PRÁCTICA 7

Escalamiento de impedancia y de frecuencia

Objetivo: Presentación de los teoremas de escalamiento de impedancia y de frecuencia.
Familiarizar al alumno con la aplicación práctica de dichos teoremas.
Apreciar la importancia de tales teoremas en el diseño de filtros eléctricos.

Teoría básica

Escalamiento de impedancia.

Considere una red plana, lineal e invariante en el tiempo, cuya entrada es el voltaje V_i y la salida es el voltaje V_o, correspondiente a una rama arbitraria de la misma. Como se muestra en la Fig. 1.

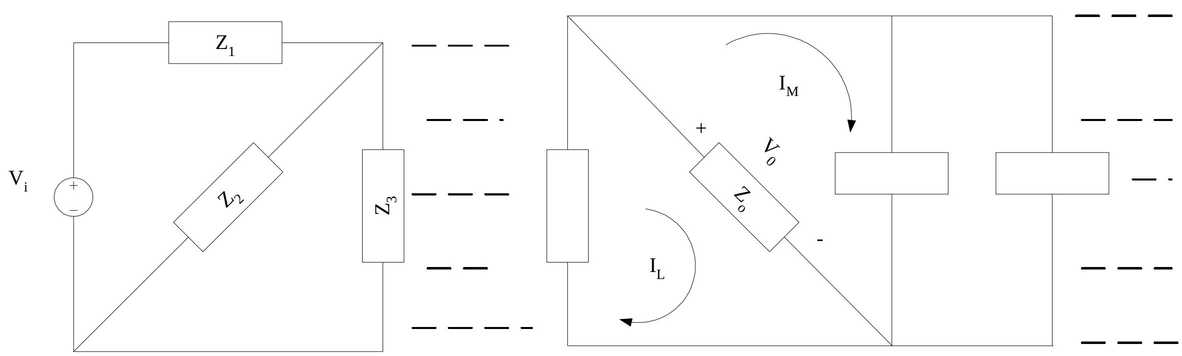


Figura 1. Red plana, lineal e invariante de n mallas.

El voltaje V_o, de la rama de impedancia Z_o, está dado por

$$V_o = Z_o \left(I_L - I_M\right) \qquad (1)$$

y la ecuación de mallas de la red es

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \cdots & Z_{nn} \end{bmatrix} \begin{vmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_n \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} V_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

resolviendo para I_L e I_M

$$I_L = \frac{\begin{vmatrix} Z_{11} & \cdots & Z_{1(L-1)} & V_i & Z_{1(L+1)} & \cdots & Z_{1n} \\ \vdots & & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ Z_{n1} & \cdots & Z_{n(L-1)} & 0 & Z_{n(L+1)} & \cdots & Z_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{11} & \cdots & Z_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ Z_{n1} & \cdots & Z_{nn} \end{vmatrix}} \qquad (2)$$

$$I_M = \frac{\begin{vmatrix} Z_{11} & \cdots & Z_{1(M-1)} & V_i & Z_{1(M+1)} & \cdots & Z_{1n} \\ \vdots & & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ Z_{n1} & \cdots & Z_{n(M-1)} & 0 & Z_{n(M+1)} & \cdots & Z_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{11} & \cdots & Z_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ Z_{n1} & \cdots & Z_{nn} \end{vmatrix}} \tag{3}$$

Si se define

$$\Delta = \begin{vmatrix} Z_{11} & \cdots & Z_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ Z_{n1} & \cdots & Z_{nn} \end{vmatrix} \tag{4}$$

$$\Delta_L = \begin{vmatrix} Z_{21} & \cdots & Z_{2(L-1)} & Z_{2(L+1)} & \cdots & Z_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_{n1} & \cdots & Z_{n(L-1)} & Z_{n(L+1)} & \cdots & Z_{nn} \end{vmatrix} \tag{5}$$

$$\Delta_M = \begin{vmatrix} Z_{21} & \cdots & Z_{2(M-1)} & Z_{2(M+1)} & \cdots & Z_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_{n1} & \cdots & Z_{n(M-1)} & Z_{n(M+1)} & \cdots & Z_{nn} \end{vmatrix} \tag{6}$$

Considerando las Ecs. (1), (2), (3), (4), (5) *y* (6) se tiene

$$V_o = V_i \frac{(\Delta_L - \Delta_M)}{\Delta} Z_o \tag{7}$$

por lo que la función de transferencia es

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{(\Delta_L - \Delta_M)}{\Delta} Z_o \tag{8}$$

Si todas las impedancias que constituyen la red se multiplican por un factor k se tiene, de la Ec. (8)

$$\frac{V_o'}{V_i'} = \frac{(\Delta_L' - \Delta_M')}{\Delta'} kZ_o \tag{9}$$

donde por álgebra de determinantes

$$\Delta_L' = k^{n-1} \Delta_L \tag{10.a}$$

$$\Delta_M' = k^{n-1} \Delta_M \tag{10.b}$$

$$\Delta' = k^n \Delta \tag{10.c}$$

sustituyendo las Ecs. (10) en la Ec. (9)

$$\frac{V_o^{'}}{V_i^{'}} = \frac{k^n(\Delta_L - \Delta_M)Z_o}{k^n\Delta} = \frac{V_o}{V_i} \tag{11}$$

de esta última expresión se concluye lo siguiente.

Si en una red se multiplican todas las impedancias por una misma constante, la función de transferencia (si ésta es la razón de un voltaje de salida a un voltaje de entrada) no se altera.

En función de los elementos que conforman la red.

Si en una red todas las inductancias y resistencias que la constituyen se multiplican por una constante k y los capacitores de la misma red se dividen por la constante k, la función de transferencia (si ésta es la razón de un voltaje de salida a un voltaje de entrada) no se altera.

Escalamiento de frecuencia.

La respuesta permanente de un sistema lineal, invariante en el tiempo y estable debido a una entrada de la forma x(t) = sen ωt está dada por

$$g(t) = |H(j\omega)| \text{ sen } (\omega t + \angle H(j\omega t)) \tag{12}$$

donde H(jω) es la función de transferencia de la red evaluada en el eje imaginario del plano complejo.

En una red dada de b ramas

$$H(j\omega) = f(\omega L_1,..., \omega L_b, \omega C_1,..., \omega C_b, R_1,..., R_b)$$

Para una frecuencia ω_1 dada, se tiene

$$H(j\omega_1) = f(\omega_1 L_1,..., \omega_1 L_b, \omega_1 C_1,..., \omega_1 C_b, R_1,..., R_b) \tag{13}$$

Para una frecuencia ω_2 dada, suponiendo que las inductancias y capacitancias de cada rama son modificadas

$$H(j\omega_2) = f(\omega_2 L_1^{'},..., \omega_2 L_b^{'}, \omega_2 C_1^{'},..., \omega_2 C_b^{'}, R_1,..., R_b) \tag{14}$$

Si se desea que las respuestas en frecuencia en estado permanente, dadas por las Ecs. (13) y (14), sean iguales se requiere que

$$\omega_1 L_K = \omega_2 L_K^{'} \tag{15}$$

$$\omega_1 C_K = \omega_2 C_K^{'} \tag{16}$$

de donde, los nuevos valores de los elementos inductivos y capacitivos para que se cumpla lo dicho en el párrafo anterior son

$$L_K^{'} = \frac{\omega_1}{\omega_2} L_K \tag{17}$$

$$C_K^{'} = \frac{\omega_1}{\omega_2} C_K \tag{18}$$

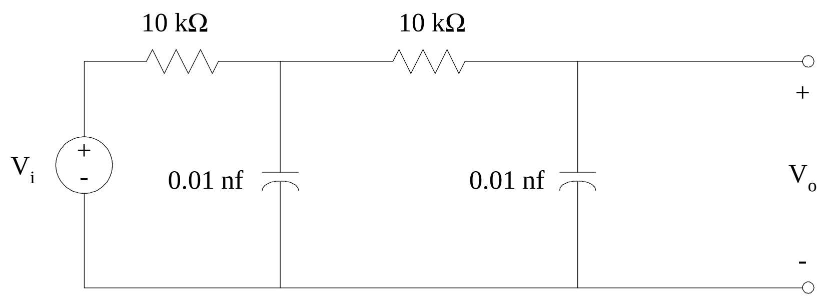
de lo anterior se concluye.

Si se desea que la respuesta senoidal permanente de una red a una cierta frecuencia ω_2 presente las mismas características de magnitud y fase que se tienen para una frecuencia ω_1, los inductores y capacitores que constituyen la red deben modificarse de acuerdo a las Ecs. (17) y (18).

Experimentos a realizar

Experimento I

Arme el siguiente circuito.



$V_i = A \text{ sen } 2000\pi t$ [V]

Figura 2. Circuito de segundo orden.

Mida el defasaje entre V_o y V_i.

¿Cuál es la magnitud $\left|H(j\,2000\pi)\right| = \frac{\mathbf{V_o}}{\mathbf{V_i}}$

Se desea que las resistencias del circuito de la Fig. 2 valgan 1000 Ω. Determine que valor deben tener los capacitores para que la función de transferencia no se altere.

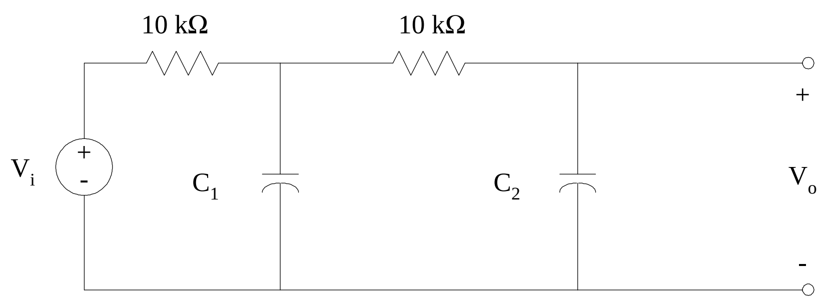
$C_1 =$ $\qquad\qquad$ $C_2 =$

Compruebe lo anterior experimentalmente.

Experimento II

Arme el circuito de la Fig. 3.

Determine los valores de los capacitores C_1 y C_2 para que cuando $V_i = A \text{ sen } 1000\,\pi t$ el defasaje y la magnitud de $\left|H(j\,1000\pi)\right| = \frac{\mathbf{V_o}}{\mathbf{V_i}}$ sean iguales a los que se tienen en el experimento I.



V_i = A sen $1000\pi t$ [V]

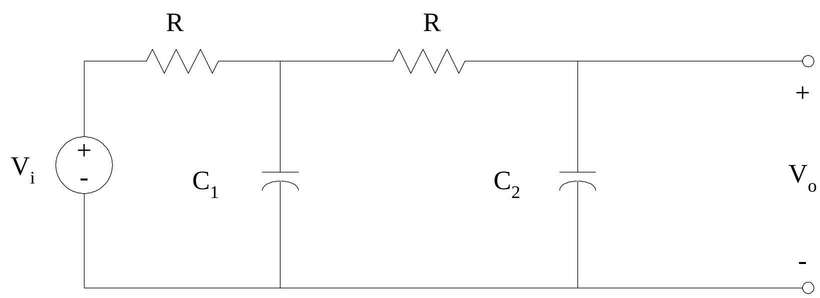
Figura 3. Circuito de segundo orden.

C_1 = C_2 =

Verifique lo anterior experimentalmente.

Experimento III

Arme el circuito de la Fig. 4.



V_i = A sen $4000\,\pi t$ [V] V_o = A $|H(j\,4000\pi)|$ sen $(4000\,\pi t + \angle H(j4000\pi))$ [V]

Figura 4. Circuito de segundo orden.

Si R = 1000 Ω, cuanto deben valer los capacitores C_1 y C_2 para que

$|H(j\,4000\pi)|$ y $\angle H(j4000\pi)$

sean los obtenidos en el experimento I, para $\omega = 2000\pi$.

C_1 = C_2 =

Verifique lo anterior experimentalmente.

Equipo necesario

1 Osciloscopio
1 Generador de funciones

Material necesario

2 Resistores de 10 **kΩ**
2 Resistores de 1 kΩ
2 Capacitores de 0.02 μf o 4 capacitores de 0.01 μf
2 Capacitores de 0.05 μf
2 Capacitores de 0.1 μf
2 Capacitores de 0.01 μf

Cuestionario previo

1. Demuestre la Ec. (12).

2. Demuestre que sí la función de transferencia de una red es la razón de una corriente de rama y una corriente de entrada, al multiplicar todas las resistencias y bobinas por una constante k y al dividir todos los capacitores por la misma constante, dicha función de transferencia no se altera.

3. ¿Qué sucede si la salida es una corriente y la entrada es un voltaje?

4. En la Fig. 5, se muestra un filtro pasa-banda, con frecuencia central $f_o = \frac{1}{\pi\sqrt{2}}$ Hz.

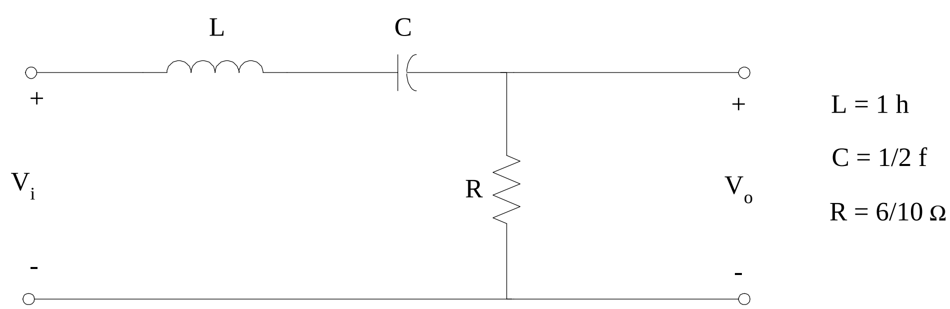


Figura 5. Filtro pasa-banda.

Si se desea que dicho filtro presente las mismas características de magnitud y fase a la frecuencia central de f_o = 10 kHz y cuando C = 10^{-8} f.

Determine los nuevos valores de R y L que deben emplearse.

BIBLIOGRAFÍA

Desoer C. A., and Kuh E. S.
Basic Circuit Theory
Mc Graw Hil1, 1969

Hayt W. H., Jr., Kemmerly J. E., y Durbin, S. M.
Análisis de circuitos en ingeniería. Sexta edición
Mc Graw Hill, 2003

Dorf, R. C. y Svoboda, J. A.
Circuitos Eléctricos. 5ª edición

Alfaomega, 2003

Johnson, D. E., Hilburn, J. L., Johnson, J. R., y Scott, P. D.
Análisis Básico de Circuitos Eléctricos. Quinta Edición
Prentice Hall Hispanoamericana, S. A., 1996

Huelsman, L. P., and Allen, P. E.
Introduction to the Theory and Design of Active Filters
McGraw-Hill, 1980