PRÁCTICA 1

Sistemas eléctricos de primer y segundo orden

Objetivo: Determinar la resistencia interna de un generador.
Realizar mediciones de la constante de tiempo de circuitos de primer orden pasa-bajas y de los parámetros de diseño de un circuito de segundo orden, mediante la respuesta al escalón.
Determinar el valor de los elementos que constituyen el circuito eléctrico, a partir de las mediciones anteriores.

Teoría básica

Sistema de primer orden.

La función de transferencia de un sistema de primer orden pasa-bajas es de la siguiente forma

$$H(s) = \frac{M}{\tau s + 1} \qquad (1)$$

Respuesta al escalón.

Si a un sistema de primer orden, con una condición inicial igual a cero, se le aplica una entrada escalón de amplitud k, la transformada de Laplace de su respuesta de estado cero es

$$Y_{zs}(s) = \frac{M}{\tau s + 1}\frac{k}{s} \qquad (2)$$

antitransformando la ecuación anterior, se tiene

$$y_{zs}(t) = Mk(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})u_{-1}(t) \qquad (3)$$

Las gráficas de la entrada escalón y la respuesta de estado cero correspondiente se muestran en la Fig. 1.

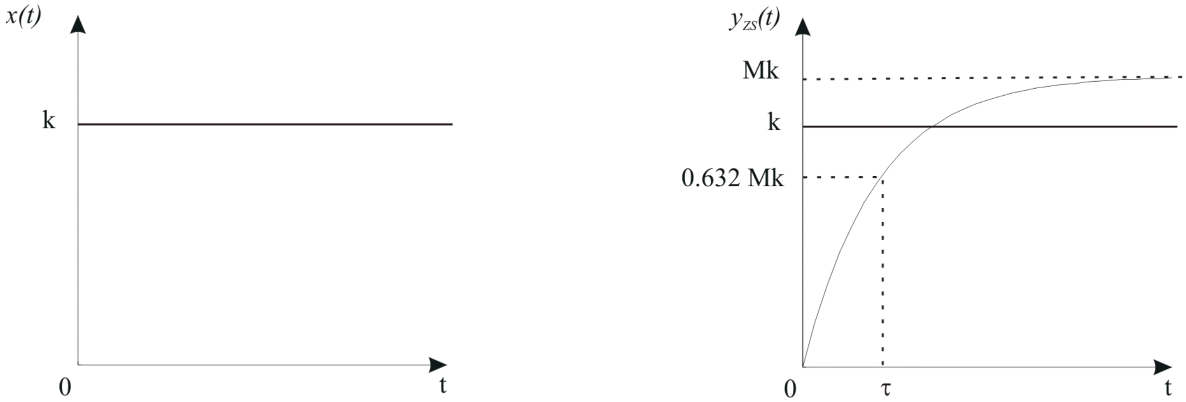
Constante de tiempo.

Se define como constante de tiempo de un sistema de primer orden, al tiempo que debe transcurrir para que la respuesta al escalón del sistema alcance el 63.2% de su valor final. En la Fig. 1(b), se observa que la respuesta de estado cero alcanza dicho valor cuando $t = \tau$.

De la Ec. (3) puede notarse que

$$y_{zs}(\tau) = 0.632Mk$$

esto es, transcurren τ segundos, a partir de la aplicación de la entrada para que la salida alcance el 63.2% de su valor final.



(a) (b)

Figura 1. Respuesta al escalón de un sistema de primer orden. (a) Entrada. (b) Salida.

Sistema de segundo orden.

La función de transferencia de un sistema de segundo orden es de la forma

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\varsigma\omega_n s + \omega_n^2} \tag{4}$$

Respuesta al escalón.

La transformada de Laplace de la respuesta al escalón, cuando las condiciones iniciales son nulas, es

$$Y_{zs}(s) = \frac{k\omega_n^2}{s(s^2 + 2\varsigma\omega_n s + \omega_n^2)} \tag{5}$$

donde k representa la magnitud del escalón.

Dependiendo del valor de ζ en la Ec. (5), se pueden presentar las siguientes tres formas para la respuesta al escalón

I) $0 \le \varsigma < 1$

$$y_{zs}(t) = k\left(1 - \frac{e^{-\varsigma\omega_n t}}{\sqrt{1-\varsigma^2}}\operatorname{sen}\left(\omega_n\sqrt{1-\varsigma^2}\,t + \operatorname{tag}^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-V^2}}{V}\right)\right)\right)u_{-1}(t) \tag{6}$$

ii) $\varsigma = 1$

$$y_{zs}(t) = k\left(1 - e^{-\omega_n t}\left(1 + \omega_n t\right)\right)u_{-1}(t) \tag{7}$$

iii) $V > 1$

$$y_{zs}(t) = k\left(1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\varsigma^2 - 1}}\left(\frac{e^{-s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{-s_2 t}}{s_2}\right)\right)u_{-1}(t) \tag{8}$$

donde

$$s_1 = \omega_n\left(\varsigma + \sqrt{\varsigma^2 - 1}\right)$$

$$s_2 = \omega_n\left(\varsigma - \sqrt{\varsigma^2 - 1}\right)$$

En la Fig. 2 se muestran las diversas respuestas de estado cero cuando la entrada es un escalón unitario, k = 1, para cada uno de los casos anteriores.

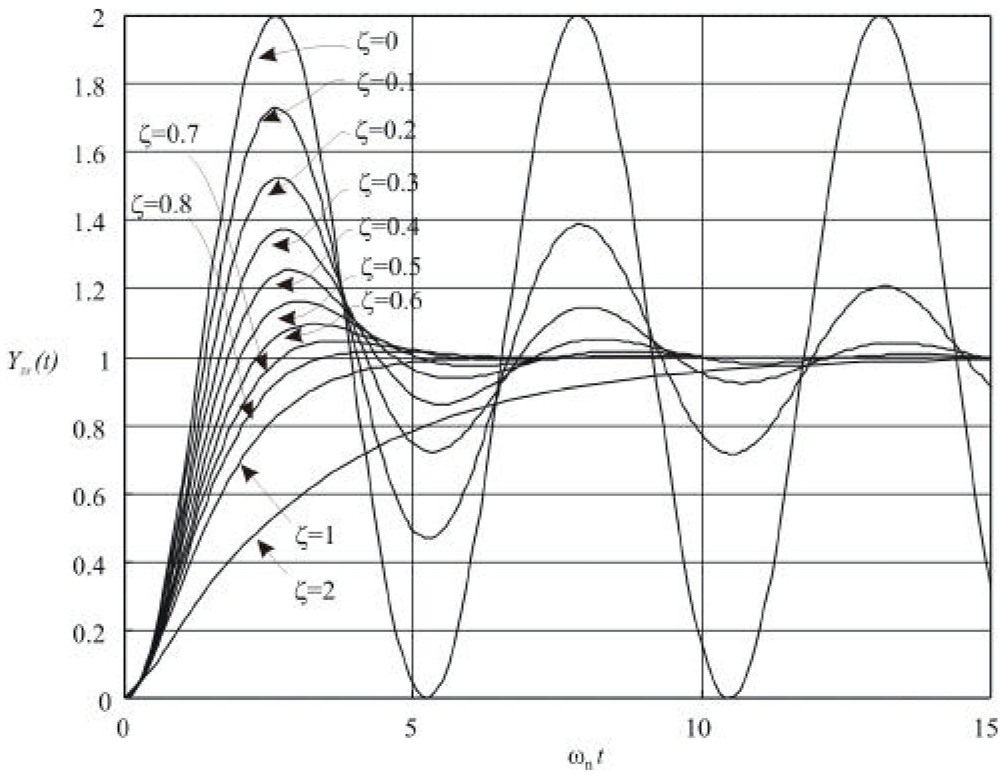


Figura 2. Respuesta al escalón normalizada de un sistema de segundo orden, para distintos valores del coeficiente ζ.

Especificaciones de la respuesta transitoria.

Considere el caso en el que $0 < \zeta < 1$. Para un valor de ζ dentro del intervalo anterior, la respuesta de estado cero cuando la entrada es un escalón unitario se muestra en la Fig. 3. En dicha figura, se observan además algunas especificaciones que son de importancia en la caracterización de un sistema.

A continuación se explica el significado de cada una de las especificaciones mencionadas.

t_d (Tiempo de retardo): Es el tiempo que transcurre para que la respuesta de estado cero alcance el 50% de su valor final.

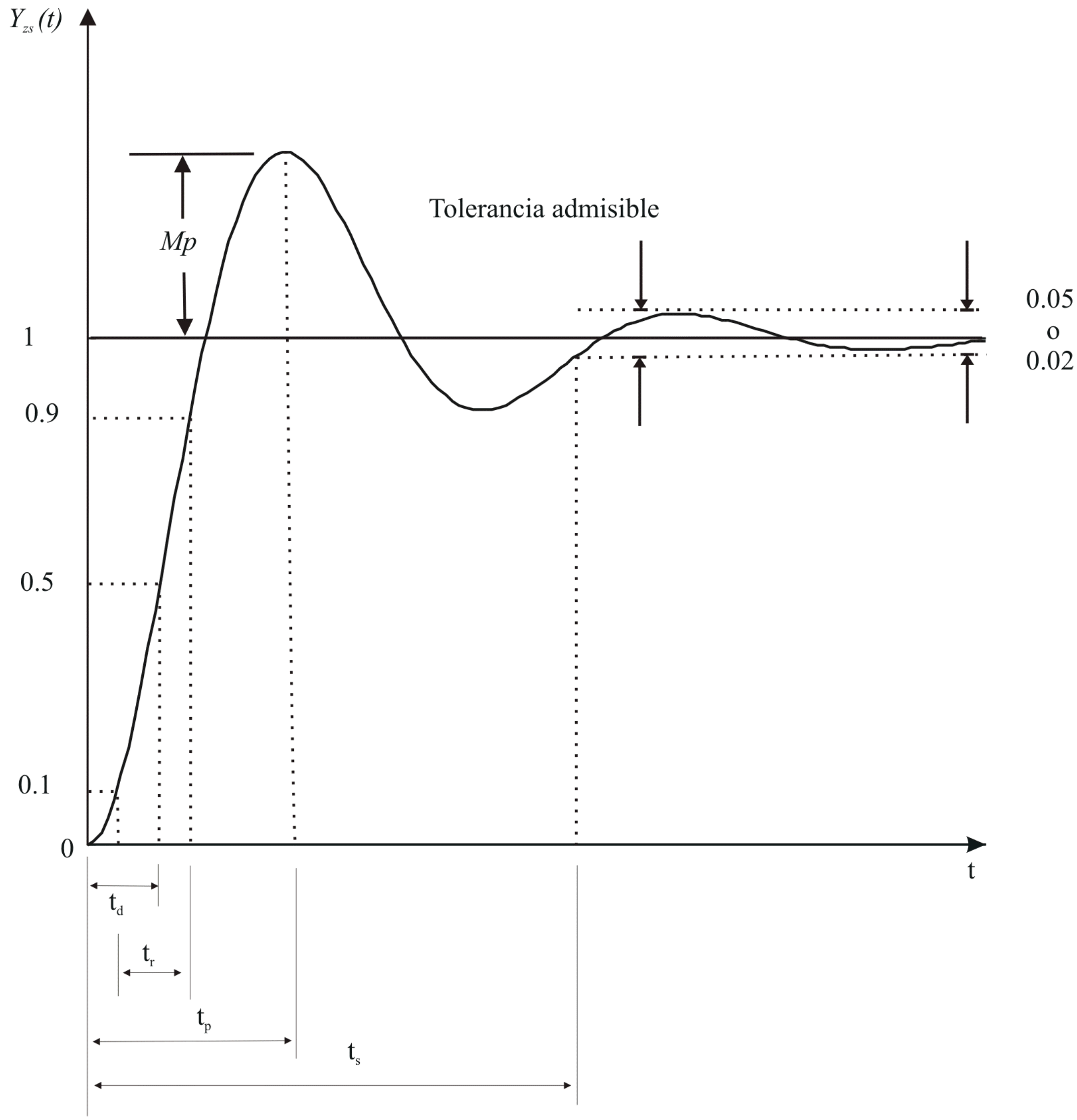


Figura 3. Respuesta al escalón cuando $0 < \zeta < 1$.

t_r (Tiempo de levantamiento): Es el tiempo que transcurre para que la respuesta de estado cero pase del 10 al 90 % del valor final. En sistemas subamortiguados se define como el tiempo necesario para que la respuesta alcance el valor final por primera vez.

de la Ec. (6)

$$t_r = \frac{\pi - \phi}{\omega_n \sqrt{1-\varsigma^2}} \qquad \text{donde } \phi = \cos^{-1} \zeta \tag{9}$$

t_p (Tiempo de sobrepaso): Tiempo que transcurre para que la respuesta de estado cero alcance su valor máximo.

de la Ec. (6)

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\varsigma^2}} \tag{10}$$

M_p (Sobrepaso o sobretiro): El sobrepaso se define en la siguiente ecuación

$$M_p = \frac{y(t_p) - y_p}{y_p} \tag{11}$$

donde $y_p = \lim_{t\to\infty} y(t)$

Se acostumbra especificar al sobrepaso en términos de porcentaje, así por ejemplo si M_p = 0.77, se dice que el sobretiro es del 77%

de la Ec. (6)

$$M_p = e^{\left(-\frac{\varsigma\pi}{\sqrt{1-\varsigma^2}}\right)} \tag{12}$$

t_s (Tiempo de asentamiento) Es el tiempo partir del cual la magnitud de la oscilación en la respuesta de estado cero no es mayor que un porcentaje especificado del valor permanente.

Suponiendo ese porcentaje como un 5%

$$t_s = \frac{3}{\varsigma\omega_n} \tag{13}$$

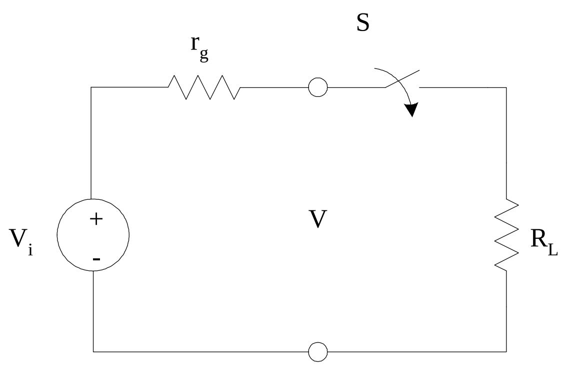


Figura 4. Circuito para determinar la resistencia interna del generador.

Experimentos a realizar

Experimento I

Medición de la resistencia interna del generador, r_g.

Arme el circuito de la Fig. 4.

La resistencia interna del generador se puede calcular por medio de la Ec. (14)

$$\frac{\text{Amplitud de V con S cerrado}}{\text{Amplitud de V con S abierto}} = \frac{R_L}{r_g + R_L} \tag{14}$$

donde $R_L = 500\ \Omega$.

Experimento II

Medición de la inductancia.

Mida el valor de la resistencia de la inductancia r_L. A continuación arme el circuito de la Fig. 5. Ajuste la amplitud A y la frecuencia de la señal cuadrada del generador de tal forma que en el oscilocopio se observe la Fig. 1(b). Debe ser claro al lector de que como no se cuenta con un osciloscopio con memoria, la señal de entrada que se aplica es una onda cuadrada para poder visualizar la respuesta al escalón; de otra manera no es posible apreciarla, ya que la respuesta transitoria del circuito tiene una duración del orden de milisegundos.

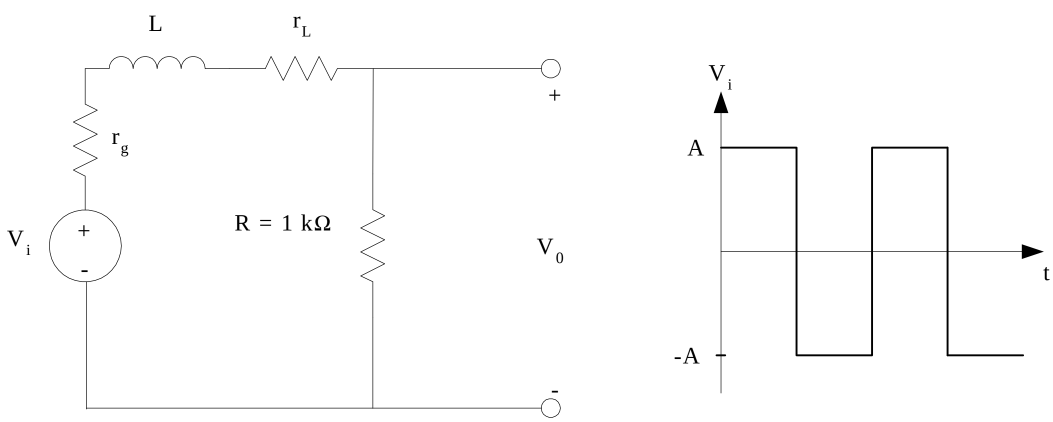


Figura 5. Circuito RL.

Con ayuda del osciloscopio determine experimentalmente el valor de la constante del tiempo τ.
A partir del valor obtenido para τ determine el valor de la inductancia.

Experimento IlI

Medición de la capacitancia.

Arme el circuito de la Fig. 6. Ajuste la amplitud A y la frecuencia de la señal cuadrada del generador de tal forma que en el oscilocopio se observe la Fig. 1(b).

Con ayuda del osciloscopio determine experimentalmente el valor de la constante de tiempo τ.
A partir del valor obtenido para τ determine el valor de la capacitancia.

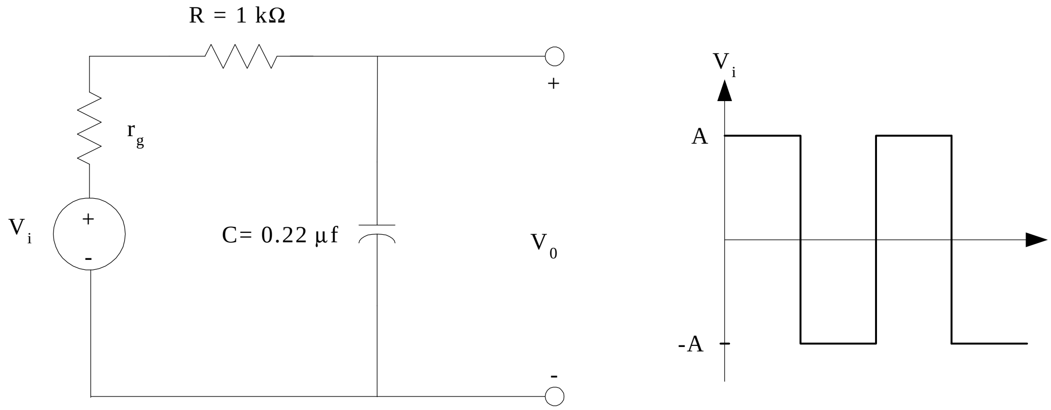


Figura 6. Circuito RC.

Experimento IV

Sistema Eléctrico de Segundo Orden.

Arme el circuito de la Fig. 7. Ajuste la amplitud A y la frecuencia de la señal cuadrada del generador de tal forma que en el oscilocopio se observe la Fig. 3.

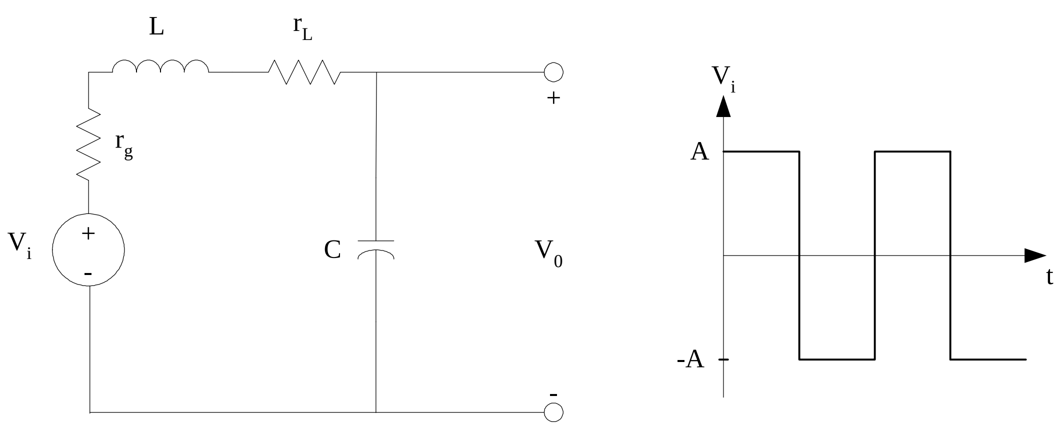


Figura 7. Circuito RLC serie.

El inductor y el capacitor son los mismos que se han empleados en los experimentos II *y* III.
Calcule teóricamente los parámetros de diseño definidos por las Ecs. (9), (10), (11), (12) y (13).

Determine experimentalmente con el auxilio de un osciloscopio, los parámetros calculados anteriormente. Llene ahora la siguiente tabla.

Especificación de diseño	Teórico	Experimental
M_p		
t_p		
t_r		

Si existen discrepancias entre los valores medidos y los calculados teóricamente, ¿A qué las atribuye?

Equipo necesario

1 Generador de funciones
1 Osciloscopio
1 Solenoide
1 Multímetro

Material necesario

1 Capacitor de 0.22 μf
1 Resistor de 1 kΩ, 1/2 watt

Cuestionario previo

1. Demuestre la Ec. (14).

2. Determine la función de transferencia del circuito RL.

3. A partir del resultado anterior determine la constante de tiempo.

4. Determine la función de transferencia del circuito RC.

5. A partir del resultado anterior determine la constante de tiempo.

6. Determine la función de transferencia del circuito RLC.

7. A partir del resultado anterior exprese ω_n y ζ en función de R, L y C.

8. Exprese las Ecs. (9), (10), (12) y (13) en función de R, L y C.

BIBLIOGRAFÍA

Desoer, C. A., and Kuh, E. S.
Basic Circuit Theory
Mc Graw Hil1, 1969

Hayt, W. H., Jr., Kemmerly, J. E., y Durbin, S. M.
Análisis de circuitos en ingeniería. Sexta edición
Mc Graw Hill, 2003

Dorf, R. C. y Svoboda, J. A.
Circuitos Eléctricos. 5ª edición
Alfaomega, 2003

Ogata, K.
Ingeniería de Control Moderna, 3ª edición
Prentice Hall Hispanoamericana, S. A., 1998

Ogata, K.
System Dinamics
Prentice Hall, 1998

Neff, H. P., Jr.
Continuous and discrete linear systems
Harper & Row, 1991

Hubert, C. I.
Circuitos Eléctricos CA/CC. Enfoque integrado
Mc Graw Hill, 1985