

PRÁCTICA 9

Circuitos de dos puertos o bipuertos

Objetivo: Familiarizar al alumno con algunas de las formas que caracterizan a un bipuerto. Determinar la relación que existe entre una forma de representación y otra. Verificar la validez de las expresiones que permiten calcular algunas funciones de red; tales como impedancia de entrada y salida, función de transferencia, etc. Utilizar el concepto de bipuerto en el análisis de un circuito, sistema, ecualizador o filtro. Aplicar los conceptos de escalamiento en frecuencia e impedancia en un circuito real. Bosquejar la curva de respuesta en frecuencia de un circuito real. Conocer las propiedades de un amplificador operacional ideal en su aplicación en el análisis de un circuito que lo contenga.

Teoría básica

Una aplicación que se encuentra frecuentemente en la práctica es el uso de un dispositivo que sirva para transmitir una señal de información. Dicho dispositivo al cual denominaremos circuito de dos puertos o simplemente bipuerto, además de transmitir la señal, algunas veces, la debe amplificar, filtrar o modificar de alguna forma, otras veces también se utiliza para proporcionar un acoplamiento entre la señal de entrada y la carga. La configuración general de un bipuerto se muestra en la Fig. 1(a), en el que por conveniencia el subíndice 1 se asigna a las variables del puerto de entrada y el subíndice 2 a las variables del puerto de salida.

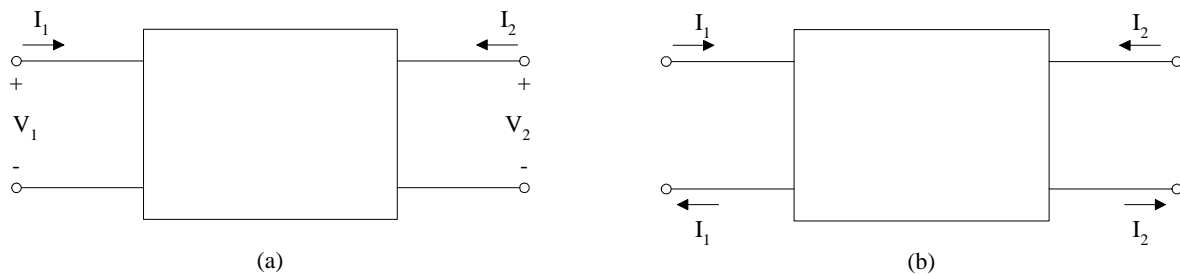


Figura 1. (a) Configuración general de un bipuerto. (b) Condición de las corrientes de puerto.

Como la configuración general del bipuerto tiene cuatro terminales, es teóricamente posible definir una variable para cada una de las corrientes en cada terminal. Para eliminar esta posibilidad, cada puerto de la red debe satisfacer la siguiente condición: la corriente que entra a una de las terminales de un puerto es, para todo tiempo, igual a la corriente que sale por la otra terminal del mismo puerto; tal como muestra la Fig. 1.(b). Puesto que ahora tenemos cuatro variables, I_1 , I_2 , V_1 y V_2 , en lugar de las dos que se requieren para describir una red de un puerto, ahora se necesitan dos ecuaciones para relacionarlas. Esas ecuaciones tienen la siguiente forma general.

$$\begin{aligned} U_1(s) &= k_{11}(s)W_1(s) + k_{12}(s)W_2(s) \\ U_2(s) &= k_{21}(s)W_1(s) + k_{22}(s)W_2(s) \end{aligned} \tag{1}$$

donde las variables $U_1(s)$, $U_2(s)$, $W_1(s)$ y $W_2(s)$ pueden ser cualesquiera de las variables $I_1(s)$, $I_2(s)$, $V_1(s)$ o $V_2(s)$. Los $k_{ij}(s)$ se denominan parámetros de red y son funciones de red que las relacionan. Los posibles

valores que pueden tomar $U_1(s)$ y $U_2(s)$ se muestran en la Tabla I y son el resultado de las combinaciones de cuatro elementos tomados de dos en dos. Una vez que $U_1(s)$ y $U_2(s)$ se especifican, $W_1(s)$ y $W_2(s)$ quedan determinados.

Tabla 1

Caso	$U_1(s)$	$U_2(s)$	$W_1(s)$	$W_2(s)$
1	$V_1(s)$	$V_2(s)$	$I_1(s)$	$I_2(s)$
2	$I_1(s)$	$I_2(s)$	$V_1(s)$	$V_2(s)$
3	$I_1(s)$	$V_2(s)$	$V_1(s)$	$I_2(s)$
4	$V_1(s)$	$I_2(s)$	$I_1(s)$	$V_2(s)$
5	$V_1(s)$	$I_1(s)$	$V_2(s)$	$-I_2(s)$
6	$V_2(s)$	$I_2(s)$	$V_1(s)$	$-I_1(s)$

Cada conjunto tiene propiedades específicas que lo hacen diferente de cualquier otro y adecuado para aplicarlo a ciertas configuraciones de redes. Cabe señalar que conocido un conjunto de parámetros es posible encontrar otro, si es que éste existe.

Parámetros z o de impedancia de circuito abierto.

En esta sección consideraremos el primer caso de la Tabla I; $V_1(s)$ y $V_2(s)$ para las variables $U_1(s)$ y $U_2(s)$; e $I_1(s)$ e $I_2(s)$ para $W_1(s)$ y $W_2(s)$; quedando la Ec. (1) de la siguiente forma

$$V_1(s) = z_{11}(s)I_1(s) + z_{12}(s)I_2(s) \quad (2)$$

$$V_2(s) = z_{21}(s)I_1(s) + z_{22}(s)I_2(s)$$

ya que los miembros de lado izquierdo del conjunto resultante tienen dimensiones de voltaje y las variables $W_1(s)$ y $W_2(s)$ tienen dimensiones de corriente; los parámetros $k_{ij}(s)$ tienen dimensiones de impedancia. La Ec. (2) puede escribirse en forma matricial como

$$\underline{V}(s) = \underline{Z}(s)\underline{I}(s) \quad (3)$$

donde la matriz $\underline{Z}(s)$ se denomina matriz de parámetros z y sus elementos $z_{ij}(s)$ parámetros z .

Para una red dada, los parámetros z pueden determinarse aplicando un conjunto de entradas de prueba a la red. Para ver esto, considere la primera ecuación de la Ec. (2); si el puerto de salida de la red está en circuito abierto, entonces $I_2(s) = 0$, quedando la ecuación

$$V_1(s) = z_{11}(s)I_1(s) \quad \left| \quad I_2(s) = 0 \right. \quad (4)$$

recordando que las funciones de red se definen como (transformada de la salida)/(transformada de la entrada), la Ec. (4) indica que debe utilizarse como entrada una corriente en el puerto de entrada y considerarse como respuesta el voltaje en el mismo puerto. Por lo que el parámetro $z_{11}(s)$ queda definido por la relación

$$z_{11}(s) = \frac{V_1(s)}{I_1(s)} \quad \left| \quad I_2(s) = 0 \right. \quad (5)$$

Un procedimiento similar puede emplearse para calcular $z_{21}(s)$; por lo que

$$z_{21}(s) = \left. \frac{V_2(s)}{I_1(s)} \right|_{I_2(s)=0} \quad (6)$$

Los otros dos parámetros z_{ij} , restantes, pueden encontrarse aplicando una corriente en el otro puerto. En la Fig. 2 se muestran las condiciones necesarias para determinar dichos parámetros.

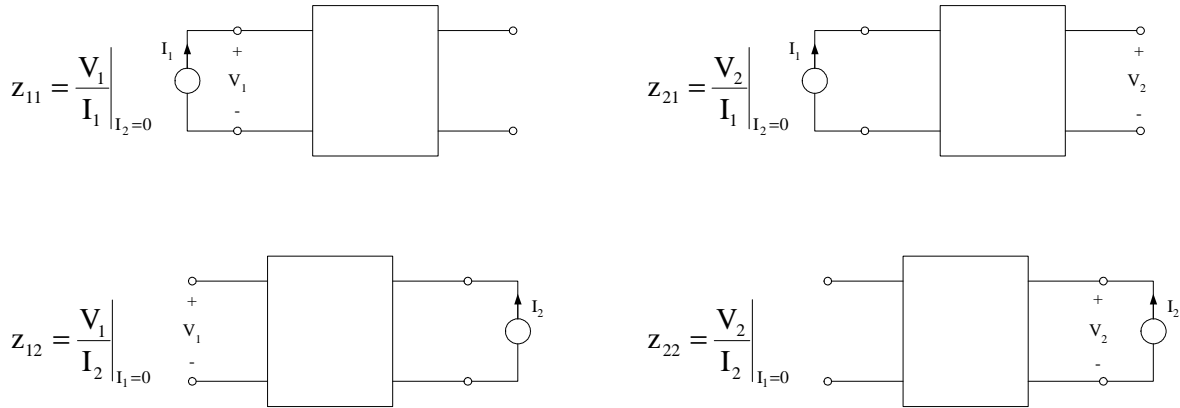


Figura 2. Condiciones de prueba para calcular los parámetros $z_{ij}(s)$.

Una propiedad importante de los parámetros es que si para una red dada son conocidos, puede encontrarse cualquier función de red a partir de ellos. Por ejemplo, considere el problema de calcular la función de transferencia de voltaje de circuito abierto $\frac{V_2(s)}{V_1(s)}$.

La condición de circuito abierto implica que $I_2(s) = 0$, por lo que de la Ec. (2) se tiene

$$V_1(s) = z_{11}(s)I_1(s) \quad (7)$$

$$V_2(s) = z_{21}(s)I_1(s)$$

de donde

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{z_{21}(s)}{z_{11}(s)} \quad (8)$$

Otro problema podría ser, determinar la impedancia de entrada $\frac{V_1(s)}{I_1(s)}$ cuando el puerto de salida está en corto

circuito. Si el puerto de salida se encuentra en corto circuito entonces $V_2(s) = 0$; y de la Ec. (2) se tiene $z_{21}(s)I_1(s) + z_{22}(s)I_2(s) = 0$, por lo que

$$I_2(s) = -\frac{z_{21}(s)}{z_{22}(s)} I_1(s) \quad (9)$$

sustituyendo en $V_1(s) = z_{11}(s)I_1(s) + z_{12}(s)I_2(s)$

$$\frac{V_1(s)}{I_1(s)} = z_{11}(s) - \frac{z_{12}(s)z_{21}(s)}{z_{22}(s)} \quad (10)$$

Un procedimiento similar puede emplearse para encontrar cualquier otra función de red.

En algunas configuraciones de redes es posible simplificar el cálculo de los parámetros, “descomponiendo” la red en cuestión, en redes más simples. Como ejemplo, considere el caso mostrado en la Fig. 3 en donde se muestran dos bipuertos conectados en serie.

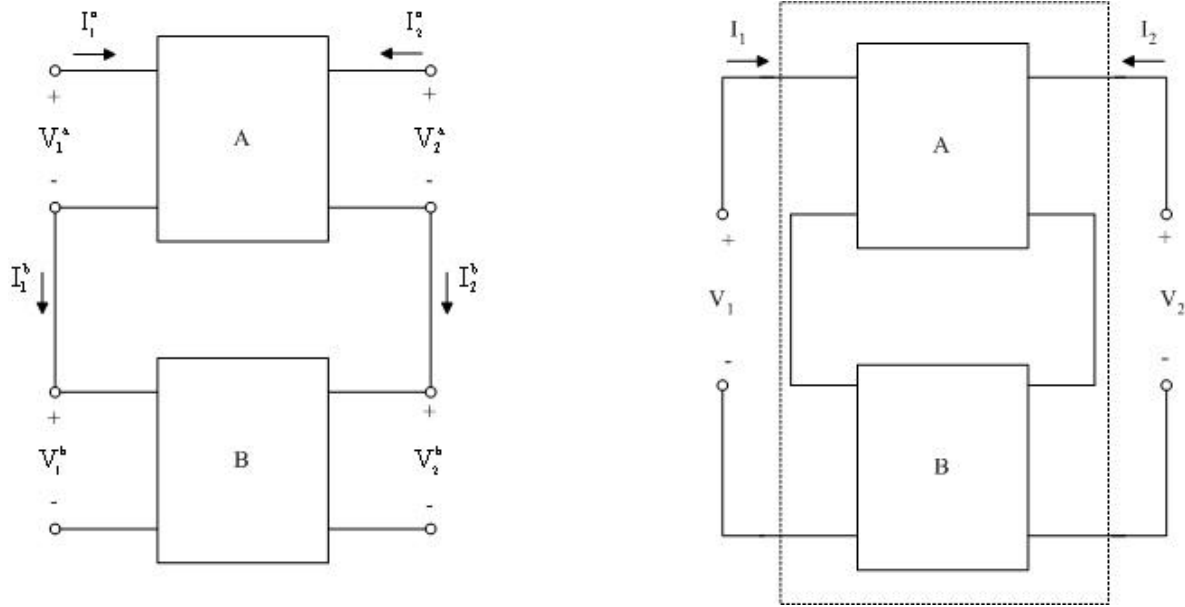


Figura 3. Conexión de dos bipuertos en serie.

Para la red A con los voltajes y corrientes mostrados, podemos definir un conjunto de parámetros $z_{ij}^a(s)$ mediante

$$\underline{V}^a(s) = \begin{bmatrix} V_1^a(s) \\ V_2^a(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11}^a(s) & z_{21}^a(s) \\ z_{12}^a(s) & z_{22}^a(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1^a(s) \\ I_2^a(s) \end{bmatrix} = \underline{Z}^a(s) \underline{I}^a(s) \quad (11)$$

En forma similar para la red B se define el conjunto de parámetros $z_{ij}^b(s)$

$$\underline{V}^b(s) = \begin{bmatrix} V_1^b(s) \\ V_2^b(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11}^b(s) & z_{21}^b(s) \\ z_{12}^b(s) & z_{22}^b(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1^b(s) \\ I_2^b(s) \end{bmatrix} = \underline{Z}^b(s) \underline{I}^b(s) \quad (12)$$

De la Fig. 3, al aplicar las leyes de Kirchhoff, se tiene

$$\underline{V}(s) = \underline{V}^a(s) + \underline{V}^b(s) \quad (13)$$

$$\underline{I}(s) = \underline{I}^a(s) = \underline{I}^b(s) \quad (14)$$

de las Ecs. (11), (12), (13) y (14)

$$\underline{V}(s) = [\underline{Z}^a(s) + \underline{Z}^b(s)] \underline{I}(s) = \underline{Z}(s) \underline{I}(s) \quad (15)$$

Concluyendo, para un bipuerto formado por dos bipuertos conectados en serie, sus parámetros z pueden encontrarse sumando los parámetros z correspondientes de las redes que lo componen.

Cabe hacer notar, que para una red recíproca los elementos $z_{12}(s)$ y $z_{21}(s)$ son iguales y por consiguiente la matriz de parámetros z es simétrica.

Parámetros y o de admitancia de corto circuito.

En esta sección consideraremos el caso 2 de la Tabla 1, en donde para las variables $U_1(s)$ y $U_2(s)$ se eligen a $I_1(s)$ e $I_2(s)$. Por lo que los parámetros del bipuerto son funciones de red con dimensiones de admitancia, $y_{ij}(s)$, que especifican a las corrientes de los puertos como funciones de los voltajes $V_1(s)$ y $V_2(s)$, o sea

$$\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11}(s) & y_{12}(s) \\ y_{21}(s) & y_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} \quad (16)$$

en forma matricial

$$\underline{I}(s) = \underline{Y}(s)\underline{V}(s) \quad (17)$$

Dos de los cuatro parámetros, $y_{11}(s)$ y $y_{21}(s)$, pueden encontrarse aplicando una fuente de voltaje en el puerto 1 y poniendo en corto circuito el puerto 2; midiendo las corrientes resultantes en cada puerto. Los otros dos parámetros se encuentran en forma similar, aplicando un voltaje de entrada en el puerto 2 y poniendo en corto circuito el puerto 1. La Fig. 4 muestra las condiciones para determinar los parámetros $y_{ij}(s)$.

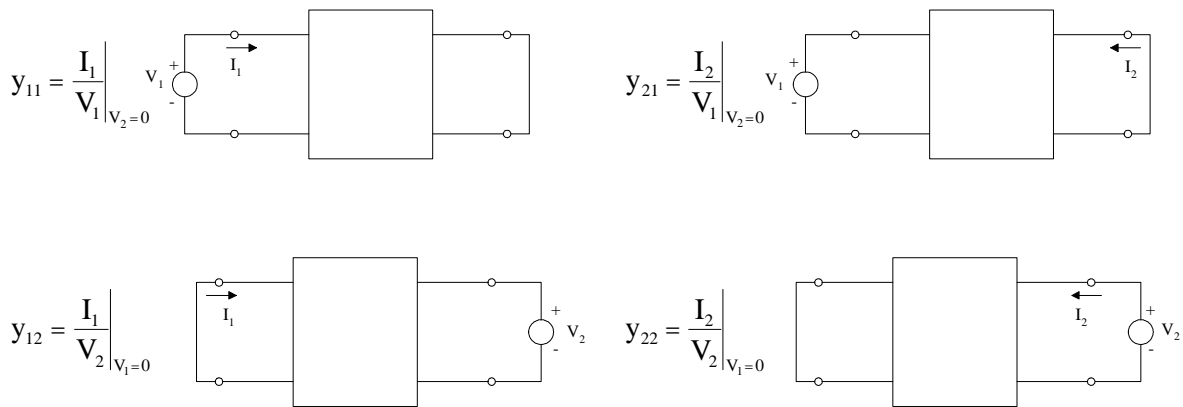


Figura 4. Condiciones de prueba para calcular los parámetros $y_{ij}(s)$.

En la sección anterior se mostró que

$$\underline{V}(s) = \underline{Z}(s) \underline{I}(s) \quad (18)$$

premultiplicando por la matriz de parámetros y

$$\underline{Y}(s)\underline{V}(s) = \underline{Y}(s)\underline{Z}(s)\underline{I}(s) \quad (19)$$

considerando la Ec. (17), se concluye que

$$\underline{Y}(s) = \underline{Z}(s)^{-1} \quad \text{o} \quad \underline{Z}(s) = \underline{Y}(s)^{-1} \quad (20)$$

De la misma manera, como se hizo para el cálculo de los parámetros z de bipuertos en serie, es posible simplificar el cálculo de los parámetros y_{ij} descomponiendo la red original en redes más simples. Considérese el circuito de dos puertos mostrado en la Fig. 5. Este tipo de configuración es llamado conexión paralelo de dos bipuertos.

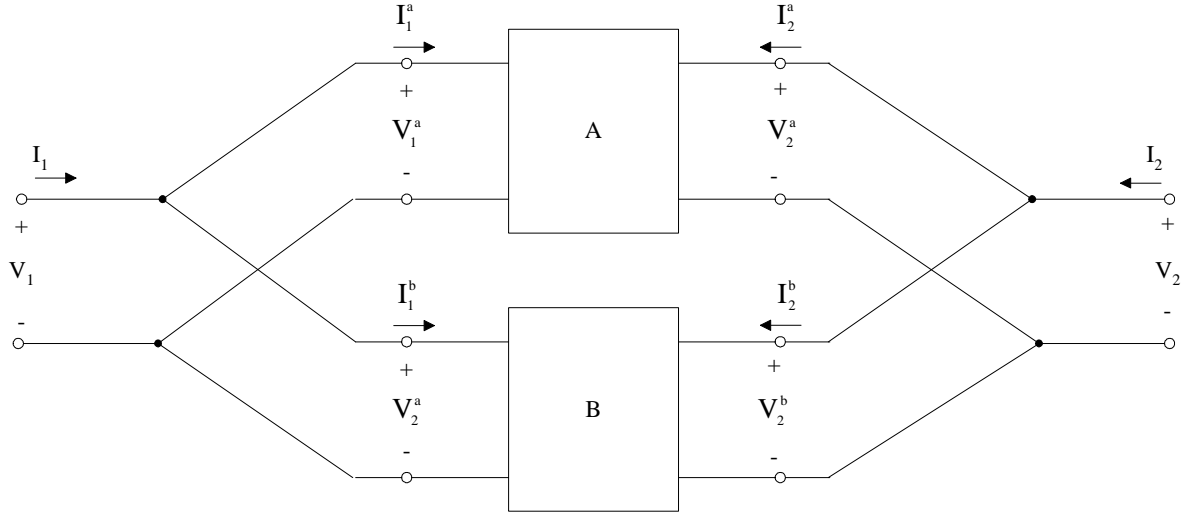


Figura 5. Conexión de dos bipuertos en paralelo.

Para el bipuerto A, la matriz de parámetros de corto circuito es

$$\underline{\mathbf{I}}^a(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1^a(s) \\ \mathbf{I}_2^a(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11}^a(s) & y_{12}^a(s) \\ y_{21}^a(s) & y_{22}^a(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^a(s) \\ \mathbf{V}_2^a(s) \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{Y}}^a(s) \underline{\mathbf{V}}^a(s) \quad (21)$$

en forma similar, para el bipuerto B

$$\underline{\mathbf{I}}^b(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1^b(s) \\ \mathbf{I}_2^b(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11}^b(s) & y_{12}^b(s) \\ y_{21}^b(s) & y_{22}^b(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^b(s) \\ \mathbf{V}_2^b(s) \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{Y}}^b(s) \underline{\mathbf{V}}^b(s) \quad (22)$$

Aplicando las leyes de Kirchoff al circuito de la Fig. 5, se tiene

$$\underline{\mathbf{V}}(s) = \underline{\mathbf{V}}^a(s) = \underline{\mathbf{V}}^b(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1(s) \\ \mathbf{V}_2(s) \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\underline{\mathbf{I}}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1(s) \\ \mathbf{I}_2(s) \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{I}}^a(s) + \underline{\mathbf{I}}^b(s) \quad (24)$$

considerando las Ecs. (21), (22), (23) y (24)

$$\underline{\mathbf{I}}(s) = [\underline{\mathbf{Y}}^a(s) + \underline{\mathbf{Y}}^b(s)] \underline{\mathbf{V}}(s) \quad (25)$$

Así, los parámetros y_{ij} de todo el bipuerto, pueden calcularse sumando los parámetros y_{ij} correspondientes de cada uno de los bipuertos individuales que lo componen.

Ejemplo.

Determine la función de transferencia del circuito de la Fig. 6.

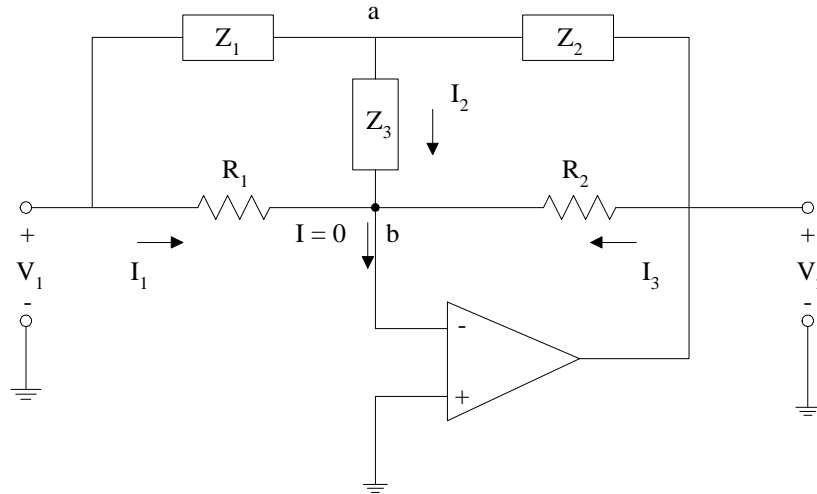


Figura 6. Filtro activo.

Para determinar la relación que se desea, el circuito se puede considerar que está constituido por dos bipuertos conectados en paralelo.

Teniendo en cuenta las propiedades del amplificador operacional ideal, (ver apéndice 1); esto es, considerando la ganancia del amplificador infinita, el potencial del nodo b es nulo, $V_b = 0$; y dado que la impedancia de entrada del amplificador también se considera infinita, la corriente en la entrada inversora es nula, $I = 0$, lo que implica que

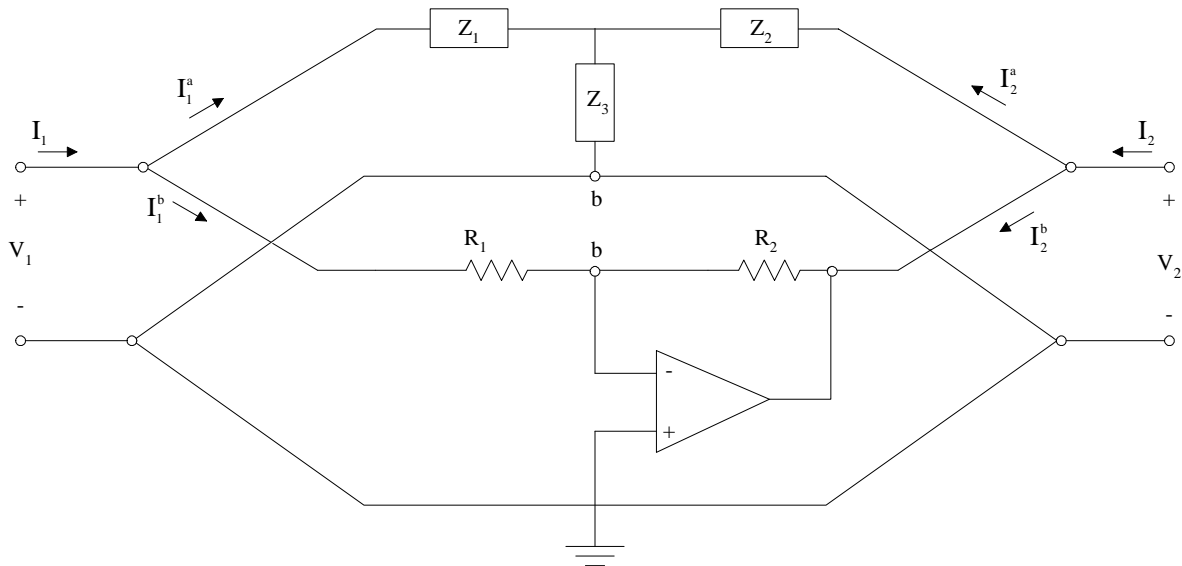


Figura 7. El filtro activo de la figura 6.

$$I_{R_1} + I_{Z_3} + I_{R_2} = I = 0 \quad (26)$$

o también

$$\frac{V_1 - V_b}{R_1} + \frac{V_a - V_b}{Z_3} + \frac{V_2 - V_b}{R_2} = I = 0 \quad (27)$$

Como consecuencia de que $V_b = 0$ e $I = 0$, el nodo b es referido como tierra virtual. Considerando lo anterior el circuito de la Fig. 6, puede redibujarse como muestra la Fig. 7.

Nótese la similitud entre los circuitos de las Figs. 5 y 7. De la Ec. (24) podemos escribir para el circuito de la Fig. 7.

$$I_1(s) = I_1^a(s) + I_1^b(s) \quad (28)$$

$$I_2(s) = I_2^a(s) + I_2^b(s)$$

donde

$$\begin{bmatrix} I_1^a(s) \\ I_2^a(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11}^a(s) & y_{12}^a(s) \\ y_{21}^a(s) & y_{22}^a(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11}^a(s) & z_{12}^a(s) \\ z_{21}^a(s) & z_{22}^a(s) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} \quad (29)$$

y para el bipuerto B

$$I_1^b(s) = \frac{V_1(s)}{R_1} = I_{R_1} \quad (30)$$

$$I_2^b(s) = \frac{V_2(s)}{R_2} = I_{R_2}$$

sustituyendo las Ecs. (29) y (30) en la Ec. (28)

$$I_1(s) = y_{11}^a(s)V_1(s) + y_{12}^a(s)V_2(s) + \frac{1}{R_1}V_1(s) \quad (31)$$

$$I_2(s) = y_{21}^a(s)V_1(s) + y_{22}^a(s)V_2(s) + \frac{1}{R_2}V_2(s)$$

considerando la Ec. (26) y teniendo en cuenta que $I_{Z_3} = I_1^a + I_2^a$

$$I_1^b(s) + I_1^a(s) + I_2^a(s) + I_2^b(s) = I_1(s) + I_2(s) = 0 \quad (27')$$

por lo que

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = - \frac{y_{11}^a(s) + y_{21}^a(s) + \frac{1}{R_1}}{y_{12}^a(s) + y_{22}^a(s) + \frac{1}{R_2}} \quad (32)$$

ecuación que en función $Z_1(s)$, $Z_2(s)$ y $Z_3(s)$ es

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = - \frac{\frac{Z_2}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3} + \frac{1}{R_1}}{\frac{Z_1}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3} + \frac{1}{R_2}} \quad (33)$$

Parámetros híbridos.

A continuación se presentan dos conjuntos de parámetros que difieren en cuanto a la naturaleza de los vistos en las dos secciones anteriores. Se denominan parámetros g y parámetros h y colectivamente parámetros híbridos. Este nombre resulta apropiado debido a que los elementos individuales de cada conjunto tienen dimensiones diferentes.

Los parámetros g de un bipuerto son las funciones de red $g_{ij}(s)$ que especifican la corriente del puerto 1 y el voltaje del puerto 2 como funciones de las otras variables. Las relaciones son

$$\begin{bmatrix} I_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} \quad (34)$$

Dos de los cuatro parámetros se encuentran aplicando una fuente de voltaje como entrada en el puerto 1 y poniendo en circuito abierto el puerto 2. Los otros dos se encuentran aplicando una fuente de corriente como entrada en el puerto 2 y poniendo en corto circuito el puerto 1. En la Fig. 8 se muestran las condiciones mencionadas.

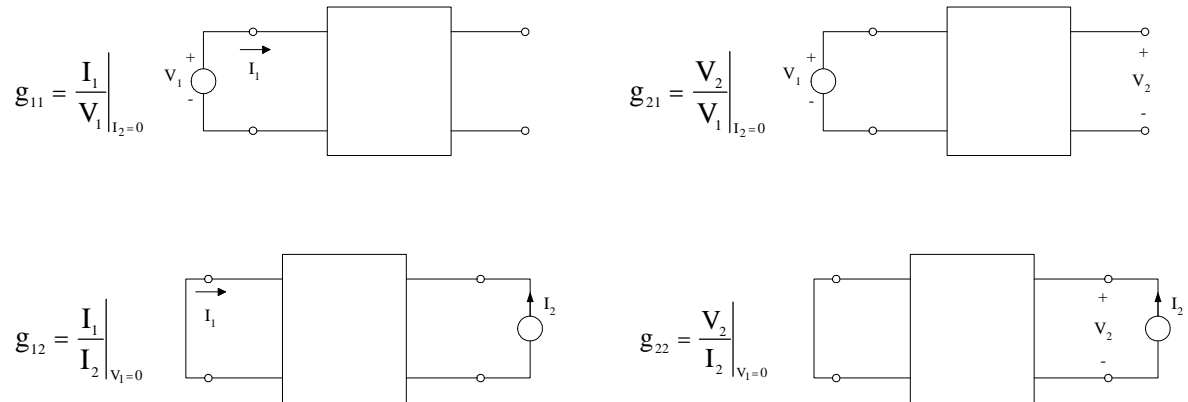


Figura 8. Condiciones de prueba para calcular los parámetros g .

A partir de los parámetros g es posible encontrar cualquier otro conjunto de parámetros, si tal representación existe. Como ejemplo de lo anterior, se determinará la relación que existe entre los parámetros g y los parámetros y .

De la segunda ecuación de la Ec. 16

$$I_2(s) = y_{21}(s)V_1(s) + y_{22}(s)V_2(s) \quad (35)$$

despejando a $V_2(s)$

$$V_2(s) = -\frac{y_{21}(s)}{y_{22}(s)}V_1(s) + \frac{1}{y_{22}(s)}I_2(s) \quad (36)$$

y comparando con la segunda ecuación de la Ec. (34)

$$V_2(s) = g_{21}(s)V_1(s) + g_{22}(s)I_2(s) \quad (37)$$

se tiene

$$g_{21}(s) = -\frac{y_{21}(s)}{y_{22}(s)} \quad (38)$$

y

$$g_{22}(s) = \frac{1}{y_{22}(s)} \quad (39)$$

De la primera ecuación de la Ec. (16)

$$I_1(s) = y_{11}(s)V_1(s) + y_{12}(s)V_2(s) \quad (40)$$

sustituyendo la Ec. (36) en la Ec. (40) y reorganizando términos

$$I_1(s) = \frac{y_{11}(s)y_{22}(s) - y_{12}(s)y_{21}(s)}{y_{22}(s)}V_1(s) + \frac{y_{12}(s)}{y_{22}(s)}I_2(s) \quad (41)$$

que tiene la forma de la primera ecuación de la Ec. (34)

$$I_1(s) = g_{11}(s)V_1(s) + g_{12}(s)I_2(s) \quad (42)$$

comparando las Ecs. (41) y (42)

$$g_{11}(s) = \frac{y_{11}(s)y_{22}(s) - y_{12}(s)y_{21}(s)}{y_{22}(s)} \quad (43)$$

y

$$g_{12}(s) = \frac{y_{12}(s)}{y_{22}(s)} \quad (44)$$

Resumiendo, de las Ecs. (38), (39), (43) y (44) podemos escribir

$$\begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{y_{22}(s)} \begin{bmatrix} \det \underline{Y}(s) & y_{12}(s) \\ -y_{21}(s) & 1 \end{bmatrix} \quad (45)$$

donde $\det \underline{Y}(s) = y_{11}(s)y_{22}(s) - y_{12}(s)y_{21}(s)$.

Es importante notar que para un bipuerto dado, si los parámetros y existen, los parámetros g también existirán si y sólo si $y_{22}(s) \neq 0$.

Los parámetros h de un bipuerto son las funciones de red $h_{ij}(s)$ que especifican el voltaje del puerto 1 y la corriente del puerto 2 como funciones de las otras variables. Las relaciones son

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11}(s) & h_{12}(s) \\ h_{21}(s) & h_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} \quad (46)$$

Dos de los cuatro parámetros se encuentran aplicando una fuente de corriente de entrada en el puerto 1, poniendo en corto circuito el puerto 2. Los otros dos parámetros se encuentran aplicando una fuente de voltaje de prueba en el puerto 2 y poniendo en circuito abierto el puerto 1. En la Fig. 9 se muestran las condiciones anteriores.

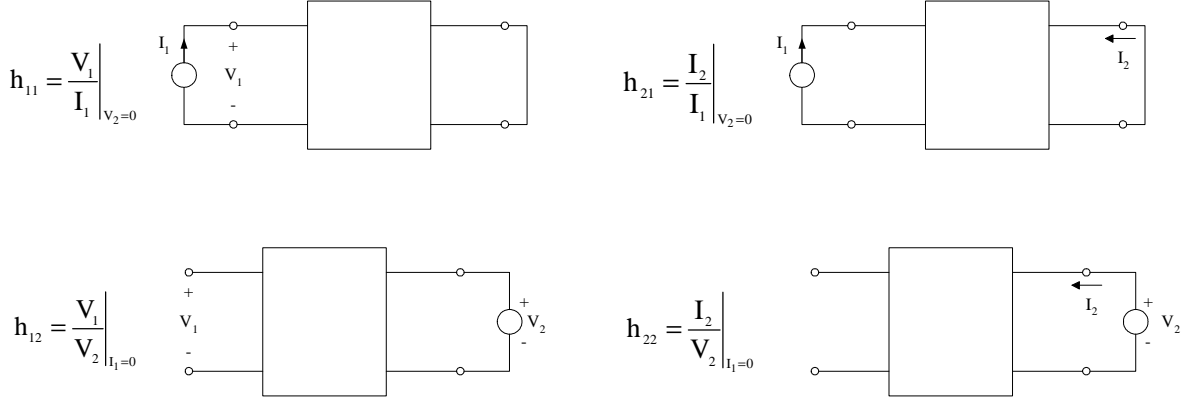


Figura 9. Condiciones de prueba para calcular los parámetros h.

Si comparamos las Ecs. (34) y (46), se deduce que la matriz de parámetros h y la matriz de parámetros g satisfacen la siguiente relación

$$\underline{H}(s) = \underline{G}(s)^{-1} \quad \text{o} \quad \underline{G}(s) = \underline{H}(s)^{-1} \quad (47)$$

Parámetros de transmisión o parámetros ABCD.

Ahora se presentan dos conjuntos de parámetros que difieren completamente de los vistos anteriormente. La primera diferencia consiste en que $U_1(s)$ y $U_2(s)$ ya no son variables de cada uno de los puertos. Ahora $U_1(s)$ y $U_2(s)$ representan a $V_1(s)$ e $I_1(s)$ y $W_1(s)$ y $W_2(s)$ corresponden a $V_2(s)$ y $-I_2(s)$. La razón por la que a $I_2(s)$ se le asigna un signo negativo se aclarará más tarde. Los coeficientes $k_{ij}(s)$ de la Ec. (1) se indican por los términos A(s), B(s), C(s) y D(s), por lo que

$$\begin{aligned} V_1(s) &= A(s)V_2(s) - B(s)I_2(s) \\ I_1(s) &= C(s)V_2(s) - D(s)I_2(s) \end{aligned} \quad (48)$$

Para una red dada los parámetros ABCD pueden calcularse aplicando entradas de prueba de manera similar a lo que se hizo para determinar los parámetros de las secciones anteriores. Para ver esto considere la primera ecuación de la Ec. (48); si el puerto 2 se pone en circuito abierto, $I_2(s) = 0$, se tiene

$$V_1(s) = A(s)V_2(s) \quad (49)$$

Para implementar una situación de prueba semejante a lo que se hizo antes, se aplicaría una fuente ideal de voltaje en el puerto 2. Se hace énfasis en el término fuente ideal de voltaje, para tener presente que su impedancia es nula; y como se ha supuesto que $I_2(s) = 0$, lo que a su vez implica una impedancia infinita, esta

situación ocasiona una incongruencia. Por consiguiente, para evitarla, $V_1(s)$ se constituye en la entrada y $V_2(s)$ en la salida; así el parámetro $A(s)$ se puede determinar a partir de la siguiente ecuación

$$\frac{1}{A(s)} = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} \Bigg|_{I_2(s)=0} \quad (50)$$

entonces el parámetro $A(s)$ resulta ser el recíproco de la razón del voltaje de circuito abierto del puerto 2 al voltaje del puerto 1 del puerto.

Si ahora ponemos en corto circuito el puerto 2, $V_2(s) = 0$, la primera ecuación de la Ec. (48) resulta ser

$$V_1(s) = -B(s) I_2(s) \quad (51)$$

siguiendo un razonamiento semejante al hecho para el cálculo de $A(s)$; se concluye que $V_1(s)$ debe ser la entrada y $-I_2(s)$ la respuesta, y por lo tanto

$$\frac{1}{B(s)} = -\frac{I_2(s)}{V_1(s)} \Bigg|_{V_2(s)=0} \quad (52)$$

Para calcular los parámetros $C(s)$ y $D(s)$, se utiliza la segunda ecuación de la Ec. (48) y procediendo en forma análoga para el cálculo de $A(s)$ y $B(s)$ se tiene

$$\frac{1}{C(s)} = \frac{V_2(s)}{I_1(s)} \Bigg|_{-I_2(s)=0} \quad (53)$$

$$\frac{1}{D(s)} = -\frac{I_2(s)}{I_1(s)} \Bigg|_{V_2(s)=0} \quad (54)$$

En la Fig. 10, se muestran las condiciones de prueba para calcular los elementos de la matriz de transmisión.

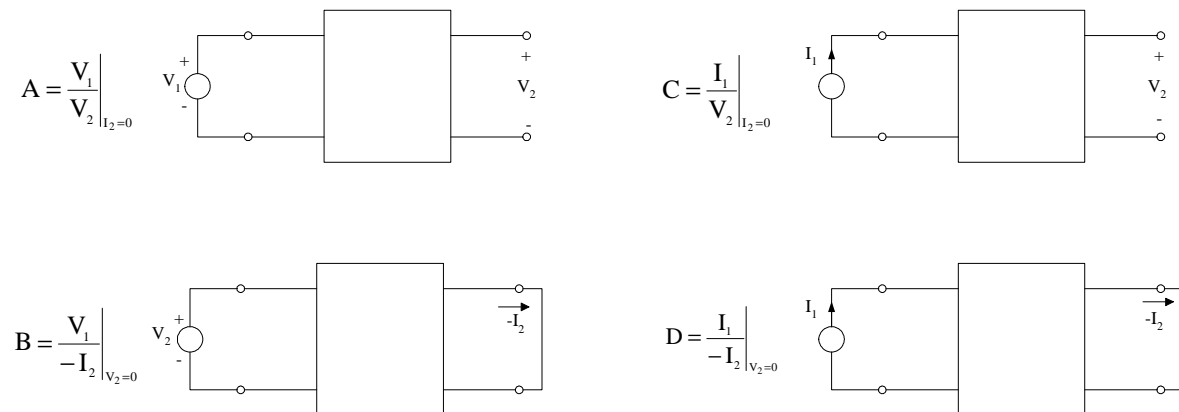


Figura 10. Condiciones de prueba para calcular los parámetros de transmisión o ABCD.

A continuación se determina la relación que existe entre los parámetros z y los parámetros ABCD.

Despejando a $V_2(s)$ de la segunda ecuación de la Ec. (48)

$$V_2(s) = \frac{1}{C(s)} I_1(s) + \frac{D(s)}{C(s)} I_2(s) \quad (55)$$

sustituyendo la ecuación anterior en la primera ecuación de la Ec. (48) y reorganizando términos

$$V_1(s) = \frac{A(s)}{C(s)} I_1(s) + \frac{A(s)D(s) - B(s)C(s)}{C(s)} I_2(s) \quad (56)$$

comparando las Ecs. (55) y (56) con la Ec. (2) resulta

$$\begin{bmatrix} z_{11}(s) & z_{12}(s) \\ z_{21}(s) & z_{22}(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{C(s)} \begin{bmatrix} A(s) & \det \underline{T}(s) \\ 1 & D(s) \end{bmatrix} \quad (57)$$

donde $\det \underline{T}(s) = A(s)D(s) - B(s)C(s)$.

En las definiciones de los parámetros ABCD, cada parámetro define una función de transferencia entre una variable del puerto 2 y otra del puerto 1. Es decir, todos los parámetros están relacionados con la transmisión de una señal del puerto 1 al puerto 2; debido a esto, es por lo que se denominan parámetros de transmisión.

Hay algunas conexiones de bipuertos para los cuales los parámetros ABCD de cada una de las redes que lo integran pueden usarse para encontrar la matriz de transmisión de todo el bipuerto. Para ver esto, considere, los dos bipuertos conectados en cascada de la Fig. 11.

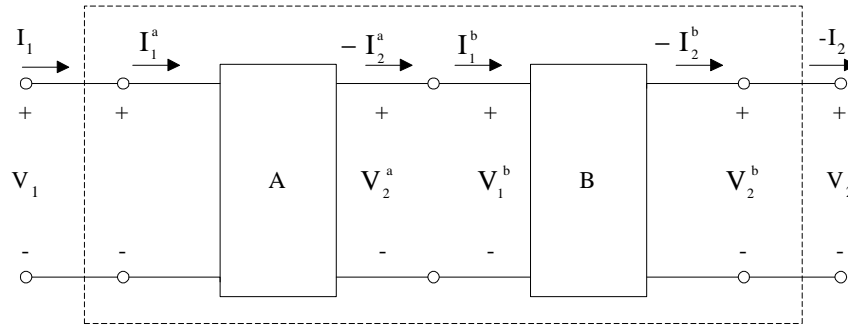


Figura 11. Dos bipuertos conectados en cascada.

Para el bipuerto A se tiene

$$\begin{bmatrix} V_1^a(s) \\ I_1^a(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^a(s) & B^a(s) \\ C^a(s) & D^a(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2^a(s) \\ -I_2^a(s) \end{bmatrix} \quad (58)$$

para el bipuerto B

$$\begin{bmatrix} V_1^b(s) \\ I_1^b(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^b(s) & B^b(s) \\ C^b(s) & D^b(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2^b(s) \\ -I_2^b(s) \end{bmatrix} \quad (59)$$

De la Fig. 11, es evidente que $V_1(s) = V_1^a(s)$, $I_1(s) = I_1^a(s)$, $V_2^a(s) = V_1^b(s)$, $-I_2^a(s) = I_1^b(s)$, $V_2^b(s) = V_2(s)$ y por último $-I_2^b(s) = -I_2(s)$. Considerando lo anterior y las Ecs. (58) y (59); la matriz de transmisión del bipuerto formado por los bipuertos A y B está dada por

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_1(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^a(s) & B^a(s) \\ C^a(s) & D^a(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^b(s) & B^b(s) \\ C^b(s) & D^b(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2(s) \\ -I_2(s) \end{bmatrix} \quad (60)$$

¿Qué se puede concluir sobre el sentido o signo negativo de $I_2(s)$?

El último conjunto de parámetros que se presenta, es el que se denomina parámetros *ABCD*, el cual se define como

$$\begin{bmatrix} V_2(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(s) & B(s) \\ C(s) & D(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ -I_1(s) \end{bmatrix} \quad (61)$$

donde la matriz cuadrada se denomina matriz de parámetros *ABCD* o matriz inversa de parámetros de transmisión, $T'(s)$. Debido a su poca aplicación en la práctica, únicamente se hace mención de ellos.

Aplicaciones

A continuación se calculan algunas funciones de red que son de interés en la síntesis de los de circuitos.

Considere el circuito de la Fig. 12

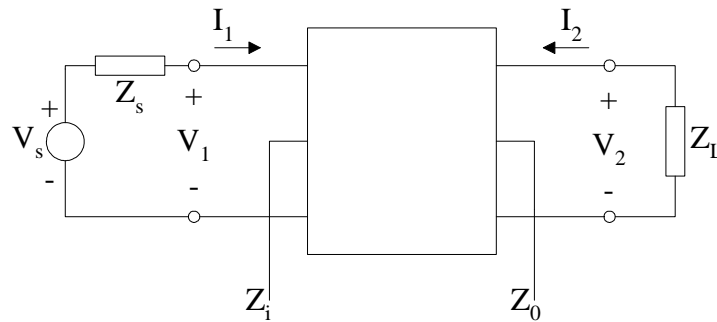


Figura 12. Bipuerto conectado a una fuente de entrada y una carga.

La primera función de red que se determina es la impedancia de entrada, $Z_i(s)$, que es la impedancia vista por la fuente $V_s(s)$ de impedancia interna $Z_s(s)$, cuando una carga $Z_L(s)$ está conectada al puerto de salida. El cálculo de $Z_i(s)$ es importante ya que permite hacer una evaluación de eficiencia en la potencia que se transmite a la carga. De la Fig. 12 se tiene

$$V_2(s) = -Z_L(s)I_2(s) \quad (62)$$

sustituyendo la Ec. (62) en la Ec. (16) y reorganizando términos, resulta

$$Z_i(s) = \frac{\Delta V_1(s)}{I_1(s)} = \frac{y_{22}(s) + Y_L(s)}{\det \underline{Y}(s) + y_{11}(s)Y_L(s)} \quad (63)$$

donde

$$Y_L(s) = \frac{1}{Z_L(s)}$$

La segunda función de red que se calcula es la impedancia que ve la carga, cuando una fuente con impedancia interna $Z_s(s)$ es conectada al puerto de entrada. Esta impedancia a la que se representa por $Z_o(s)$ permite evaluar la impedancia de acoplamiento que se conecta al puerto de salida. Para su cálculo, es necesario cancelar la fuente $V_s(s)$, en la Fig. 12; y por lo tanto

$$V_1(s) = -Z_s(s) I_1(s) \quad (64)$$

sustituyendo la Ec. (64) en la segunda ecuación de la Ec. (16) y reorganizando términos, se tiene

$$Z_o(s) = \frac{V_2(s)}{I_2(s)} = \frac{y_{11}(s) + Y_s(s)}{\det \underline{Y}(s) + y_{22}(s) Y_s(s)} \quad (65)$$

donde

$$Y_s(s) = \frac{1}{Z_s(s)}$$

A continuación se determina la función de transferencia de las corrientes, que se define como

$$H_i(s) = \frac{-I_2(s)}{I_1(s)} \quad (66)$$

sustituyendo la Ec. (62) en la segunda ecuación de la Ec. (2)

$$V_2(s) = z_{21}(s) I_1(s) + z_{22}(s) I_2(s) = -z_L(s) I_2(s) \quad (67)$$

de donde

$$H_i(s) = \frac{z_{21}(s)}{Z_L(s) + z_{22}(s)} \quad (68)$$

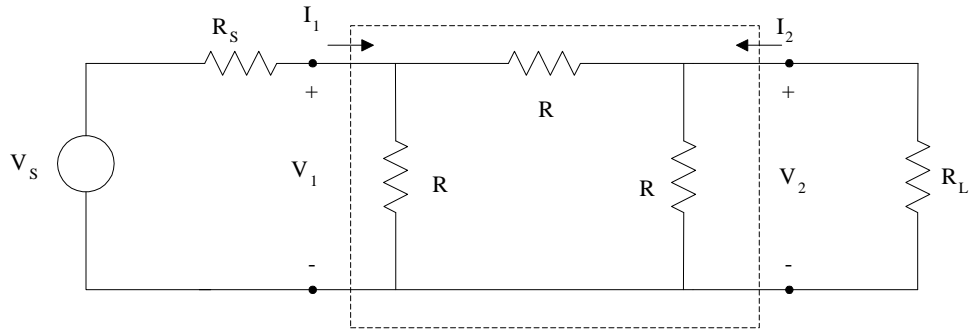
Finalmente, se obtiene la función de transferencia de los voltajes, $H_v(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)}$, para lo cual se sustituye la Ec. (62) en la segunda ecuación de la Ec. (16) y obtenemos

$$H_v(s) = \frac{-y_{21}(s)}{y_{22}(s) + Y_L(s)} \quad (69)$$

Experimentos a realizar

Experimento 1

Arme el circuito de la Fig. 13.



$$V_s(t) = 10 \text{ sen } 200\pi t \text{ V}, R = R_s = R_L = 1 \text{ k}\Omega$$

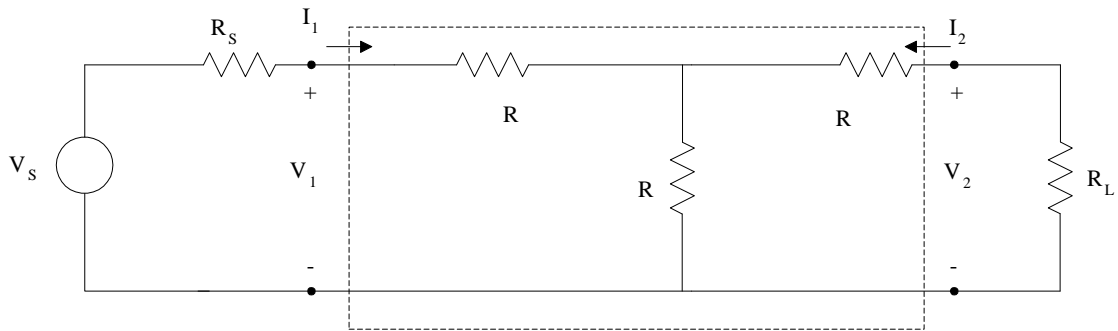
Figura 13. Circuito delta.

Realice las mediciones necesarias para calcular:

- La impedancia de entrada, $Z_i(s)$.
- La impedancia de salida, $Z_o(s)$.
- La función de transferencia, $H_i(s)$.
- La función de transferencia, $H_v(s)$.
- Compare sus cálculos con los valores teóricos dados por las Ecs. (63), (65), (68) y (69). ¿Qué concluye?

Experimento II

Arme el circuito de la Fig. 14.



$$V_s(t) = 10 \text{ sen } 200\pi t \text{ V}, R_s = R_L = 1 \text{ k}\Omega, R = 1/3 \text{ k}\Omega$$

Figura 14. Circuito estrella.

Repita los incisos del experimento I.

Compare estos resultados con los que obtuvo en el experimento anterior.

¿Que puede deducir? ¿Era de esperarse?

Experimento III

Arme el circuito de la Fig. 15. Este circuito presenta una forma de implementar la banda elemental de un ecualizador de magnitud que trabaja en el rango de frecuencias de audio. Nótese que el capacitor C_1 conectado en paralelo con el potenciómetro R_2 puede considerarse como un circuito delta, por lo que al sustituirlo por su circuito equivalente estrella; dicho circuito puede representarse por el mostrado en la Fig. 6.

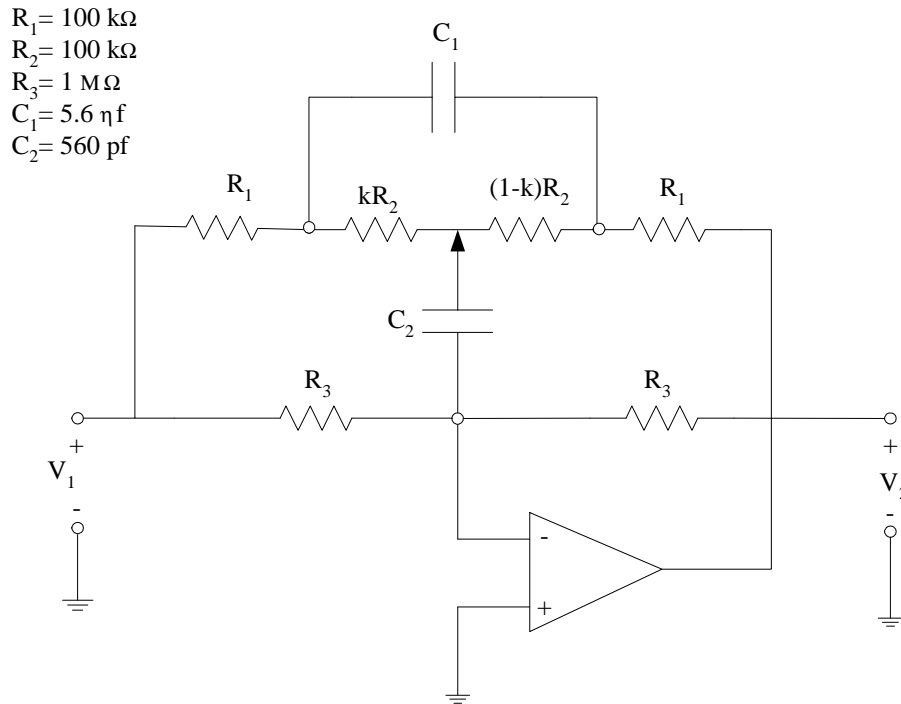


Figura 15. Banda elemental de un ecualizador de magnitud.

La función de transferencia de circuito de la Fig. 15 tiene la siguiente forma

$$H_v(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = - \frac{as^2 + bs + d}{as^2 + cs + d} \quad (70)$$

donde

$$\begin{aligned}
 a &= C_1 C_2 R_1 R_2 (R_1 + R_3 + 2R_2 k(1 - k)) \\
 b &= 2C_1 R_1 R_2 + C_2 R_1 (R_1 + R_2 + R_3) + C_2 R_2 (1 - k)(R_2 k + R_3) \\
 c &= 2C_1 R_1 R_2 + C_2 R_1 (R_1 + R_2 + R_3) + C_2 R_2 k (R_2(1 - k) + R_3) \\
 d &= 2R_1 + R_2
 \end{aligned}$$

- Calcule a, b, c y d para los valores de los elementos de la Fig. 15; sustitúyalos en la Ec. (70) y compare la función de transferencia resultante con la Ec. (71). ¿Qué concluye?
- Observe en el osciloscopio la curva de magnitud de V_2 en función de ω ; para $0 \leq k \leq 1$.
- ¿Lo que observa en el osciloscopio era de esperarse? ¿Por qué?

- d) Para $k = 0$, calcule: el ancho de banda, factor de calidad, frecuencia central y ganancia. Para realizar esto, mida lo necesario, o calcúlelo teóricamente.
- e) Si se desea que el circuito de la Fig. 15, presente las mismas características en cuanto ancho de banda, factor de calidad y ganancia en otra frecuencia igual al doble de la frecuencia central determinada en el inciso anterior. ¿Cuáles deben ser los nuevos valores de C_1 , C_2 , R_1 , R_2 , y R_3 para lograr esto?
- f) Compruebe lo anterior experimentalmente y muéstrelo al instructor.
- g) Aplique al circuito de la Fig. 15, una señal cuadrada de frecuencia $f = 2000$ Hz y observe la respuesta en el osciloscopio. ¿Qué observa? Para contestar esta pregunta considere la teoría de Fourier.

Equipo necesario

- 1 Osciloscopio
- 1 Generador de funciones
- 1 Multímetro

Material necesario

- 1 Capacitor de 5.6 nF
- 1 Capacitor de 560 pF
- 1 Capacitor de 2.7 nF
- 1 Capacitor de 270 pF
- 2 Resistores de $10 \text{ k}\Omega$, $1/4$ de watt
- 2 Resistores de $1 \text{ M}\Omega$, $1/4$ de watt
- 11 Resistores de $1 \text{ k}\Omega$, a $1/4$ de watt
- 1 Potenciómetro lineal de $100 \text{ k}\Omega$
- 1 Amplificador operacional 741 o equivalente

Cuestionario previo

1. Encuentre la matriz de parámetros $\underline{Z}(s)$ y la matriz de parámetros $\underline{Y}(s)$ de los circuitos mostrados en la Fig. 16.



Figura 16. (a) Circuito delta. (b) Circuito estrella.

2. A partir de los resultados obtenidos en el inciso anterior, calcule:
 - i) Los valores de las resistencias del circuito delta en función de las resistencias del circuito estrella para que sean equivalentes.

- ii) Los valores de las resistencias del circuito estrella en función de las resistencias del circuito delta para que sean equivalentes.
2. Demuestre la validez de la Ec. (33).
3. Si los circuitos de las Figs. 6 y 15 son equivalentes, encuentre las expresiones de R_1 , R_2 , $Z_1(s)$, $Z_2(s)$ y $Z_3(s)$ en función de R_1 , kR_2 , $(1 - k)R_2$, R_3 , $\frac{1}{sC_1}$ y $\frac{1}{sC_2}$.
4. Si la función de transferencia de un circuito está dada por

$$\frac{v_2(s)}{v_1(s)} = - \frac{3.136 \times 10^{-4} (10.1 + 2k(1 - k))s^2 + (17.416 + 5.6k(1 - k) + 56(1 - k))s + 120 \times 10^3}{3.136 \times 10^{-4} (10.1 + 2k(1 - k))s^2 + (17.416 + 5.6k(1 - k) + 56k)s + 120 \times 10^3} \quad (71)$$

Bosqueje, empleando un software de graficación, la respuesta en frecuencia de dicho circuito para $k = 0$, 0.5 y 1 .

BIBLIOGRAFÍA

Desoer C. A., and Kuh E. S.
Basic Circuit Theory
Mc Graw Hill, 1969

Hayt W. H., Jr., Kemmerly J. E., y Durbin, S. M.
Análisis de circuitos en ingeniería. Sexta edición
Mc Graw Hill, 2003

Dorf, R. C. y Svoboda, J. A.
Circuitos Eléctricos. 5ª edición
Alfaomega, 2003

Johnson, D. E., Hilburn, J. L., Johnson, J. R., y Scott, P. D.
Análisis Básico de Circuitos Eléctricos. Quinta Edición
Prentice Hall Hispanoamericana, S. A., 1996

The Student Edition of MATLAB
The Ultimate Computing Environment for Technical Education
The Math Works Inc., 1995

Coughlin, R. F., y Driscoll F. F.
Amplificadores Operacionales y Circuitos Integrados Lineales
Prentice Hall, 1993

Graeme, J. G., Tobey, G. E., and Huelsman, L. P.
Operational Amplifiers. Design and Applications
Mc Graw Hill, 1985

Huelsman, L. P., and Allen, P. E.
Introduction to the Theory and Design of Active Filters
McGraw-Hill, 1980

Sánchez Esquivel, V. M., y Salvá Calleja, A.
Notas del curso de: Diseño y Construcción de Filtros Analógicos y Digitales