

PRÁCTICA 6

Resonancia

Objetivo. Analizar un circuito de segundo orden en estado senoidal permanente.
Familiarizar al alumno con el concepto de la respuesta en frecuencia.
Obtención del ancho de banda de un filtro eléctrico.
Determinar la frecuencia de resonancia eléctrica.

Teoría básica

Circuito serie.

La configuración del circuito serie resonante básico es el mostrado en la Fig. 1.

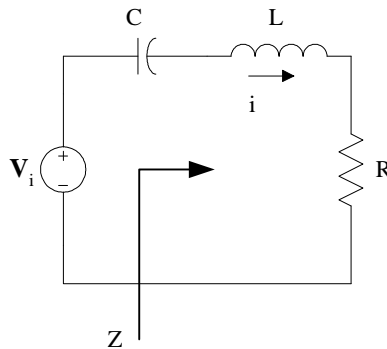


Figura 1. Circuito resonante serie básico

Si la entrada del circuito V_i es senoidal, la corriente i en estado permanente, se puede determinar mediante el siguiente análisis.

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_i}{Z(j\omega)}$$

donde \mathbf{I} y \mathbf{V}_i son los fasores correspondientes a la corriente i y el voltaje V_i , respectivamente, y

$$Z(j\omega) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

es la impedancia vista por la fuente de la entrada. Así

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_i}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{\mathbf{V}_i}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \quad (1)$$

o también

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_i}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \angle -\tan^{-1} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (2)$$

cuando

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

entonces

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_i}{R}$$

De lo anterior se concluye que la corriente presenta un módulo máximo cuando $\omega = 1/\sqrt{LC}$. A este valor de frecuencia se le denomina frecuencia de resonancia y se le denota con ω_0 . Es importante notar que a la frecuencia de resonancia, ω_0 , en este circuito, el defasaje entre el voltaje de entrada y el voltaje en la resistencia es nulo.

Aunque la Ec. (1) describe el comportamiento del circuito serie resonante; en la práctica se trabaja con dicha ecuación en una forma más adecuada, llamada forma normalizada, la cual se obtiene a continuación.

De la Ec. (1)

$$\mathbf{I} = \frac{\frac{\mathbf{V}_i}{R}}{1 + j \frac{1}{R} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}$$

multiplicando y dividiendo la parte imaginaria del denominador por $\omega_0 L$ y teniendo presente el valor de ω_0

$$\mathbf{I} = \frac{\frac{\mathbf{V}_i}{R}}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \quad (3)$$

donde $Q = \frac{\omega_0 L}{R}$, parámetro que se denomina factor de calidad.

Si se define la función de transferencia como la razón del fasor del voltaje de la resistencia y fasor del voltaje de la entrada, de la Ec. (3), la magnitud y fase están dadas respectivamente por

$$|H(j\omega)| = \frac{|\mathbf{V}_R|}{|\mathbf{V}_i|} = \frac{1}{\left| 1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right|} \quad (4)$$

$$\angle H(j\omega) = \angle V_R - \angle V_i = -\text{tag}^{-1}Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \quad (5)$$

En la Fig. 2 se presentan las gráficas correspondientes a las Ecs. (4) y (5), para diferentes valores de Q.

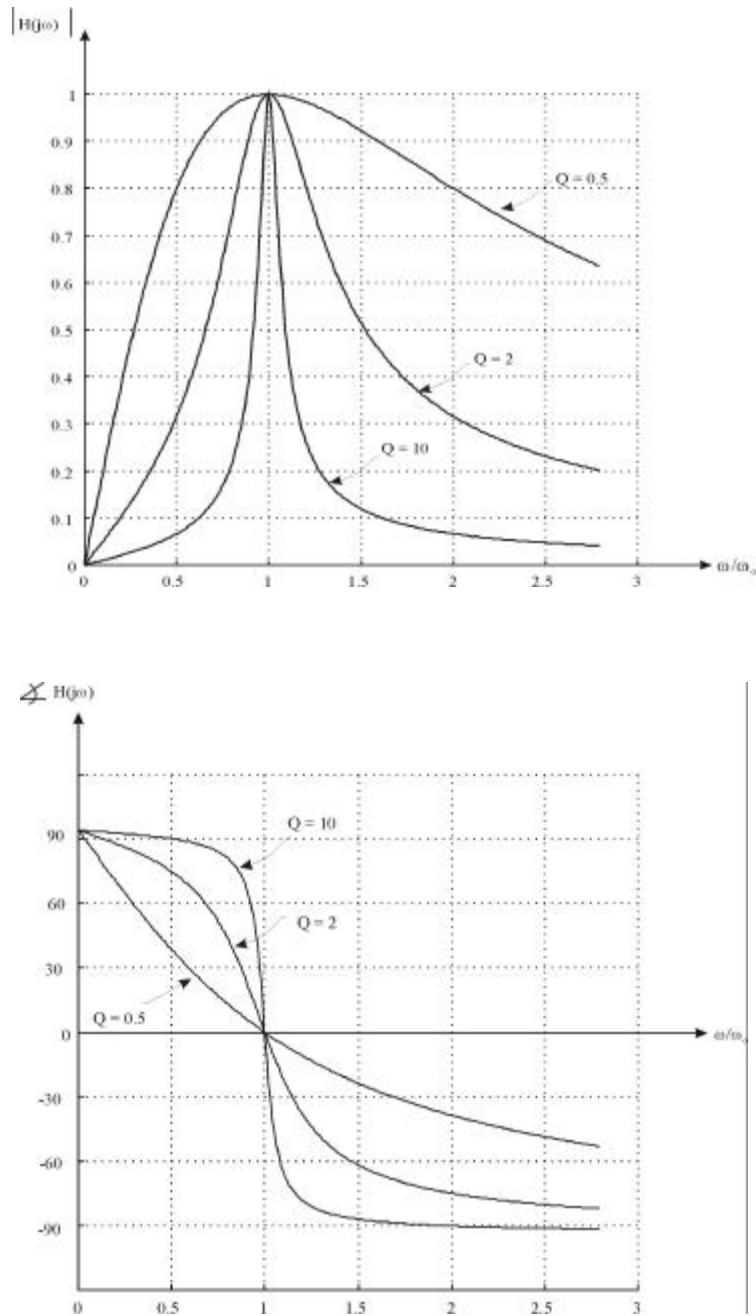


Figura 2. Respuesta en frecuencia del circuito RLC serie.

Ancho de Banda.

Se define como ancho de banda, AB, al intervalo de frecuencias tales que

$$|H(j\omega)| \geq \frac{|H(j\omega)|_{\text{máxima}}}{\sqrt{2}}$$

De la Ec. (4), se observa que $AB = \omega_2 - \omega_1$, donde ω_1 y ω_2 son los valores de frecuencia que hacen

$$Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = \pm 1 \quad (6)$$

Cálculo de ω_1 y ω_2 .

Considerando el signo positivo del miembro derecho de la Ec. (6)

$$\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{1}{Q} = 0$$

o bien

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 - \frac{1}{Q} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) - 1 = 0$$

de donde

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4Q^2}}{2Q}$$

considerando el signo positivo del radical

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{1}{2Q} \left(1 + \sqrt{1 + 4Q^2} \right)$$

como $2Q < 1 + \sqrt{1 + 4Q^2}$; el valor obtenido corresponde a ω_2 y por consiguiente

$$\omega_2 = \frac{\omega_0}{2Q} \left(1 + \sqrt{1 + 4Q^2} \right) \quad (7)$$

de manera análoga

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{2Q} \left(-1 + \sqrt{1 + 4Q^2} \right) \quad (8)$$

Circuito paralelo.

La configuración del circuito resonante paralelo básico es la que se muestra la Fig. 3.

Si la corriente i es senoidal, se puede determinar V en estado permanente empleando fasores.

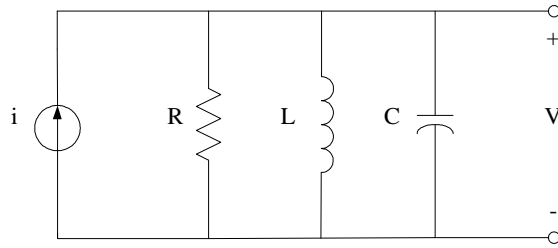


Figura 3. Circuito resonante paralelo básico.

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{I}}{G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}} = \frac{\mathbf{I}}{G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}$$

reacomodando términos

$$\mathbf{V} = \frac{\frac{\mathbf{I}}{G}}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \quad (9)$$

donde

$$Q = \omega_0 RC$$

y

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Nótese la similitud de la Ec. (9) con la Ec. (3).

Obviamente para este tipo de circuito a la frecuencia de resonancia se maximiza el módulo de voltaje, y el defasaje entre la corriente i y el voltaje V es cero.

El módulo y fase de \mathbf{V} para cualquier ω están dados respectivamente por

$$|\mathbf{V}| = \frac{\frac{|\mathbf{I}|}{G}}{\left|1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right|}$$

$$\angle \mathbf{V} = \angle \mathbf{I} - \tan^{-1} Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)$$

Es importante señalar, que la pendiente de la curva de fase en $\omega = \omega_0$ es proporcional a Q ; esto es

$$\left. \frac{d\mathbf{f}}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} = -\frac{2Q}{\omega_0} \quad (10)$$

Circuito resonante real.

En la práctica, cualquier inductancia presenta pérdidas, por lo que un circuito resonante paralelo real tendrá la forma del circuito de la Fig. 4.

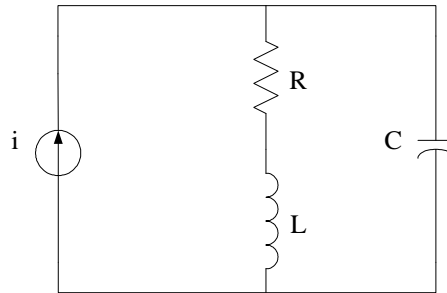


Figura 4. Circuito resonante real.

Dicho circuito puede representarse con muy pequeño error, mediante el circuito resonante paralelo ideal, si $Q_L = \omega_0 L / r \gg 1$ (Referencia 4), donde $R = rQ_L^2$. Esta idea se ilustra en la Fig. 5.

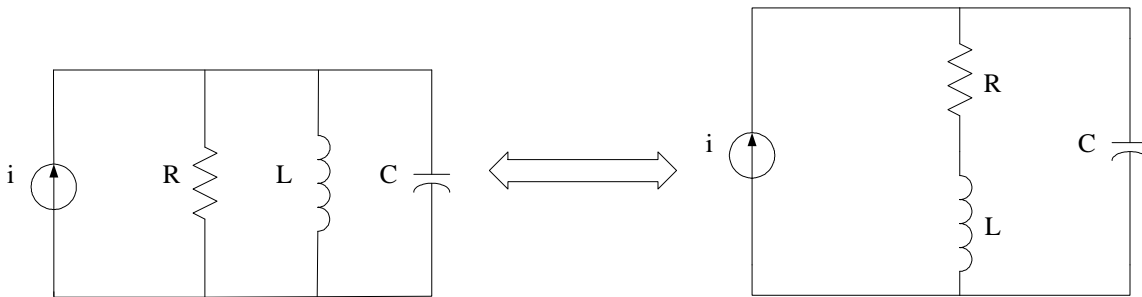


Figura 5. Equivalencia entre dos circuitos resonantes en paralelo.

Es importante recalcar que cualquier circuito cuya función de transferencia contenga un cero y dos polos, podrá, desde el punto de vista de la respuesta en frecuencia, tener una representación semejante a las Ecs. (4) y (5).

Experimentos a realizar

Experimento 1

Arme el circuito de la Fig. 6 y determine

- La frecuencia de resonancia.
- El ancho de banda.
- Verifique que $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$; si no sucede así, repita el inciso anterior.
- El factor de calidad.
- El valor de L a partir de ω_0 y C.

- f) Cambie la resistencia de 500Ω por una de 100Ω , y repita los incisos anteriores. Diga que características se modifican y cuales no; considere: frecuencia de resonancia, factor de calidad, ancho de banda y ganancia. ¿Era esto de esperarse? Explique.

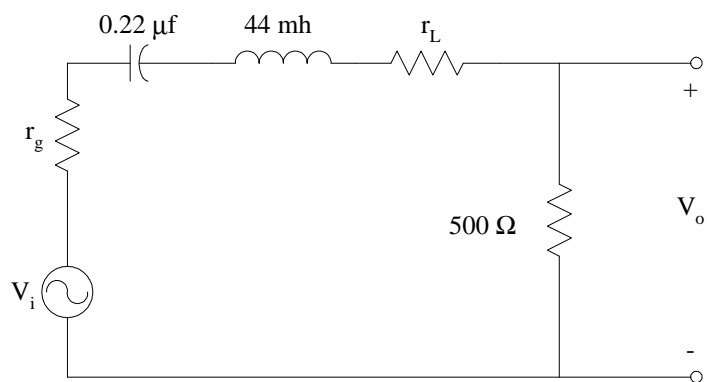


Figura 6. Circuito resonante serie.

Experimento II

Arme el circuito de la Fig. 7.

Repita los incisos a),...,f) del experimento I. Excepto el inciso e).

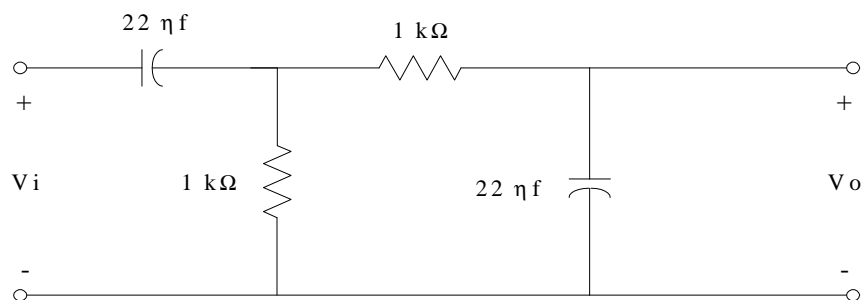


Figura 7. Filtro pasa-banda.

Equipo necesario

- 1 Osciloscopio
- 1 Solenoide
- 1 Generador de funciones

Material necesario

- 1 Capacitor de $0.22 \mu\text{f}$
- 2 Capacitores de 22 nF
- 1 Resistor de 100Ω ; $1/2$ watt
- 2 Resistores de $1 \text{ k}\Omega$; $1/2$ watt

Cuestionario previo

1. Demuestre la Ec. (8).
2. Demuestre la Ec. (9).
3. Demuestre la relación

$$Q = \frac{\omega_o}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{f_o}{f_2 - f_1}$$

4. Demuestre que

$$\omega_o = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$$

5. Demuestre la Ec. (10).
6. Demuestre que en el circuito de la Fig. 4.

$$Q = \frac{\omega_o L}{r}$$

7. Demuestre la equivalencia de los circuitos de la Fig. 5.
8. Determine para los circuitos de las figuras 6 y 7 las ecuaciones (4) y (5) correspondientes.

BIBLIOGRAFÍA

Desoer C. A., and Kuh E. S.
Basic Circuit Theory
Mc Graw Hill, 1969

Hayt W. H., Jr., Kemmerly J. E., y Durbin, S. M.
Análisis de circuitos en ingeniería. Sexta edición
Mc Graw Hill, 2003

Dorf, R. C. y Svoboda, J. A.
Circuitos Eléctricos. 5ª edición
Alfaomega, 2003

Clarke, K. K., and Hess, D. T.
Communication Circuits: Analysis and Design
Krieger, 1994

Hubert, C. I.
Circuitos Eléctricos CA/CC. Enfoque integrado
Mc Graw Hill, 1985