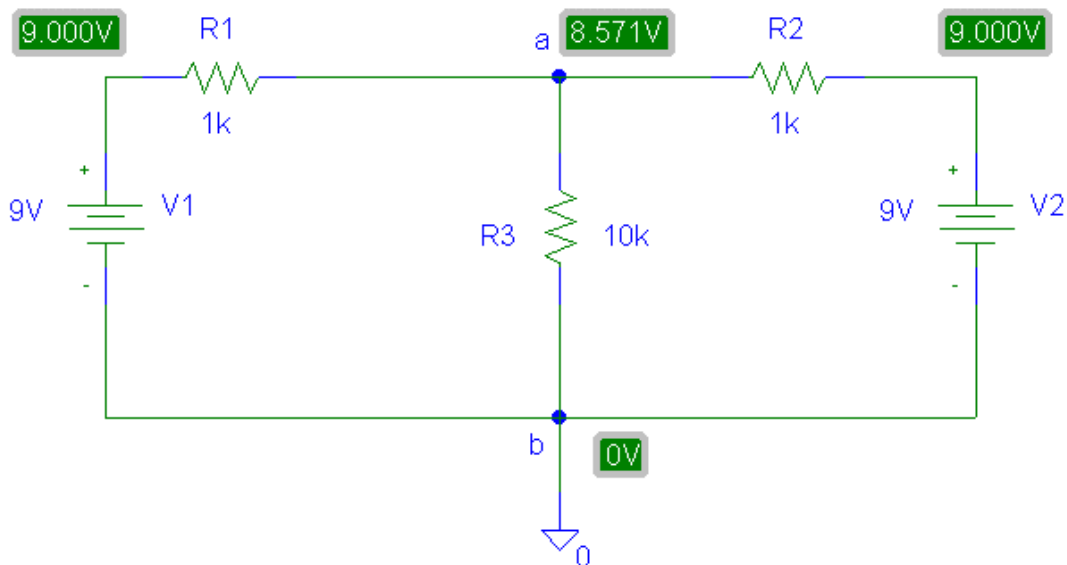
Este teorema establece que la respuesta de estado estable de un circuito debida a varias fuentes de excitación, ya sean de directa o de alterna, se puede determinar mediante la suma de las respuestas individuales debidas a cada excitación de manera independiente. Este teorema enfatiza la linealidad del circuito y sus componentes.

### Experimento I Circuito de referencia en el que se aplica el Teorema de Superposición

El circuito en el que se verificará este teorema contiene dos fuentes independientes de voltaje de directa. Este circuito es el siguiente.



Para este circuito sólo se habilitan en la barra de *Menu* los *display de voltaje y de corriente* y se ejecuta *F11* para la simulación. El circuito con resultados es el siguiente

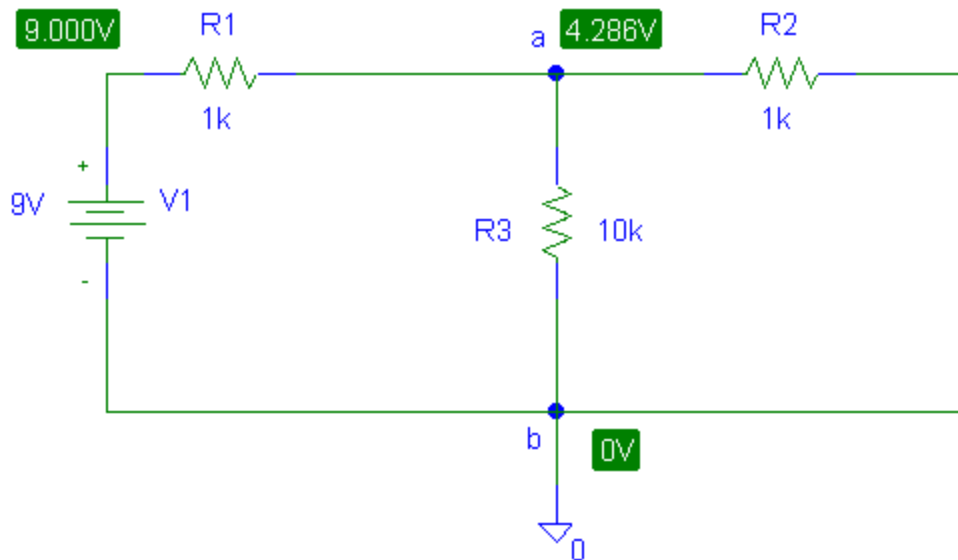
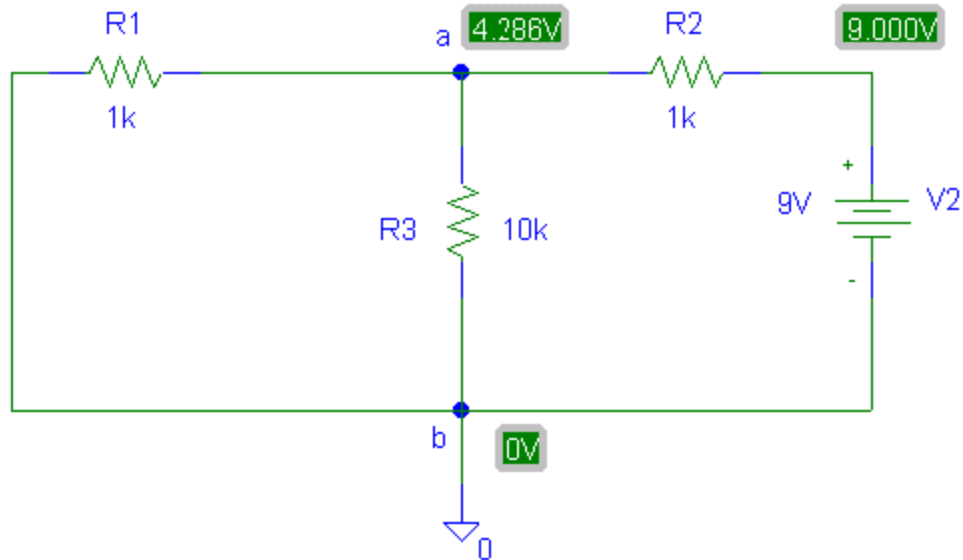


El voltaje de interés es el  $V_{ab} = 8.571 \text{ V}$ .

### Experimento II Circuitos para comprobar el Teorema de Superposición

Para verificar este voltaje con el teorema, se determina la respuesta debida a cada excitación por separado, es decir, se deja una fuente y se anulan las demás.

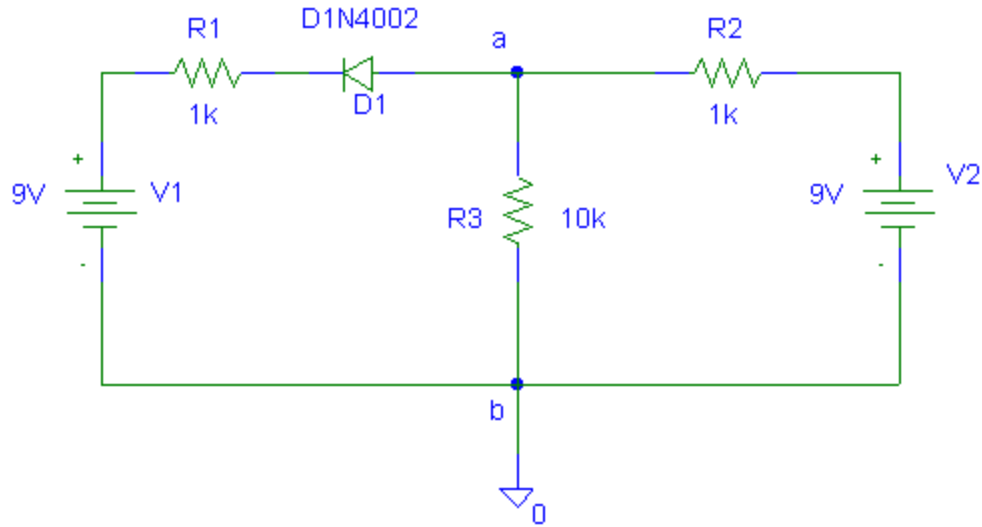
Los dos siguientes circuitos presentan estas respuestas individuales en las terminales *ab*.



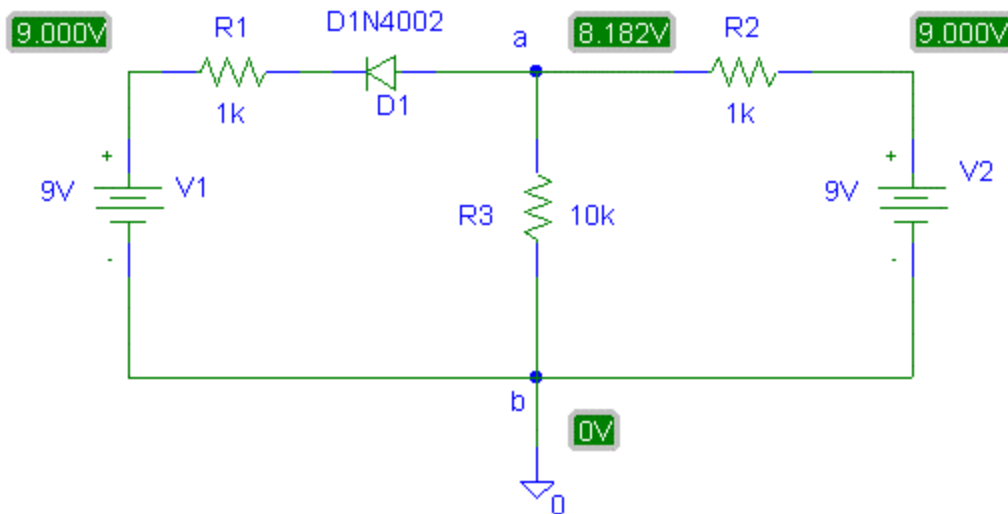
Obteniéndose el voltaje resultante de  $V_{ab} = 4.286 + 4.286 = 8.571$  V, que es lo que se esperaba.

### Experimento III Circuito no lineal en el que se aplica el Teorema de Superposición

Ahora considere el siguiente circuito que contiene un elemento no lineal, el diodo. Se realizará el mismo procedimiento que en los experimentos anteriores, con las mismas condiciones de simulación.



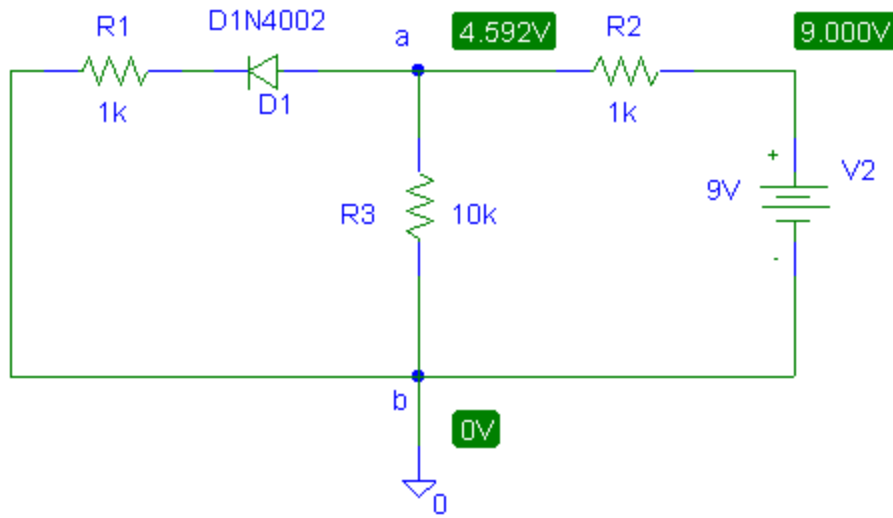
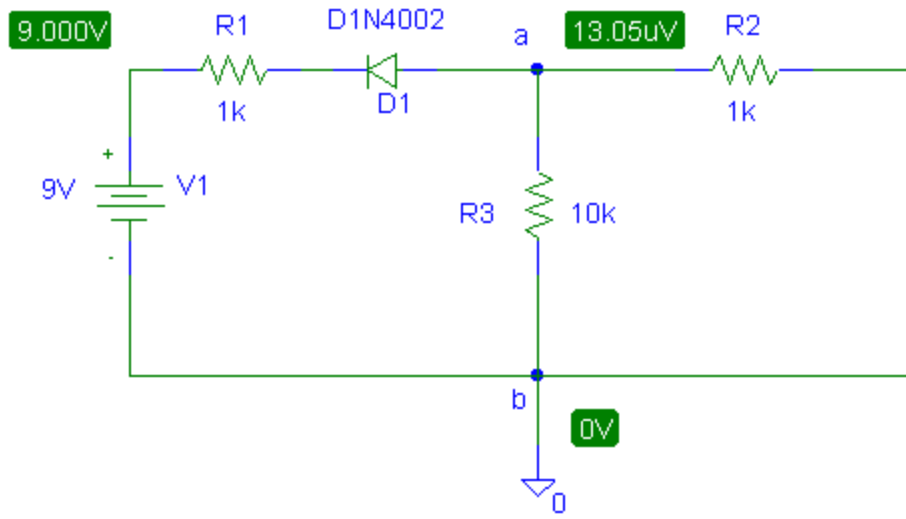
Los resultados de la simulación con las dos fuentes son los siguientes, en donde el voltaje  $V_{ab} = 8.182 \text{ V}$ .



Al aplicar el Teorema de Superposición, se elimina una fuente y se determina la respuesta. Para este caso es  $V_{ab} = 13.05 \text{ mV}$ .

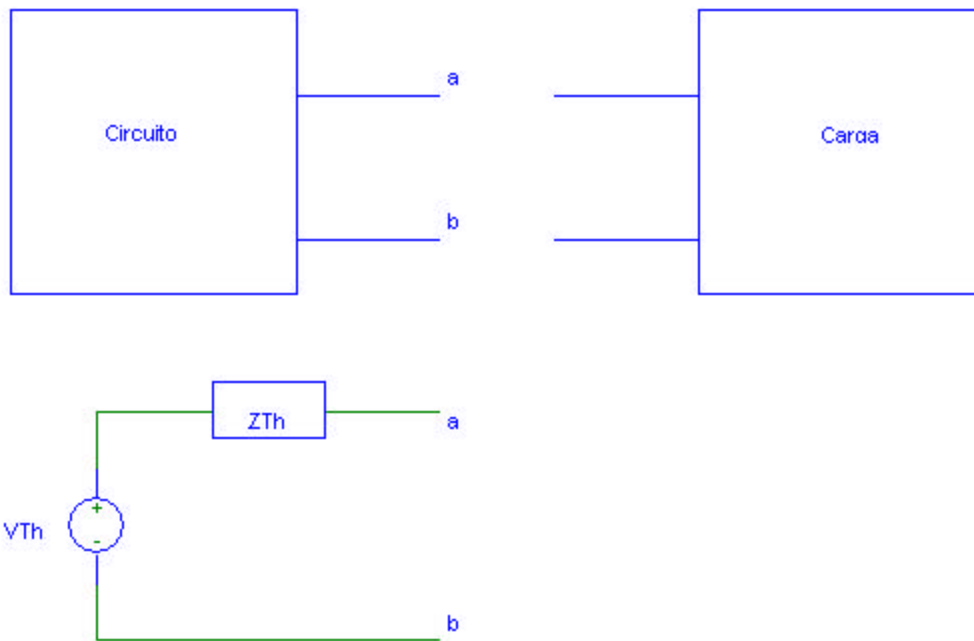
Se repite el procedimiento con la otra fuente, obteniendo un voltaje de  $V_{ab} = 4.592 \text{ V}$ , cuya suma es diferente al voltaje  $V_{ab} = 8.182 \text{ V}$ , del circuito completo. Observándose que no se cumple el teorema debido precisamente al elemento no lineal.

Estos resultados se presentan en la simulación de los dos siguientes circuitos.

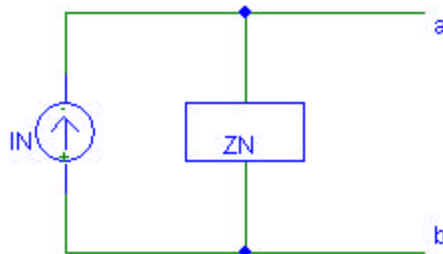
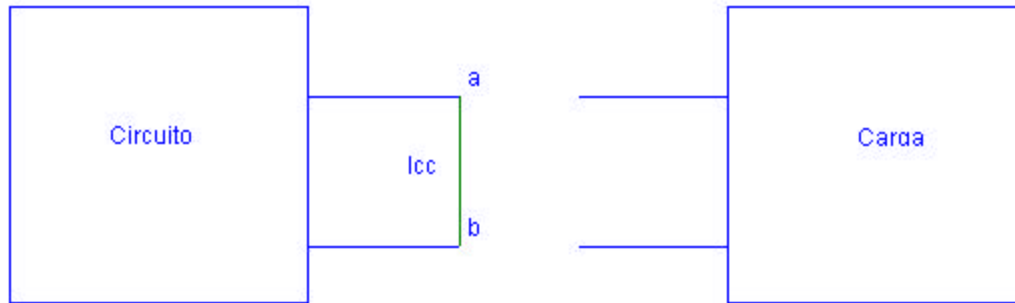


## Teorema de Thévenin y Norton

Estos Teoremas se aplican a circuitos lineales, variantes o invariantes en el tiempo. El teorema de Thévenin establece que un circuito al cual se le ha desconectado la carga en las terminales 'a,b', puede determinarse un circuito equivalente de Thévenin que consiste en una fuente de voltaje en serie con una impedancia, en donde el valor de la fuente de voltaje corresponde al voltaje a circuito abierto en las terminales 'a,b', y la impedancia es la vista desde las terminales 'a,b', cuando las fuentes independientes de voltaje y de corriente se hacen cero, es decir, las de voltaje quedan en corto y las de corriente en circuito abierto. Esto se representa en la siguiente figura



El Teorema de Norton establece que un circuito al cual se le ha desconectado la carga en las terminales 'a,b', puede determinarse un circuito equivalente de Norton que consiste en una fuente de corriente en paralelo con una impedancia, en donde el valor de la fuente de corriente corresponde a la corriente de corto circuito en las terminales 'a,b', y la impedancia es la vista desde las terminales 'a,b', cuando las fuentes independientes de voltaje y de corriente se hacen cero, es decir, las de voltaje quedan en corto y las de corriente en circuito abierto. Esto se representa en la siguiente figura

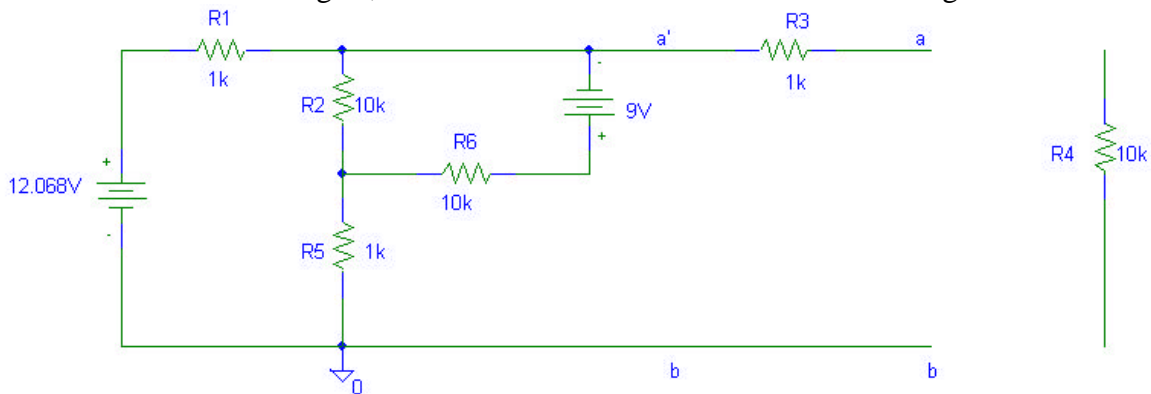


Cabe señalar que una vez que se determina cualquiera de los dos equivalentes, se puede determinar el otro mediante una transformación de fuente de voltaje a fuente de corriente o viceversa.

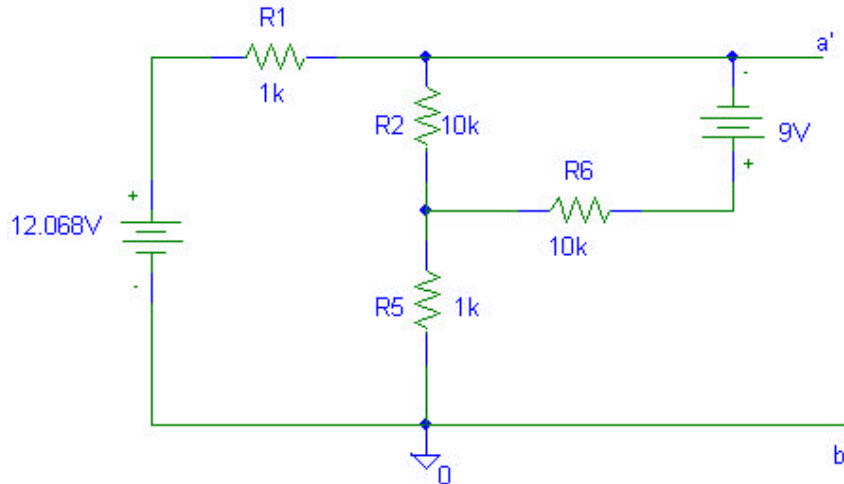
Para verificar estos teoremas, se considerará un circuito propuesto.

### Experimento I Teorema de Thévenin

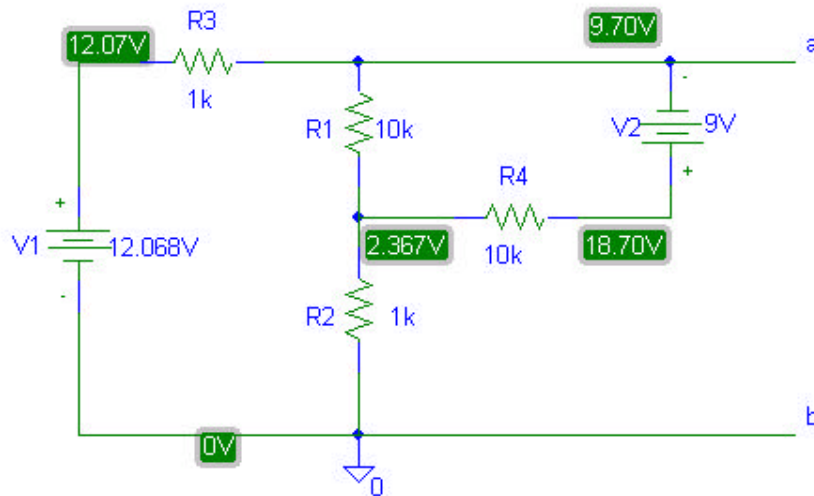
Considere el circuito de la figura, al cual se ha desconectado la resistencia de carga



ya que por la resistencia R3 no circula corriente, el voltaje a circuito abierto es  $V_{a'b}$  cuyo circuito es

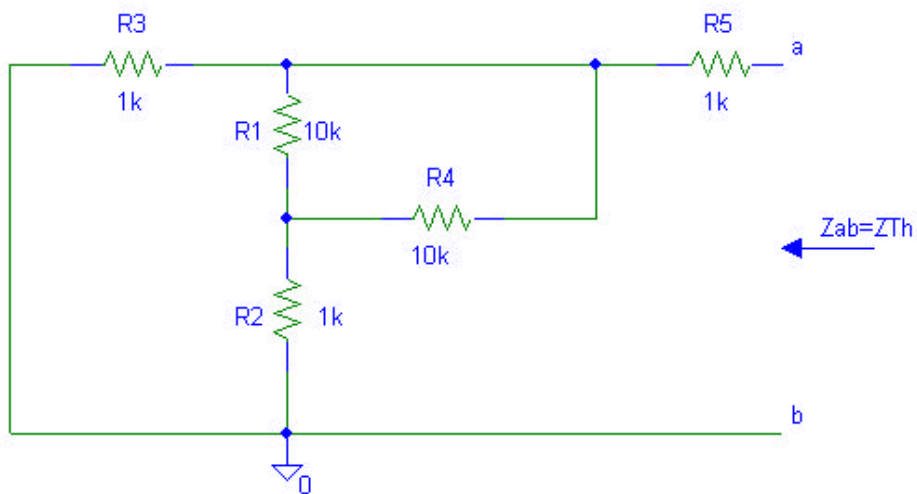


La simulación se lleva a cabo con **F11** y solo se habilita el **Display de Voltajes** en la Barra de **Menu**, presentando los siguientes resultados



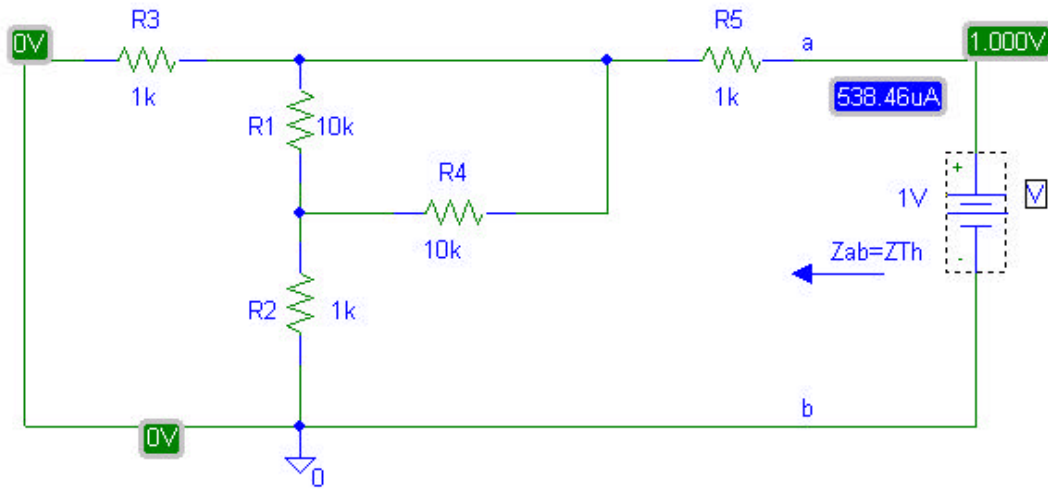
El voltaje de Thévenin es  $V_{Th}=9.7V$ .

Para determinar la  $Z_{Th}$ , se anulan las fuentes de voltaje, quedando el circuito



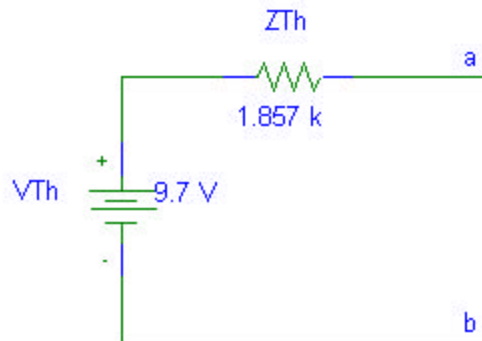


Se observa que la  $Z_{AB} = (((R1 \parallel R4) + R2) \parallel R3) + R5 = \frac{13}{7} k\Omega$ , o bien se puede determinar en Pspice, conectando una fuente de voltaje en las terminales 'ab', como se muestra a continuación

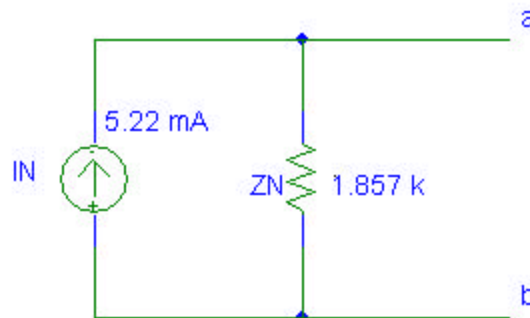


Del resultado de la simulación se observa que  $Z_{AB} = \frac{1V}{538.46\mu A} = 1.857 k\Omega$

Finalmente, el circuito equivalente de Thévenin queda



y mediante una transformación de fuente de voltaje a fuente de corriente, se obtiene el equivalente de Norton



### Teorema de Reciprocidad

Este Teorema se aplica a circuitos lineales e invariantes en el tiempo, que no contengan fuentes dependientes ni independientes. Establece que si la excitación de entrada, ya sea de voltaje o de corriente, se intercambia a la salida, la respuesta del circuito será idéntica en las terminales de entrada. Bajo esta circunstancia, se pueden presentar tres casos:

- a) Si  $V_i(t) = \hat{V}_i(t)$ , entonces  $i_o(t) = \hat{i}_o(t)$
- b) Si  $I_i(t) = \hat{I}_i(t)$  entonces  $v_o(t) = \hat{v}_o(t)$
- c) Si  $V_i(t) = \hat{I}_i(t)$  entonces  $v_o(t) = \hat{i}_o(t)$ , mismo tipo de señal pero diferente fuente.

En donde

$V_i(t)$  o  $I_i(t)$  es la excitación de entrada

$i_o(t)$  o  $v_o(t)$  es la respuesta del circuito

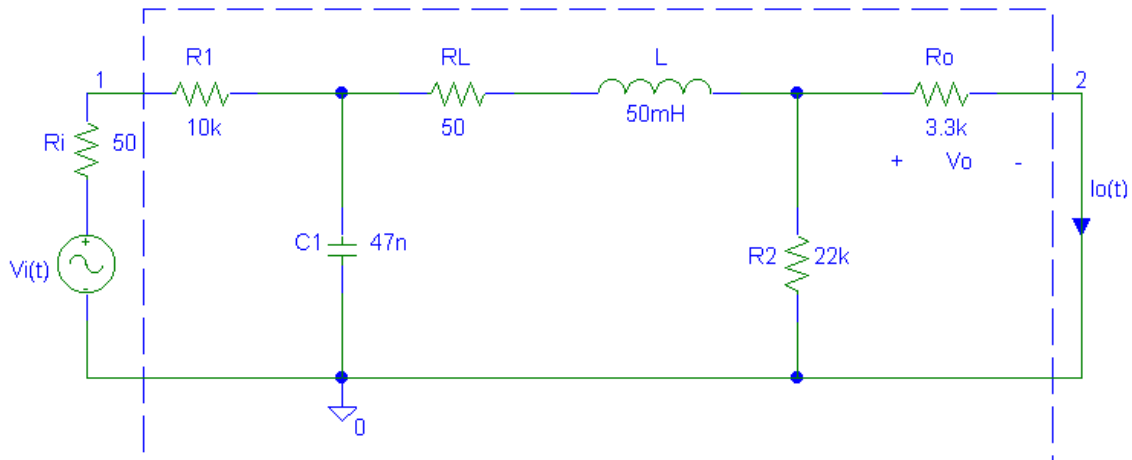
$\hat{V}_i(t)$  o  $\hat{I}_i(t)$  es la excitación intercambiada a la salida

$\hat{i}_o(t)$  o  $\hat{v}_o(t)$  es la respuesta del circuito con la excitación intercambiada

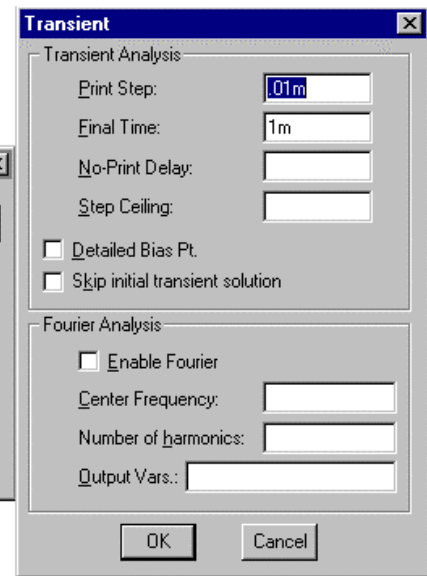
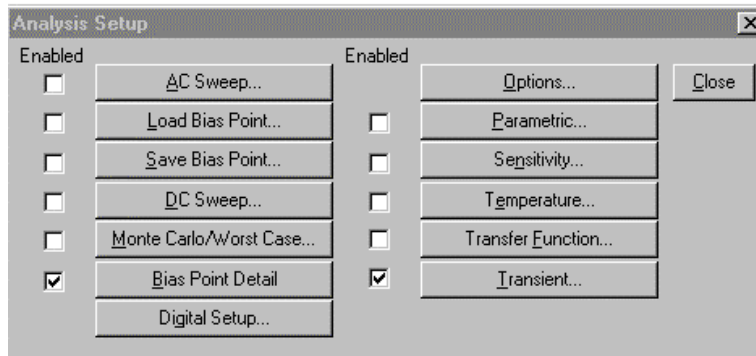
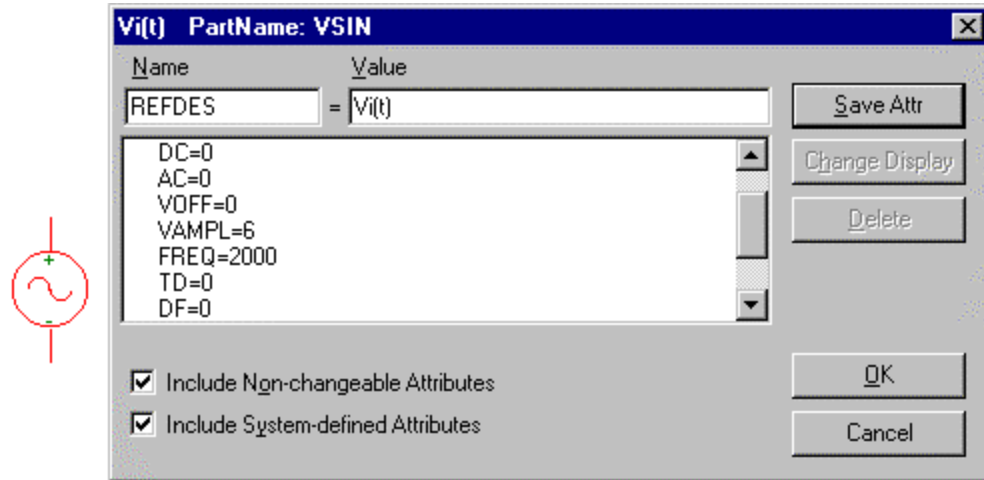
#### Experimento I Teorema de Reciprocidad caso a) Si $V_i(t) = \hat{V}_i(t)$ , entonces $i_o(t) = \hat{i}_o(t)$

Se arma el siguiente circuito en Paspice con  $V_i(t) = 6 \cos(4000\pi t)$ .

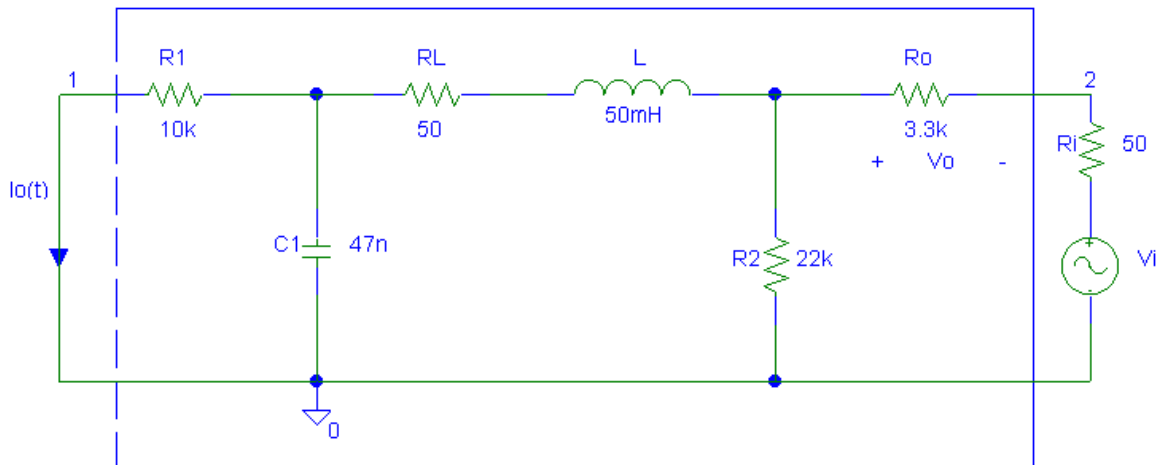
Ya que la fuente es senoidal, se usa una fuente **VSIN**. En este circuito se medirá el voltaje de entrada  $V_i(t)$  y la corriente de salida  $i_o(t)$ .



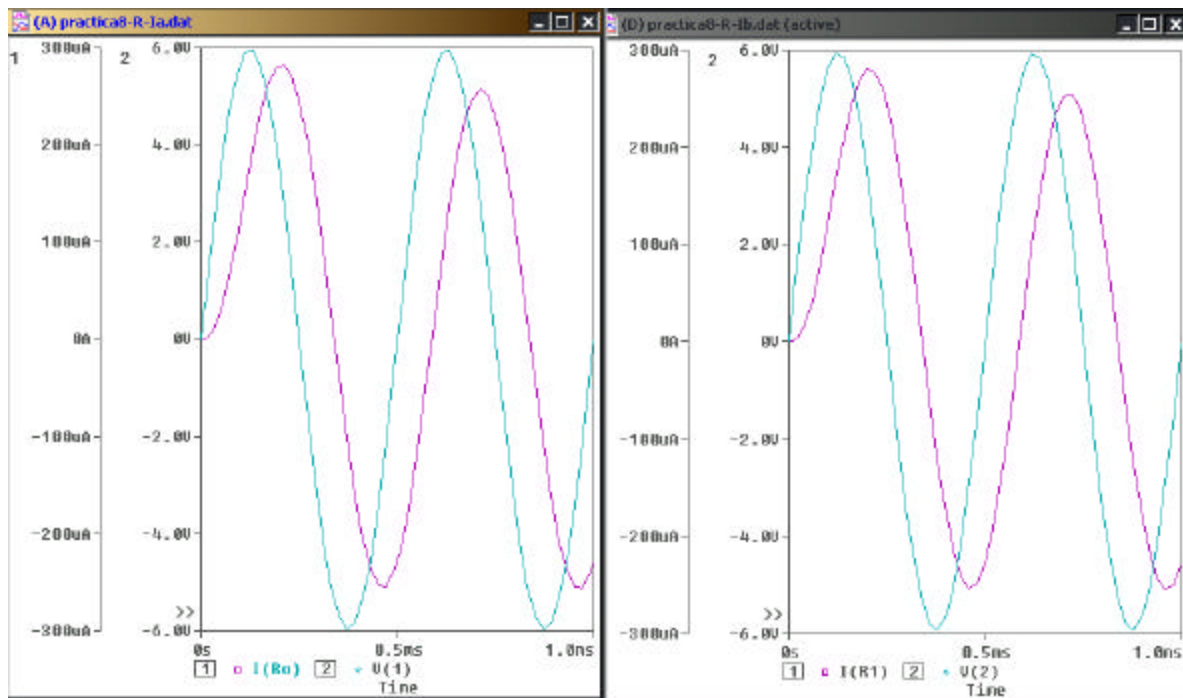
Las características de la fuente y del tipo de análisis son las siguientes



Al intercambiar la entrada a la salida, el circuito se modifica como en la siguiente figura, en donde se medirá  $\hat{V}_i(t)$  e  $\hat{i}_o(t)$ .



Al simular con **FII** las respuestas de voltaje y corriente que se obtienen para los dos circuitos son las siguientes



En las gráficas se observa que el voltaje de entrada y la respuesta  $I_o(t)$  es la misma para los dos circuitos, con lo que se comprueba el caso (a) Si  $V_i(t) = \hat{V}_i(t)$ , entonces  $i_o(t) = \hat{i}_o(t)$  del Teorema de Reciprocidad.

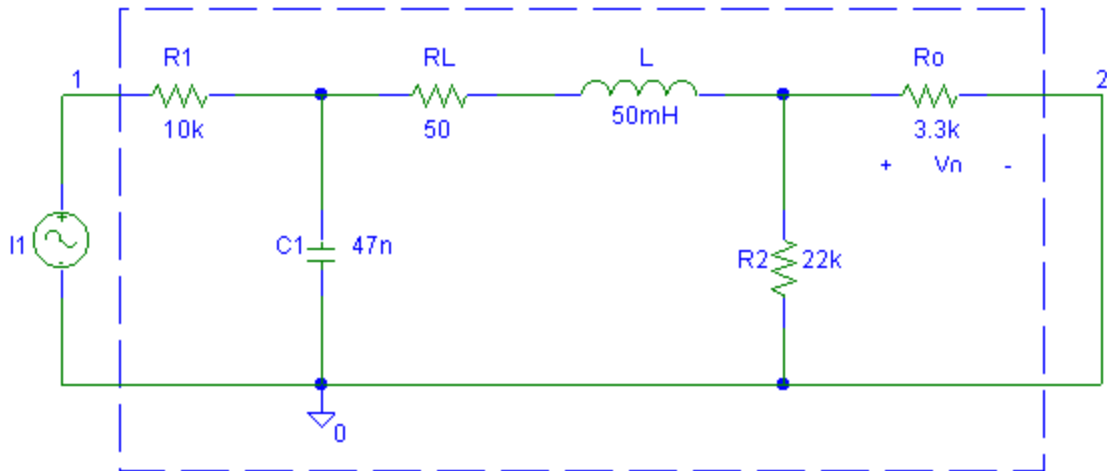
En la pantalla de **Probe** se han incorporado dos gráficas y cada una tiene dos escalas. Para visualizar dos escalas se selecciona la **barra de Menu** => **Plot** => **Add Yaxis**. El eje deseado (indicado en la parte superior como 1 o 2) se selecciona con doble clic del mouse quedando indicado con el símbolo >>.

Para poner dos gráficas de manera simultánea, se lleva a cabo la simulación del primer circuito con la cual se presenta una gráfica. Sin cerrar esta pantalla se abre y simula el segundo circuito generándose la segunda gráfica. Una vez hecho lo anterior, se selecciona en la **barra de Menu** => **Windows** => **Vertical**, quedando las gráficas de manera simultánea para su comparación inmediata.

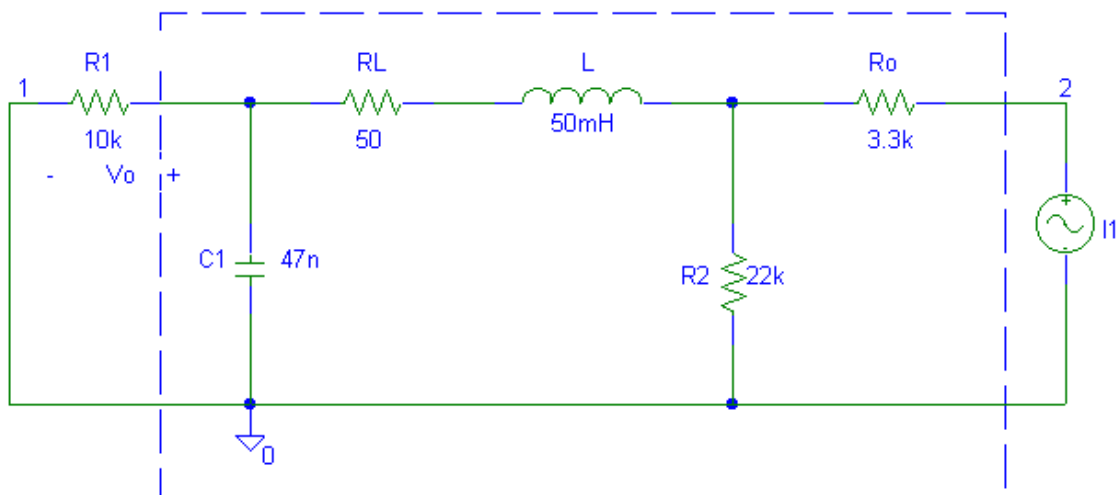
**Experimento II Teorema de Reciprocidad caso b)** Si  $I_i(t) = \hat{I}_i(t)$  entonces  $v_o(t) = \hat{v}_o(t)$

Se arma el siguiente circuito en Pspice con  $I_i(t) = 6\cos(4000\pi t)$  mA.

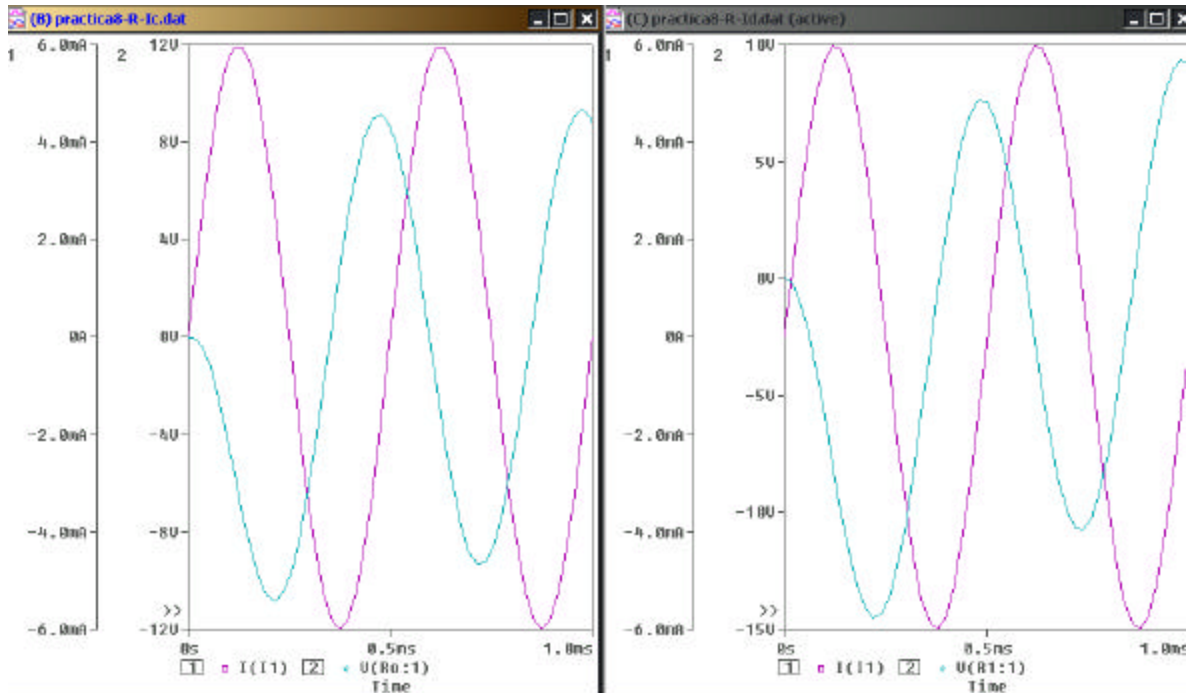
Ya que la fuente es senoidal, se usa una fuente **ISIN**. En este circuito se medirá la corriente de entrada  $I_i(t)$  y el voltaje de salida  $v_o(t)$ .



El circuito modificado queda como se indica a continuación, en donde se medirá la corriente de entrada  $\hat{I}_i(t)$  y el voltaje de salida  $\hat{v}_o(t)$ .



El resultado de las dos simulación es el que se muestra en las gráficas siguientes, en procedimiento para presentarlas es exactamente igual al del Experimento I.



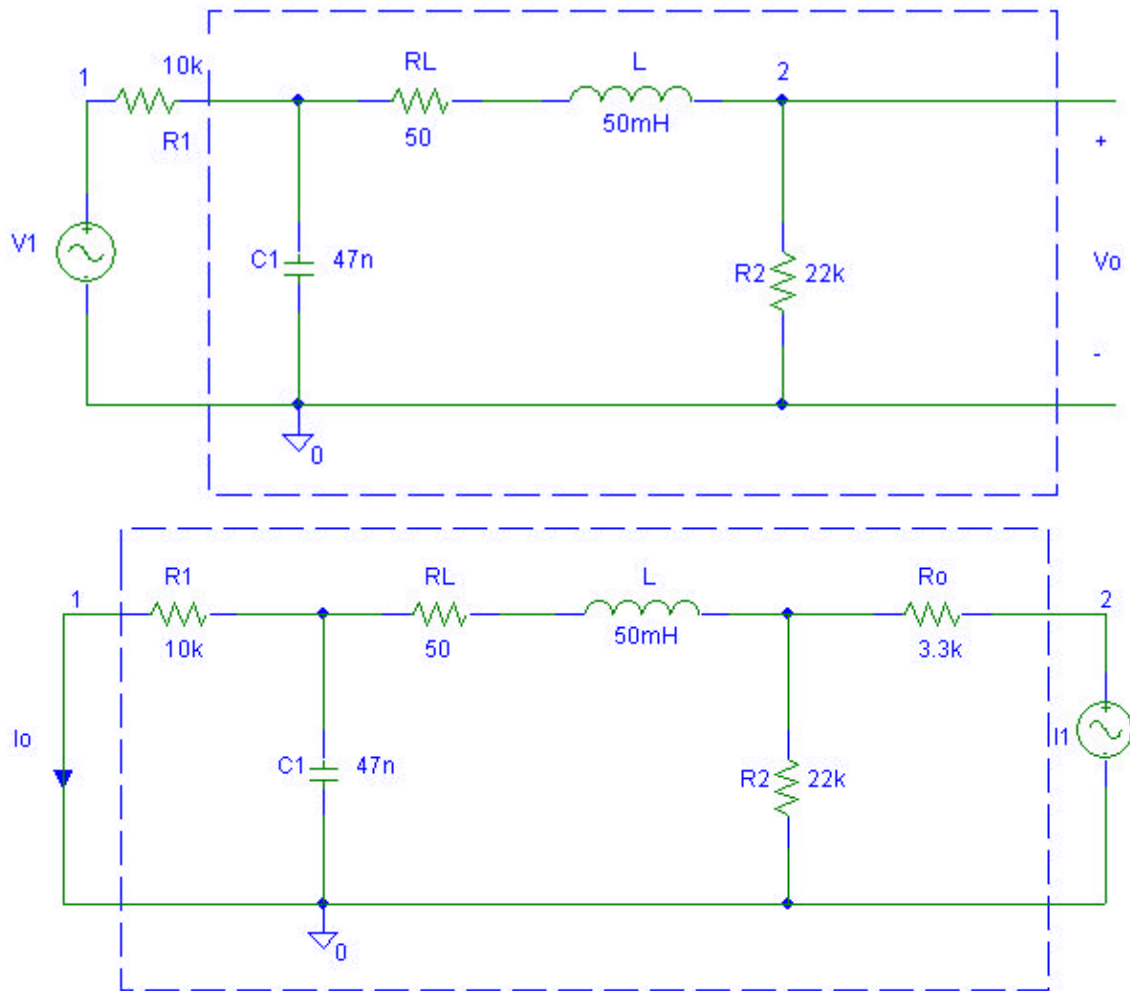
Se observa que las gráficas son idénticas, lo cual era de esperarse para verificar el caso (b) del Teorema de reciprocidad.

**Experimento III Teorema de Reciprocidad caso c) Si  $V_i(t) = \hat{I}_i(t)$  entonces  $v_o(t) = \hat{i}_o(t)$ .**

En este caso, las excitaciones del circuito de referencia y del circuito modificado tienen el mismo tipo de señal pero diferente fuente, es decir, la señal de la fuente de voltaje es  $V_i(t) = 6\cos(4000\pi t) V$  y la señal de la fuente de corriente es  $I_i(t) = 6\cos(4000\pi t) mA$ , obteniendo respectivamente como respuestas  $v_o(t)$  e  $\hat{i}_o(t)$  del mismo tipo de señal pero diferentes unidades.

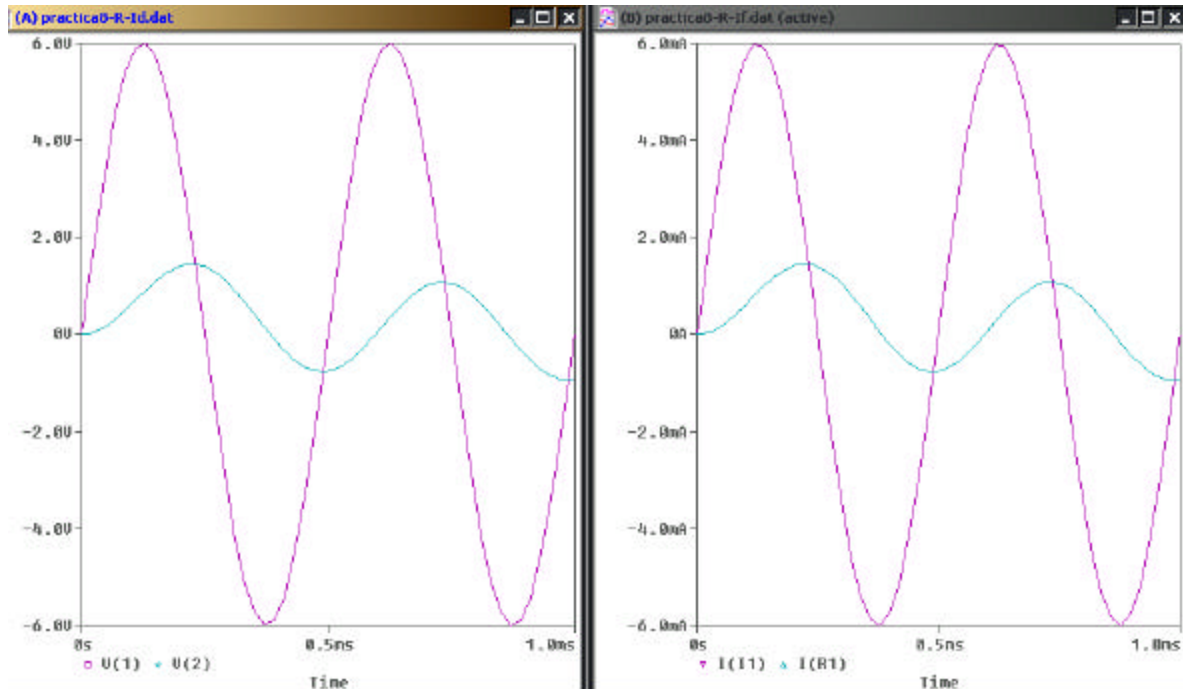
Los circuitos en Pspice son los siguientes, en donde las mediciones que se realizarán son  $v_o(t)$  en el primer circuito e  $\hat{i}_o(t)$  en el segundo.

Observe que el voltaje de salida del circuito cuya excitación es una fuente de voltaje, debe tomarse a circuito abierto.



Los resultados de la simulación son los que se presentan en las gráficas siguientes. De manera directa se observa que las señales en las dos gráficas son idénticas, cambiando únicamente las unidades debido a sus respectivas excitaciones.

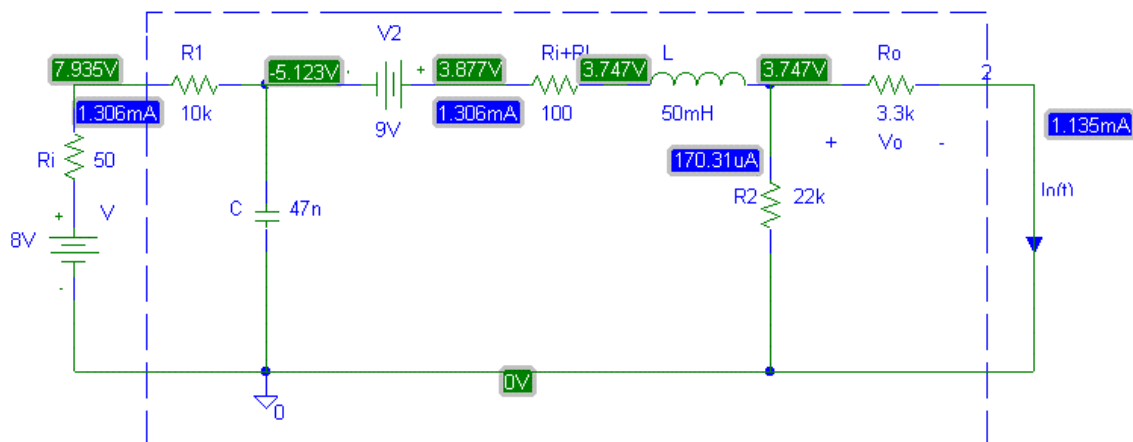
Con lo anterior se verifica el caso (c) del Teorema de Reciprocidad.



**Experimento IV Teorema de Reciprocidad con un circuito que incluye una fuente independiente.**

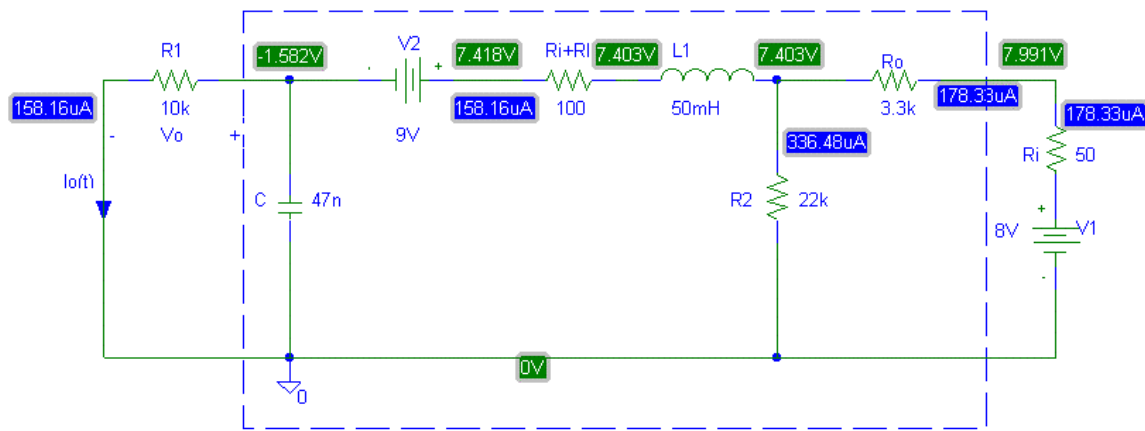
En este circuito se plantea el caso (a) Si  $V_i(t) = \hat{V}_i(t)$ , entonces  $i_o(t) = \hat{i}_o(t)$  del Teorema de Reciprocidad.

Este circuito incluye una fuente de voltaje de directa como parte de sus elementos. La figura siguiente muestra el circuito ya simulado (con *FII*) el cual presenta los voltajes de nodo y corrientes de rama, mismos que se habilitan en la barra de *Menu* con el icono de *Display de Voltaje* y *Display de Corriente*. Los de interés son el voltaje de entrada y la corriente de salida





De manera similar, el siguiente circuito muestra la fuente de voltaje intercambiada a la salida, así como los voltajes de nodo y las corrientes de rama generados en la simulación.



Se observa que los resultados de ambos circuitos no corresponden, con lo que se comprueba el caso (a) Si  $V_i(t) = \hat{V}_i(t)$ , entonces  $i_o(t) = \hat{i}_o(t)$  del Teorema de Reciprocidad. Esto se debe por supuesto, a que se incluye una fuente de directa de 9V, lo cual es una restricción de este teorema.

### Comentarios

Para el teorema de sustitución, es conveniente que se determinen diferentes configuraciones de fuentes reales de voltaje y de corriente que puedan sustituir la rama analizada.

Se sugiere aplicar el teorema de Superposición a circuitos con fuentes de voltaje, de corriente y también dependientes, de directa y/o de alterna. Así mismo, de manera similar al procedimiento utilizado para determinar el equivalente de Thévenin, es conveniente determinar el equivalente de Norton.