Ejemplo 2.5.2 Sea

$$G(s)=\frac{K}{s\,(s+a)},\tag{2.138}$$

donde a y K son constantes. Tomando en cuenta el retenedor de orden cero se tiene

$$\begin{aligned}G(z)=\mathcal{Z}\left(G_{\mathrm{roc}}(s)G(s)\right) &= \mathcal{Z}\left(\frac{1-e^{-sh}}{s}\frac{K}{s(s+a)}\right)\\ &= \left(1-z^{-1}\right)\mathcal{Z}\left(\frac{K}{s^2\,(s+a)}\right)\\ &= \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left(\frac{K}{s^2\,(s+a)}\right).\end{aligned}$$

Por tablas se obtiene de

$$\begin{aligned}G(z)=\mathcal{Z}\left(G_{\mathrm{roc}}(s)G(s)\right) &= \frac{z-1}{z}\frac{K}{a}\frac{z\left(\left(ah-1+e^{-ah}\right)z+\left(1-e^{-ah}-ahe^{-ah}\right)\right)}{a\,(z-1)^2\left(z-e^{-ah}\right)} \qquad (2.139)\\ &= \frac{K}{a}\frac{\left(ah-1+e^{-ah}\right)z+\left(1-e^{-ah}-ahe^{-ah}\right)}{a\,(z-1)\left(z-e^{-ah}\right)}.\end{aligned}$$

El resultado anterior expresado para $z=e^{sh}$ es

$$\mathcal{Z}\left(G_{\mathrm{roc}}(s)G(s)\right) = \frac{K}{a}\frac{\left(ah-1+e^{-ah}\right)e^{sh}+\left(1-e^{-ah}-ahe^{-ah}\right)}{a\left(e^{sh}-1\right)\left(e^{sh}-e^{-ah}\right)}.$$

Si se evalúa la expresión anterior en $h=0$ se obtiene una indeterminación, pero como para valores muy pequeños de h se puede sustituir e^{sh} por $1+sh$ y e^{-ah} por $1-ah$, entonces se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\mathcal{Z}\left(G_{\mathrm{roc}}(s)G(s)\right) &= \lim_{h\to 0}\frac{K}{a}\frac{(ah-1+1-ah)\,e^{sh}+(1-1+ah-ah\,(1-ah))}{a\,(1+sh-1)\,(1+sh-1+ah)} \qquad (2.140)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{K}{a}\frac{a^2h^2}{ash\,(sh+ah)}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{K}{a}\frac{ah}{s\,(sh+ah)}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{K}{a}\frac{a}{s\,(s+a)}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{K}{s\,(s+a)}=G(s).\end{aligned}$$

$\triangle$