CURSO DE
SISTEMAS Y SEÑALES

Elaborado por:

Edgar Tello Paleta

OBJETIVO

Aprender las técnicas fundamentales para la comprensión y el análisis de los sistemas lineales que se encuentran en el campo de las comunicaciones, el procesamiento de datos y el control.

TEMARIO

1. Señales y sistemas
2. Sistemas lineales e invariantes en el tiempo (LTI)
3. Análisis de sistemas LTI, continuos y discretos, mediante las transformaciones de Laplace y Z.
4. Fundamentos de modelado de sistemas físicos.
5. Características dinámicas de los sistemas LTI.
6. Respuesta en frecuencia.

EVALUACIÓN

$$CS = 0.9(CE) + 0.1(CL)$$

CA = CS para alumnos exentos con $CS \geq 7.0$ y $FA \leq 5$

Los alumnos no exentos o que quieran mejorar su CA

$$CA = CEF1$$

Y en caso de no aprobar el primer examen final

$$CA = CEF2$$

CS: Calificación del semestre
CE: Calificación en exámenes
CL: Calificación del laboratorio

CA: Calificación en actas
CEF1: Calif. 1er final
CEF2: Calif 2do final

FA: Faltas (Inasistencias). Se pasará lista a las 9:00 am.

EVALUACIÓN

Escala de Calificación en Acta (CA)

$$6.0 \leq \ 6 \ < 6.5$$
$$6.5 \leq \ 7 \ < 7.5$$
$$7.5 \leq \ 8 \ < 8.5$$
$$8.5 \leq \ 9 \ < 9.5$$
$$9.5 \leq 10 \leq 10$$

Habrá dos exámenes parciales:

1er. Parcial: correspondiente a los temas 1, 2 y 3

2er. Parcial: correspondiente a los temas 4, 5 y 6

BIBLIOGRAFÍA PRINCIPAL

OPPENHEIM, A. V., et al.
Señales y Sistemas
México
Prentice Hall Hispanoamericana, 1998

RODRÍGUEZ RAMÍREZ, Francisco
Dinámica de sistemas
México
Trillas, 1994

1. SISTEMAS Y SEÑALES

Señales continuas, discretas y digitales

En general, una señal es una función de una o más variables independientes que transmite información. Por ejemplo se tienen:

- Señales eléctricas: variaciones de voltajes y corrientes en un circuito eléctrico en función del tiempo.
- Señal sonora: variación de presión acústica en función del tiempo.
- Señales de velocidad, fuerza o temperatura, en función del tiempo.
- Señal de video monocromático: variación de intensidad (brillo) en función de dos variables espaciales (en cada imagen fija) y el tiempo (al ir cambiando cada imagen fija).

Este curso se enfoca en señales de 1 sola variable independiente que se denominará "tiempo". Por su representación matemática se tienen:

Señales de tiempo continuo

Estas señales se representan mediante funciones reales (o complejas) de variable real. Por ejemplo:

$$x(t) = e^{-t}\cos(t)\,, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

Señales de tiempo discreto (o secuencias)

Estas señales se representan mediante funciones reales (o complejas) de variable entera. Por ejemplo:

$$x[n] = 0.5^{n}\cos(n)\,, \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z}$$

Señales digitales

Una señal digital es una representación cuantizada (o aproximada) de una secuencia $x[n]$. Para esta representación se utiliza algún código binario.

Señales de tiempo discreto (secuencias)

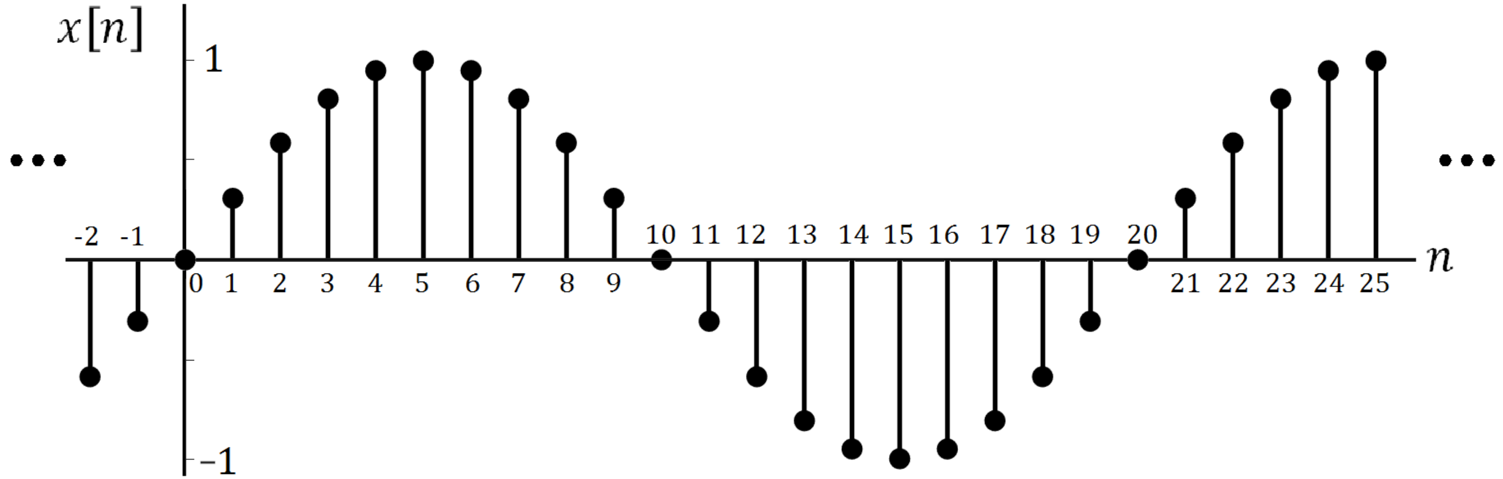
- Representación en forma cerrada: $x[n] = sen\left(\frac{2\pi}{20}n\right)$

- Representación como arreglo ordenado de números:

$$x[n] = \{\ldots,\ \underset{\uparrow}{x[0]},\ x[1],\ x[2],\ x[3],\ x[4],\ x[5], \ldots\}$$

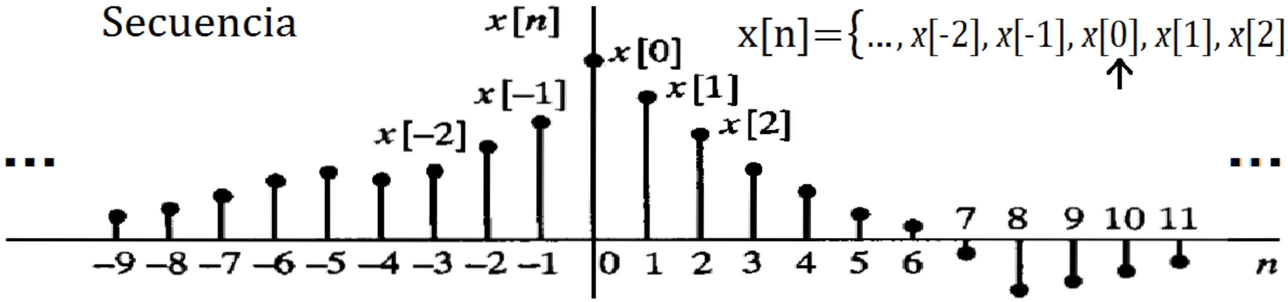
$$\approx \{\ldots, \underset{\uparrow}{0.00},\ 0.31,\ 0.59,\ 0.81,\ 0.95,\ 1.00, \ldots\}$$

- Representación gráfica:



Señales de tiempo discreto (secuencias)

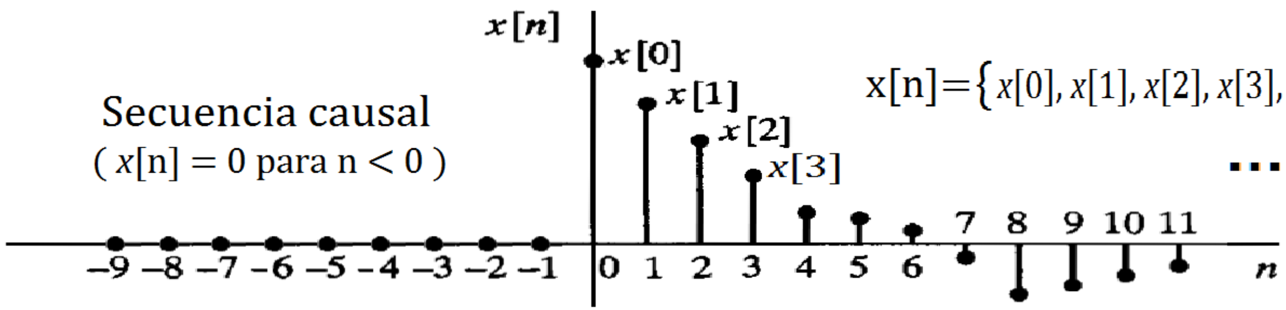
Secuencia



$$x[n]=\{\ldots, x[-2], x[-1], \underset{\uparrow}{x[0]}, x[1], x[2], \ldots\}$$

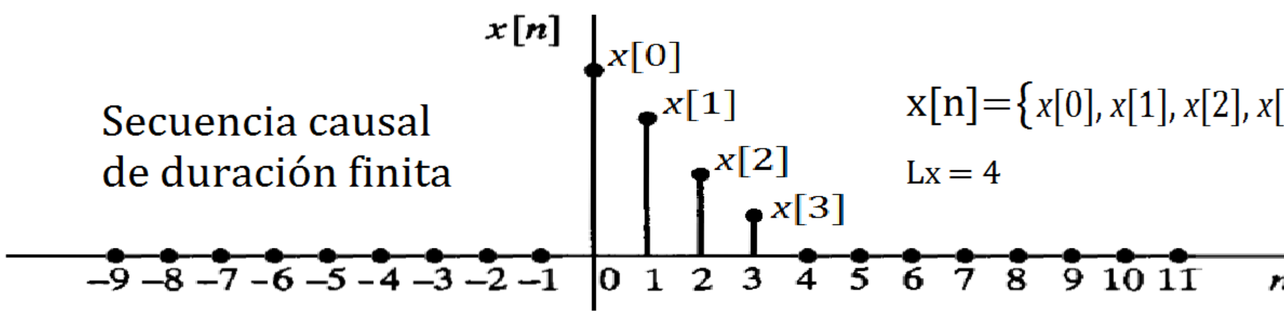
Secuencia causal

($x[n] = 0$ para $n < 0$)



$$x[n]=\{x[0], x[1], x[2], x[3], \ldots\}$$

Secuencia causal
de duración finita



$$x[n]=\{x[0], x[1], x[2], x[3]\}$$

$Lx = 4$

Señales periódicas y aperiódicas

- Una señal $x(t)$ es periódica con periodo T, si T es un $\mathbb{R}^{+}$ tal que

$$x(t+T) = x(t), \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

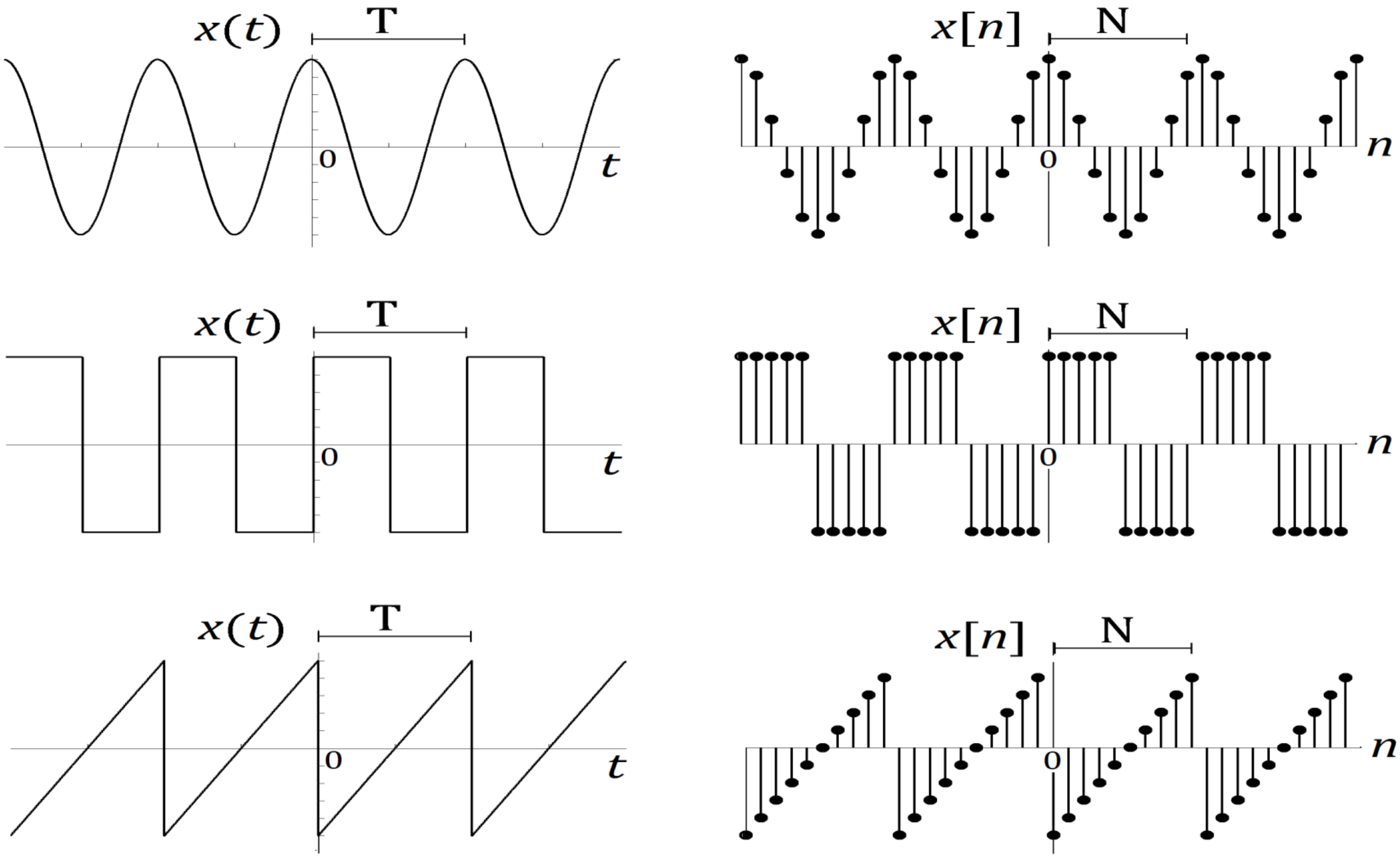
El periodo fundamental es el menor de los T.

- Una secuencia $x[n]$ es periódica con periodo N, si N es un $\mathbb{Z}^{+}$ tal que

$$x[n+N] = x[n], \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z}$$

El periodo fundamental es el menor de los N.

- Una señal o secuencia no periódica es aperiódica.



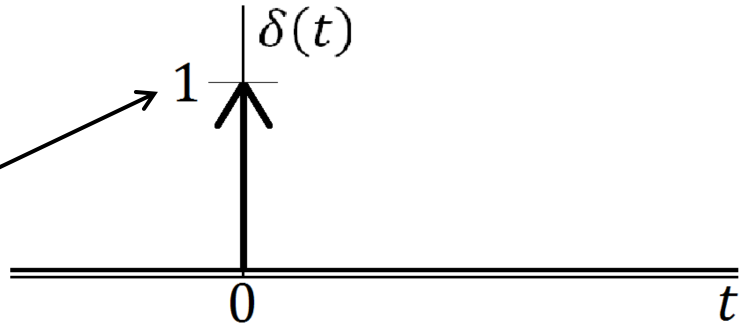
Ejemplos de señales y secuencias periódicas

Señales básicas de tiempo continuo (TC) y t discreto (TD)

Señal impulso unitario

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0\,, & t \neq 0 \end{cases}$$

con $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$

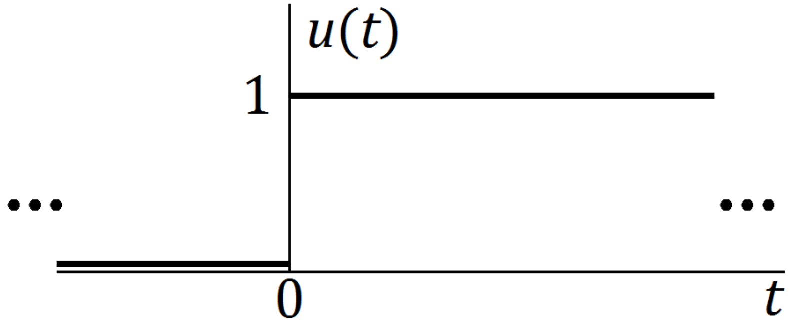


Propiedad de muestreo

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$$

Señal escalón unitario

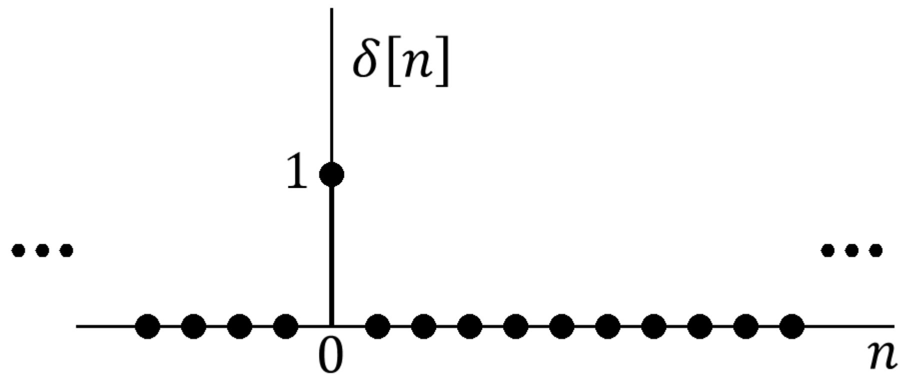
$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



Secuencia impulso unitario

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

$$= \{\, 1,0,0,0, \ldots \}$$



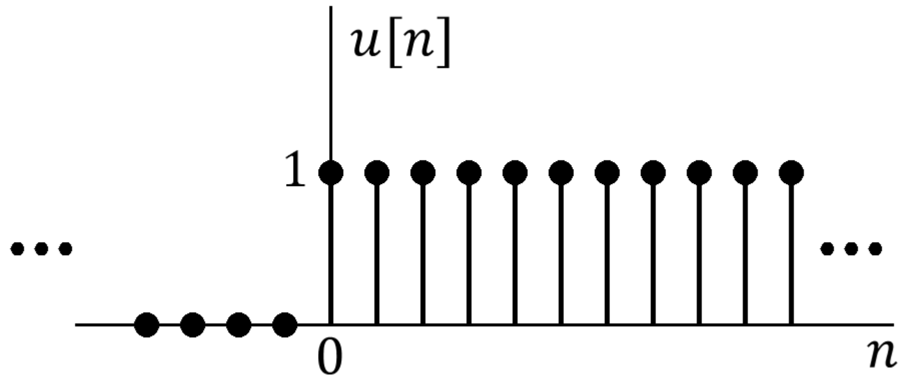
Propiedad de muestreo

$$x[n]\delta[n] = x[0]\delta[n]$$

Secuencia escalón unitario

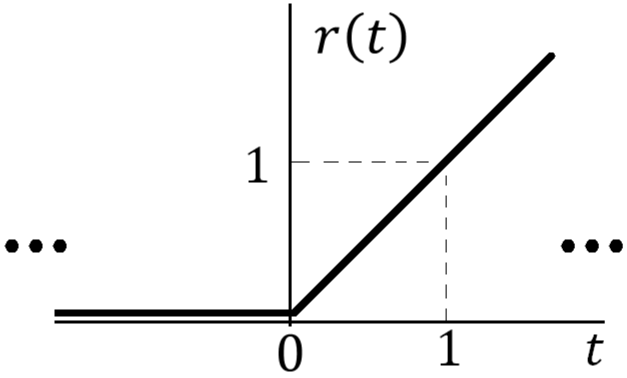
$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

$$= \{\, 1,1,1,1, \ldots \}$$



Señal rampa unitaria

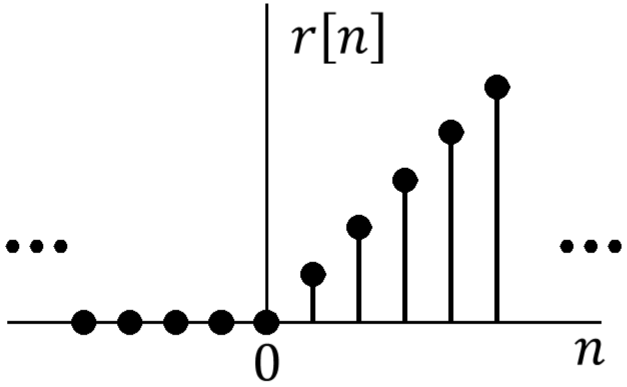
$$r(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



Secuencia rampa unitaria

$$r[n] = \begin{cases} n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

$$= \{0,1,2,3,4,5, \ldots\}$$

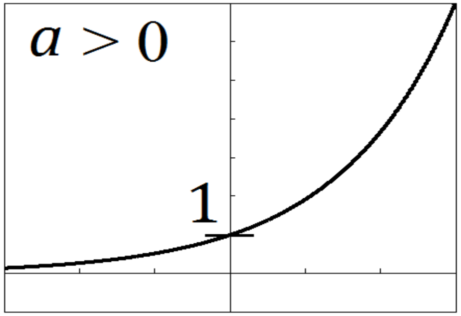


Señal exponencial real

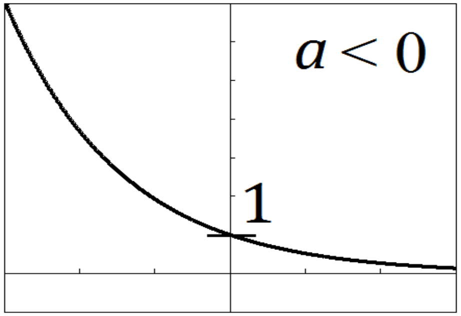
$$x(t) = e^{at}$$

Donde $a \in \mathbb{R}$ diferente de cero.

$a > 0$: exponencial creciente



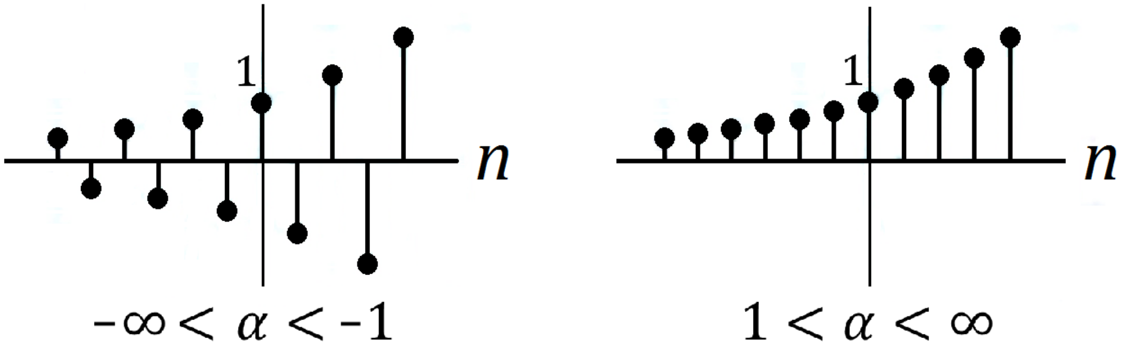
$a < 0$: exponencial decreciente



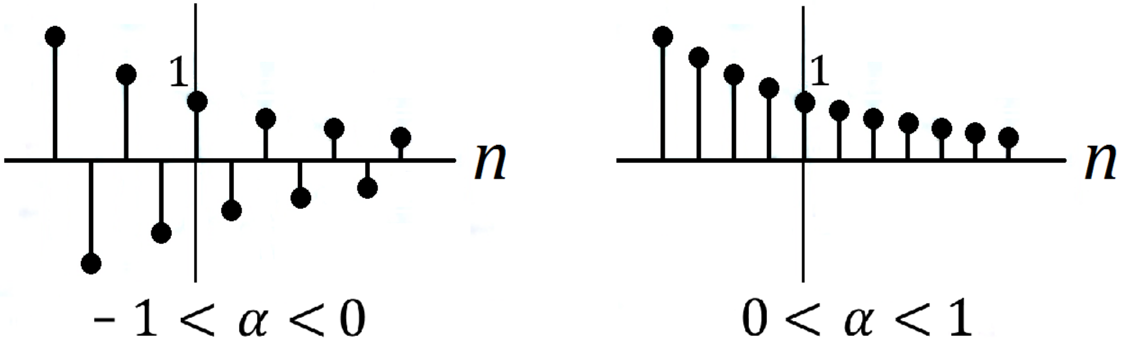
Secuencia exponencial real

$$x[n] = \alpha^n, \qquad \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha \neq 0 \;\; \text{y} \;\; \alpha \neq 1$$

Creciente
$|\alpha| > 1$



Decreciente
$|\alpha| < 1$



Señal sinusoidal

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi\,), \qquad \omega_0 = 2\pi f_0$$

Donde

A : amplitud

f_0 : frecuencia en Hertz

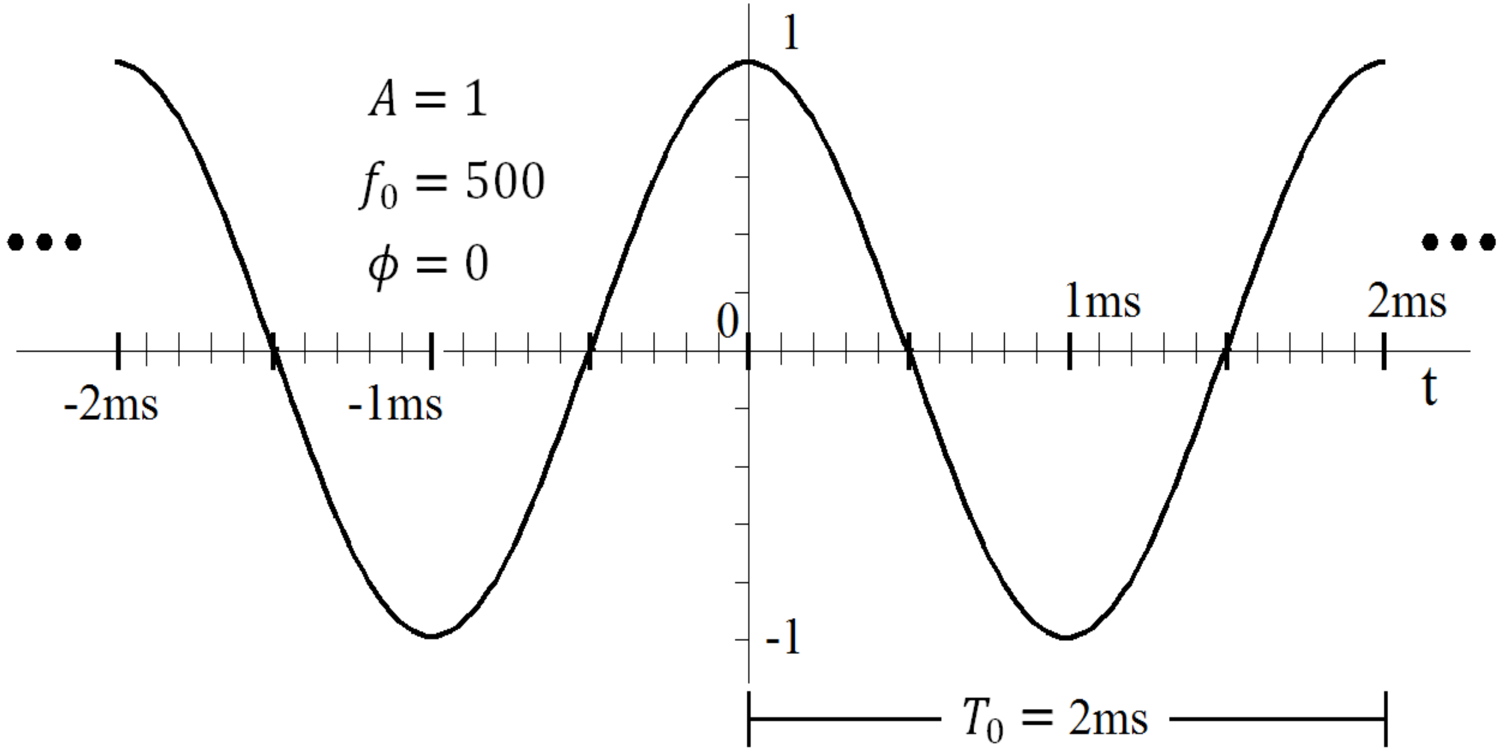
ω_0 : frecuencia angular en radianes sobre segundo

ϕ : fase en radianes

Una señal sinusoidal es periódica con periodo fundamental:

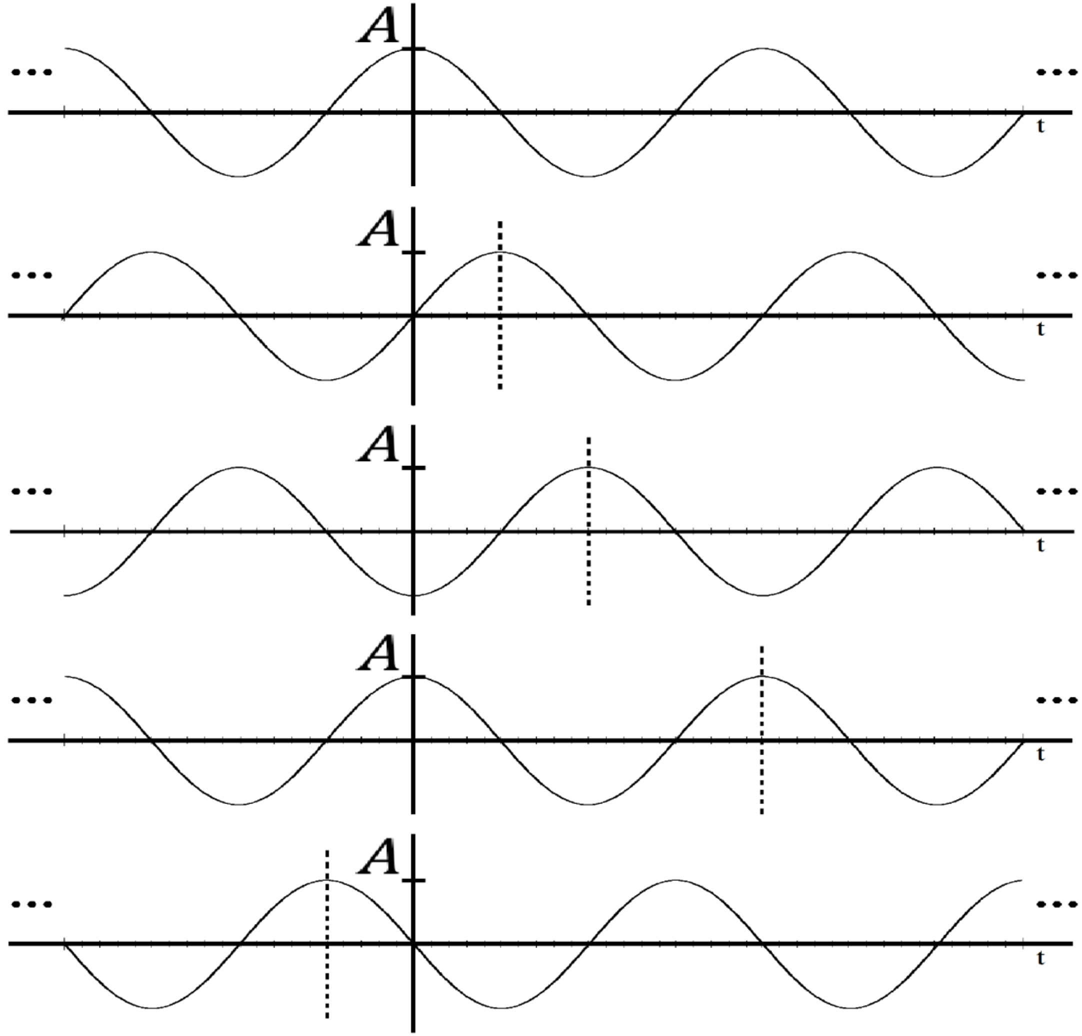
$$T_0 = \frac{1}{f_0}$$

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi)$$



Señal sinusoidal $x(t) = \cos(1000\pi t)$

$$x(t) = A\cos(\omega_o t + \phi)$$



$$\boxed{\phi = 0}$$

$$\phi = -\frac{\pi}{2}$$

$$\phi = -\pi$$

$$\phi = -2\pi$$

$$\phi = \frac{\pi}{2}$$

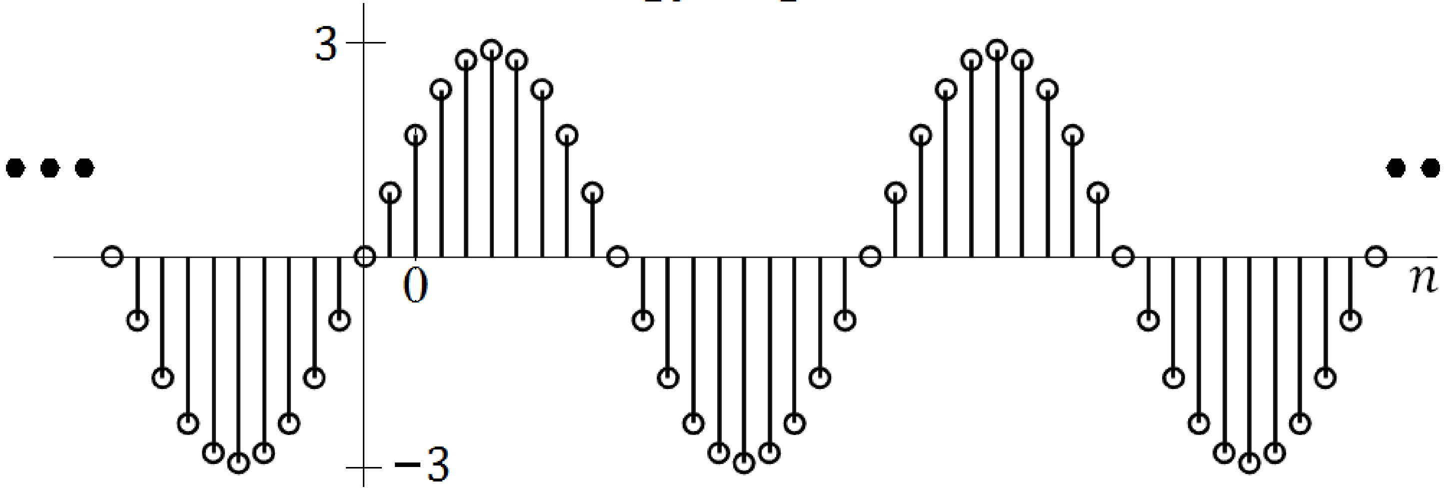
<u>Secuencia sinusoidal</u>

$$x[n] = A cos(\Omega_0 n + \phi)$$

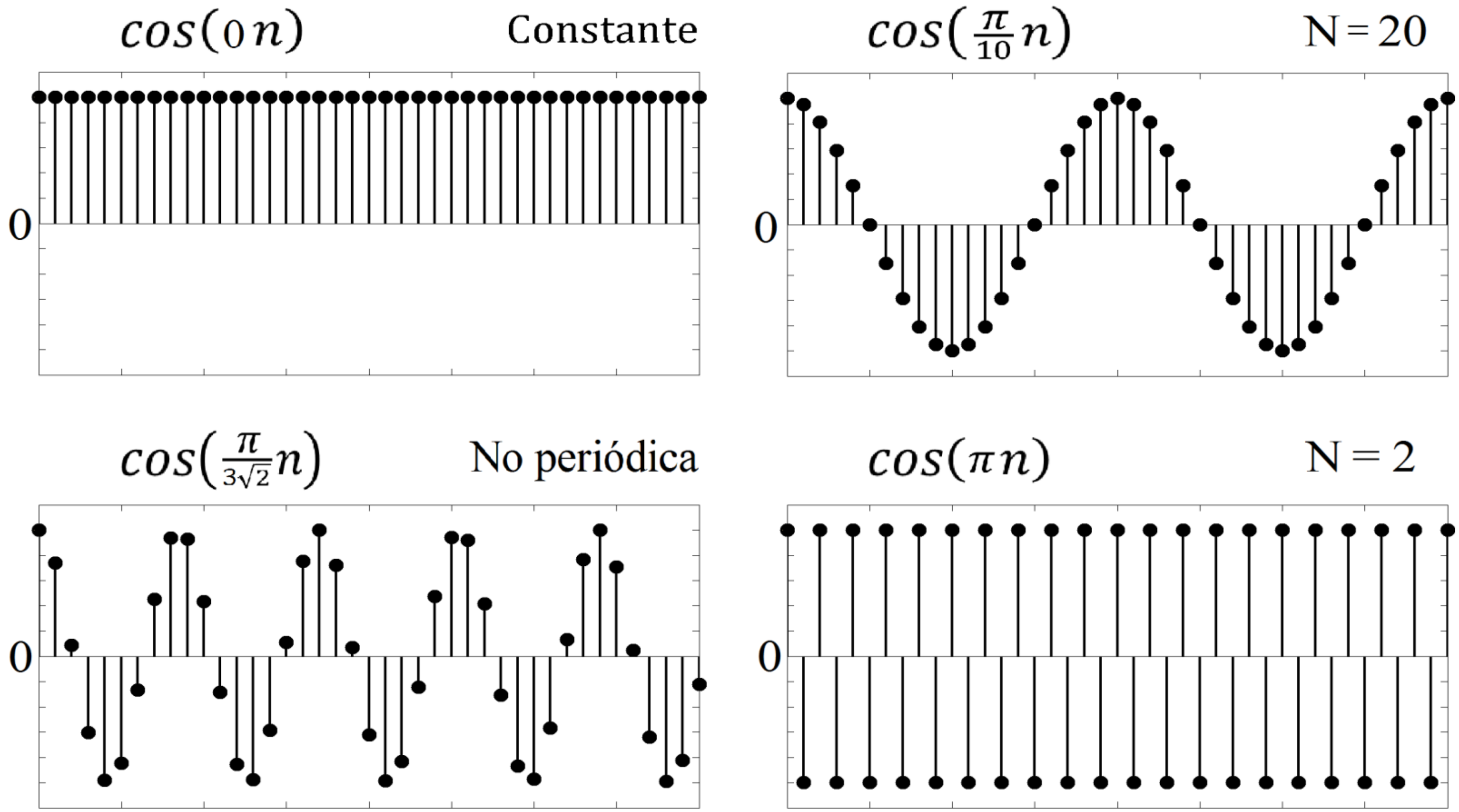
Donde A es la amplitud, Ω_0 es la <u>frecuencia angular en radianes</u> y, ϕ es la fase en radianes.

$x[n]$ es periódica con periodo fundamental $N \in \mathbb{Z}^+$ cuando $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} m$, siendo $\frac{m}{N}$ un número racional en su forma irreducible.

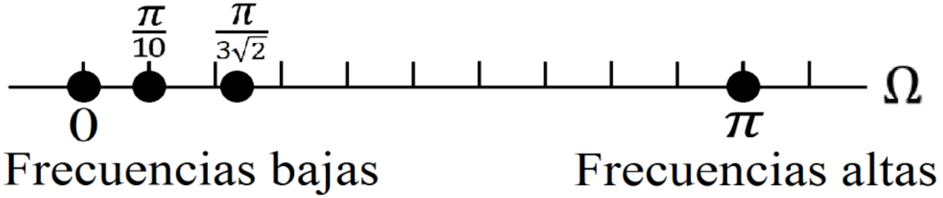
$$x[n] = 3\,cos\left(\frac{2\pi}{20}n - \frac{\pi}{2}\right) \qquad N = 20$$



Periodicidad en el tiempo de la secuencia sinusoidal



$$x[n] = cos(\Omega n)$$



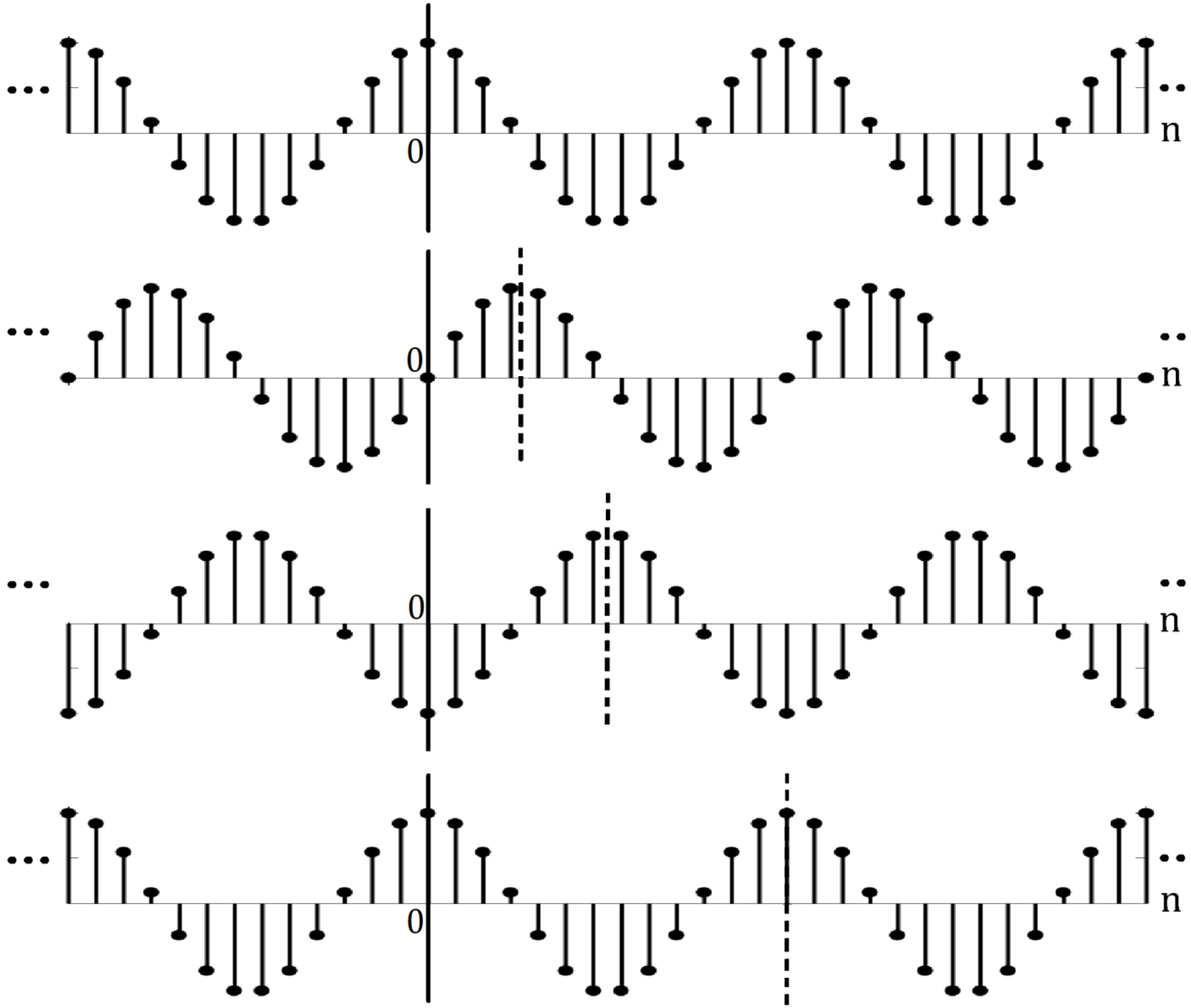
$$x[n] = cos\left(\frac{2\pi}{13}n + \phi\right)$$

$\boxed{\phi = 0}$

$\phi = -\frac{\pi}{2}$

$\phi = -\pi$

$\phi = -2\pi$

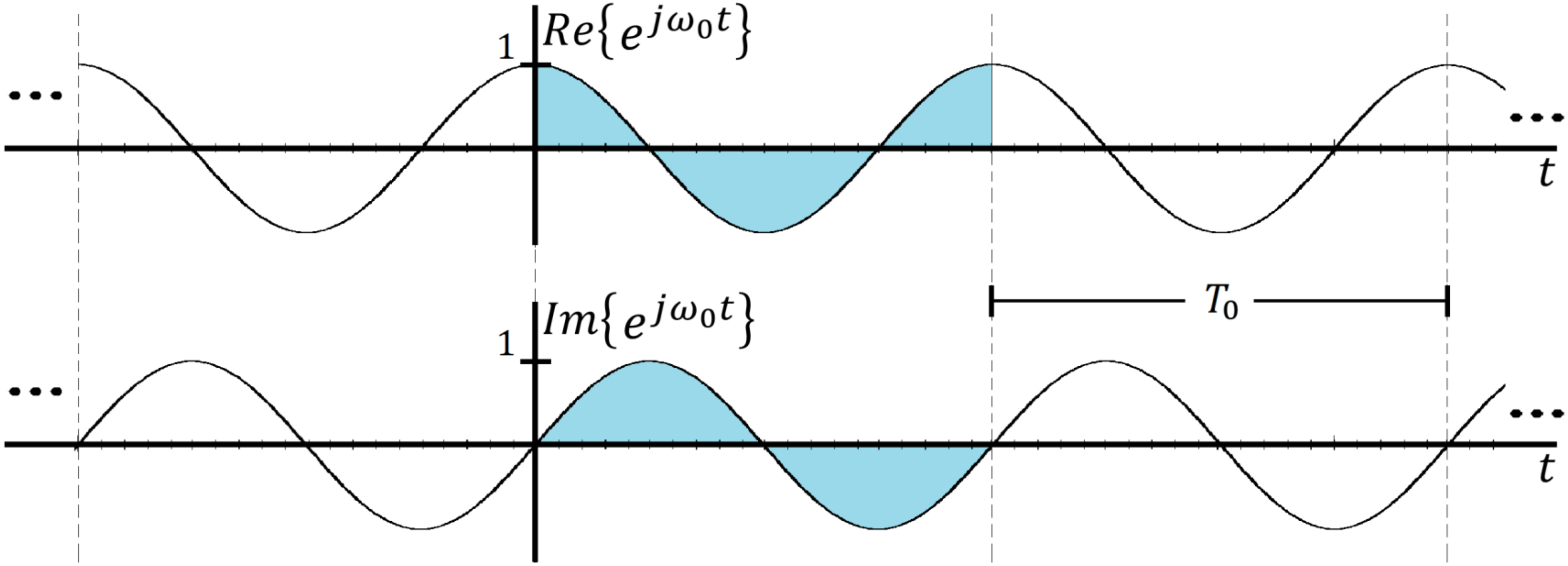


Señal exponencial compleja

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j sen(\omega_0 t)$$

Donde $\omega_0 = 2\pi f_0$ es su frecuencia angular en radianes sobre seg. y f_0 es su frecuencia en Hertz.

La señal $e^{j\omega_0 t}$ es periódica con periodo fundamental $T_0 = 1/f_o$.



Operaciones y transformaciones de señales

Suma, escalamiento en amplitud, combinación lineal y producto de señales

Para cualesquiera señales f, g y constantes α, β se define

- Suma: $(f+g)(t) = f(t) + g(t)\,, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$
- Escalamiento: $(\alpha f)(t) = \alpha f(t), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$
- Combinación lineal:

$$(\alpha f + \beta g)(t) = \alpha f(t) + \beta g(t) \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

- Producto: $(f \cdot g)(t) = f(t) g(t), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$

Suma, escalamiento en amplitud, combinación lineal y producto de secuencias

Para cualesquiera secuencias f, g y constantes α, β se define

- Suma: $(f+g)[n] = f[n] + g[n], \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$

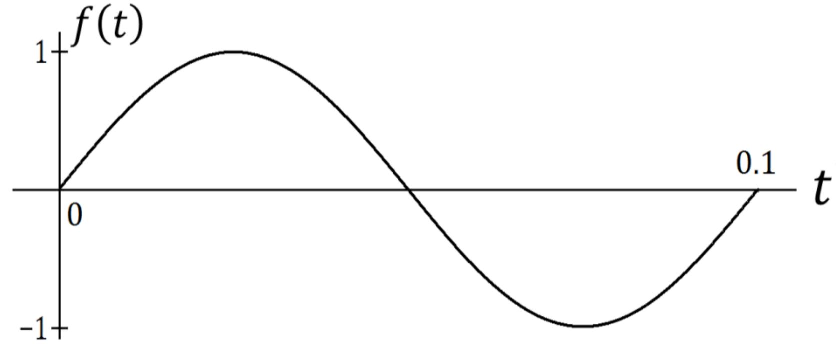
- Escalamiento: $(\alpha f)[n] = \alpha f[n], \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$

- Combinación lineal:

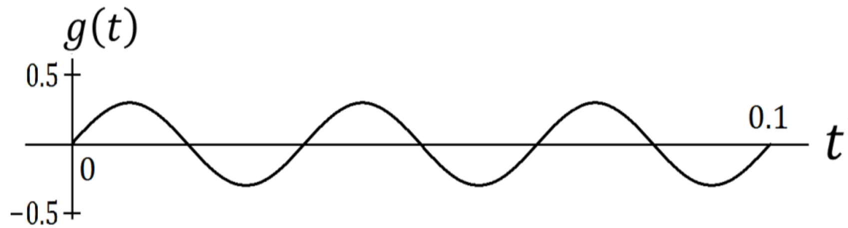
$$(\alpha f + \beta g)[n] = \alpha f[n] + \beta g[n] \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$$

- Producto: $(f \cdot g)[n] = f[n]g[n], \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$

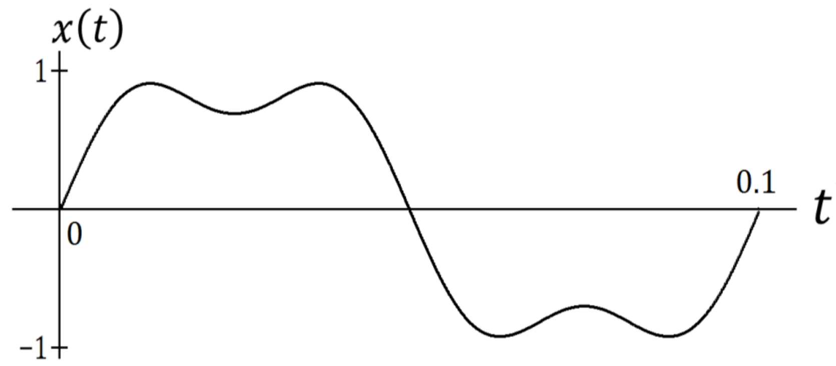
$f(t) = \cos(2\pi 10t - \frac{\pi}{2})$



$g(t) = 0.3\cos(2\pi 30t - \frac{\pi}{2})$

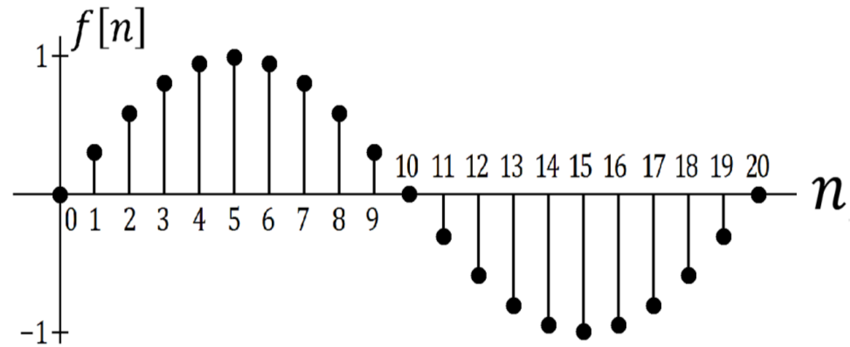


$x(t) = f(t) + g(t)$

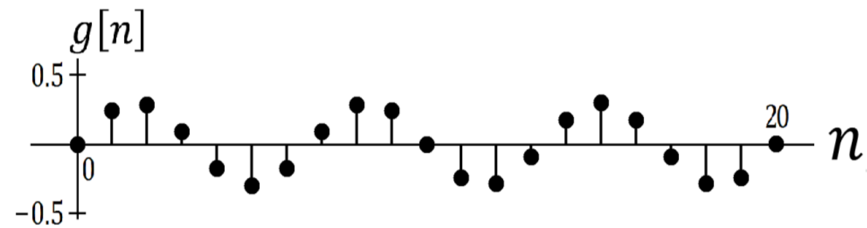


Suma de señales

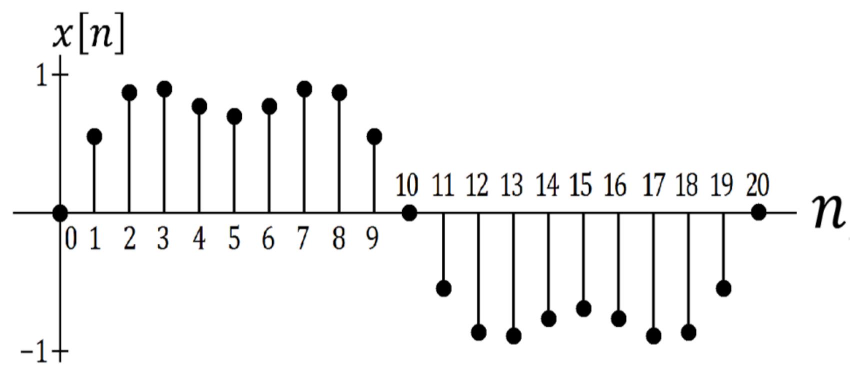
$$f[n] = \cos(\frac{\pi}{10}n - \frac{\pi}{2})$$



$$g[n] = 0.3\cos(3\frac{\pi}{10}n - \frac{\pi}{2})$$



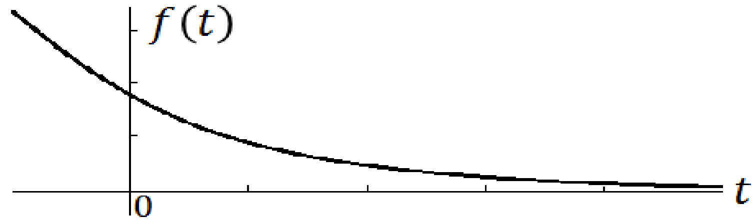
$$x[n] = f[n] + g[n]$$



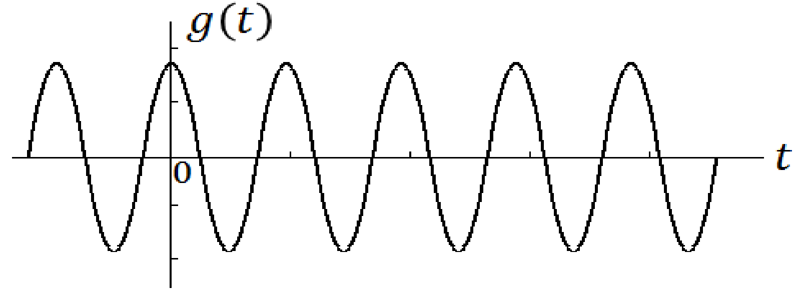
Suma de secuencias

$$f(t) = e^{at}$$

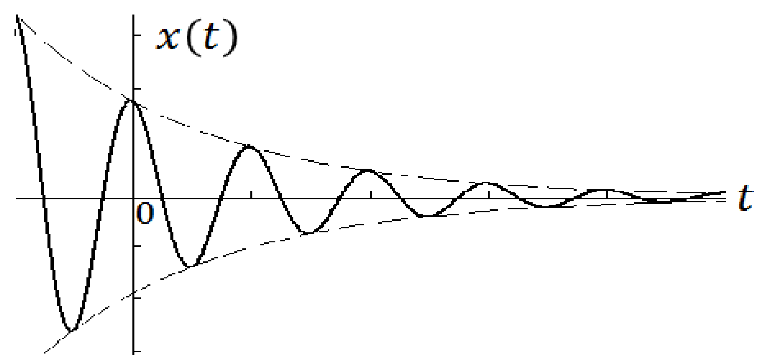
$$a < 0$$



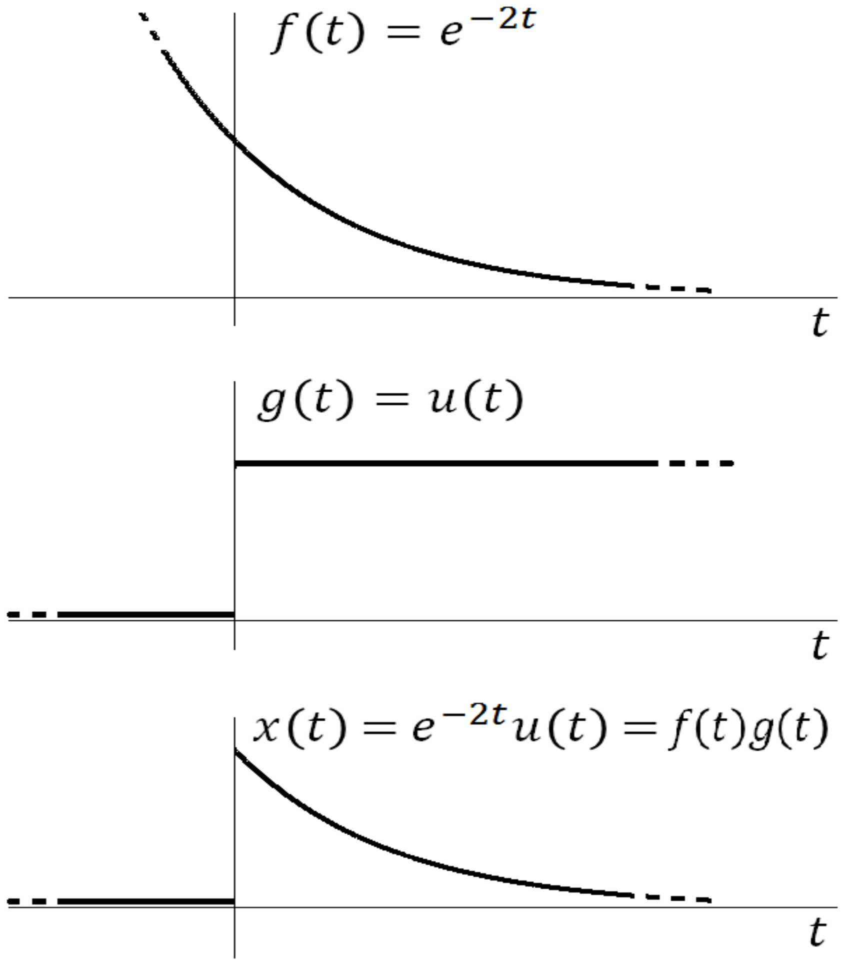
$$g(t) = \cos(\omega_0 t)$$



$$x(t) = f(t)g(t)$$
$$= e^{at}\cos(\omega_0 t)$$



Producto de señales

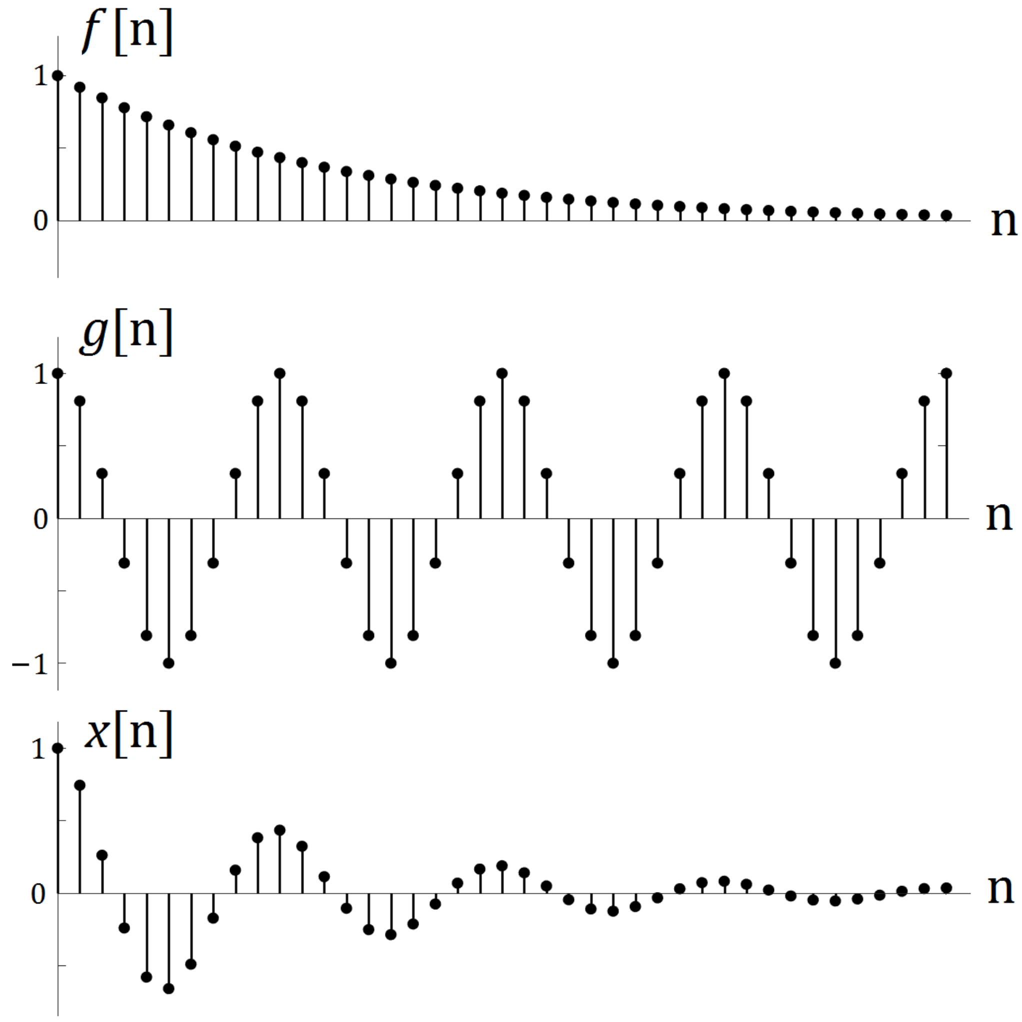


Producto de señales

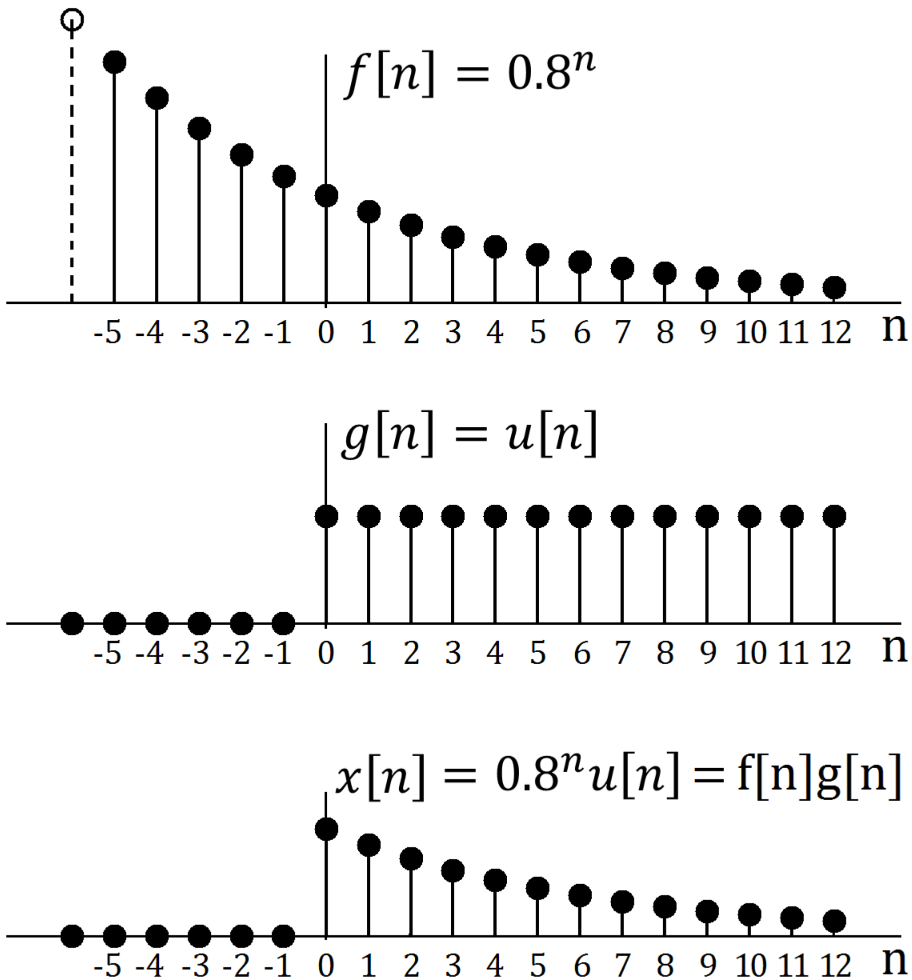
$$f[n] = 0.92^n$$

$$g[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{10}n\right)$$

$$x[n] = f[n]g[n]$$
$$= 0.92^n \cos\left(\frac{2\pi}{10}n\right)$$



Producto de secuencias



Producto de secuencias

$$f[n] = \{\, 2,\ 1,\ 4,\ 3,\ 4,\ 1,\ 3,\ 5 \,\}$$

$$g[n] = \{\, 7,\ 4,\ 3,\ 5,\ 5,\ 6,\ 2,\ 1 \,\}$$

$$\begin{aligned} x[n] &= f[n] + g[n] \\ &= \{\, 9,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9,\ 7,\ 5,\ 6 \,\} \end{aligned}$$

$$f[n] = \{\, 4,\ \ 3,\ \ 2\}$$

$$g[n] = \{\, 5,\ \ 1,\ \ 4,\ \ 7,\ \ 7,\ \ 7\}$$

$$\begin{aligned} x[n] &= f[n] + g[n] \\ &= \{\, 9\,,\ \ 4,\ \ 6,\ \ 7,\ \ 7,\ \ 7\} \end{aligned}$$

Suma de secuencias

$$f[n] = \{\, 2,\ 1,\ 4,\ 3,\ 4,\ 1,\ 3,\ 5 \,\}$$

$$\begin{aligned} x[n] &= 3f[n] \\ &= \{\, 6,\ 3, 12, 9, 12, 3,\ 9, 15 \,\} \end{aligned}$$

$$f[n] = \{\ 4, -3,\ \ 2 \,\}$$

$$\begin{aligned} x[n] &= -2f[n] \\ &= \{-8,\ \ 6, -4 \,\} \end{aligned}$$

Escalamiento en amplitud de secuencias

$$f[n] = \{\ 2,\ 1,\ 4,\ 3,\ 4,\ 1,\ 3,\ 5\ \}$$

$$g[n] = \{\ 7,\ 4,\ 3,\ 5,\ 5,\ 6,\ 2,\ 1\ \}$$

$$\begin{aligned} x[n] &= f[n]g[n] \\ &= \{14,\ 4, 12, 15, 20,\ 6,\ 6,\ 5\ \} \end{aligned}$$

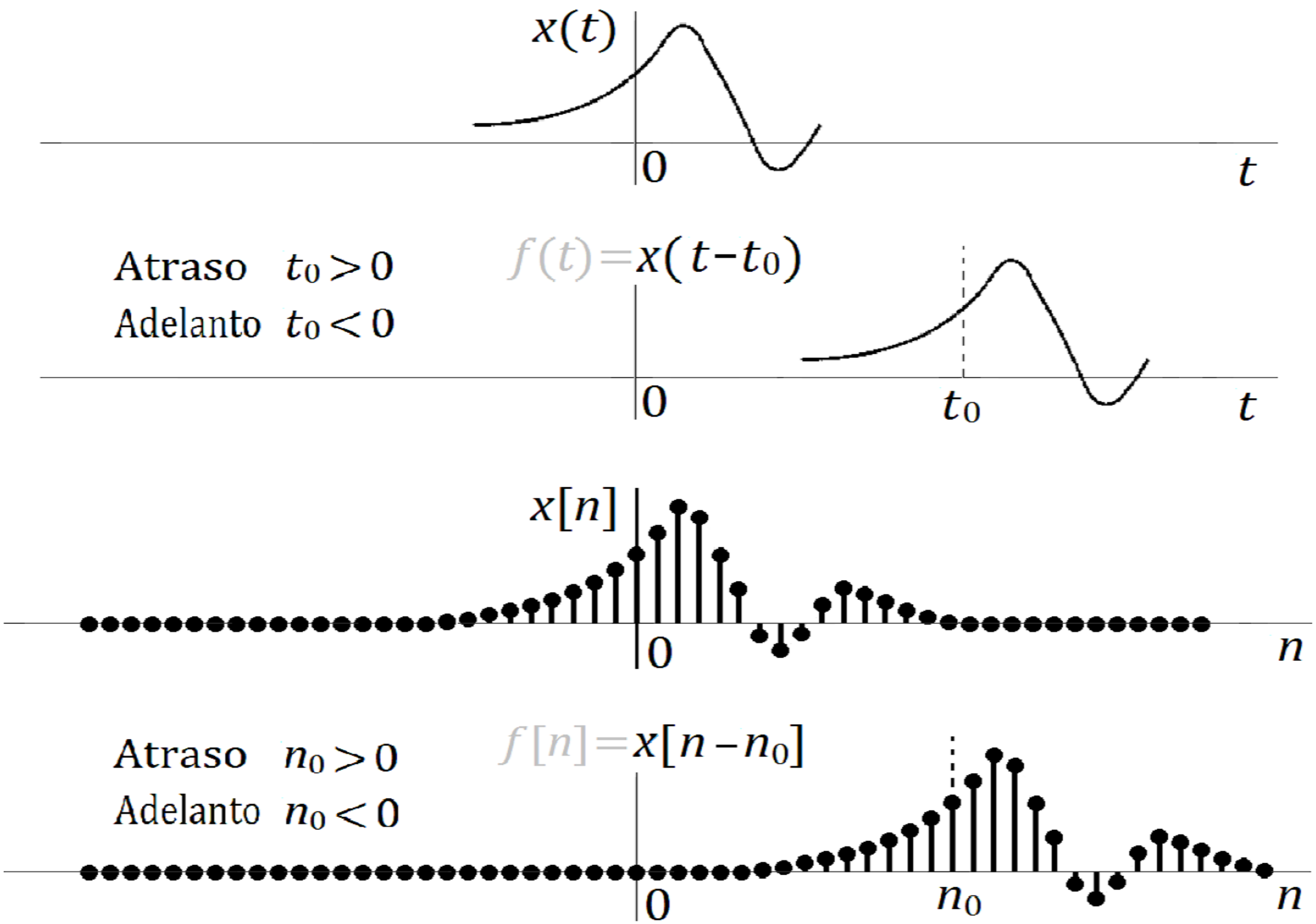
$$f[n] = \{\ 4,\ 3,\ 2\ \}$$

$$g[n] = \{\ 5,\ 2,\ 4,\ 7,\ 7,\ 7\}$$

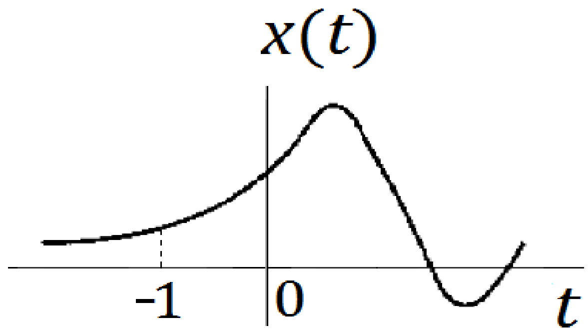
$$\begin{aligned} x[n] &= f[n]g[n] \\ &= \{\ 20,\ 6,\ 8,\ 0,\ 0,\ 0\} \end{aligned}$$

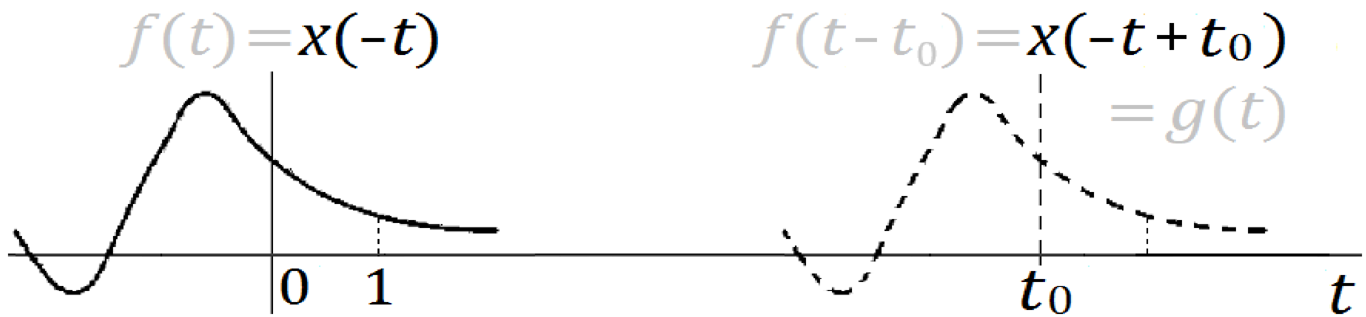
Producto de secuencias

Desplazamiento en el tiempo



Inversión y desplazamiento en el tiempo continuo

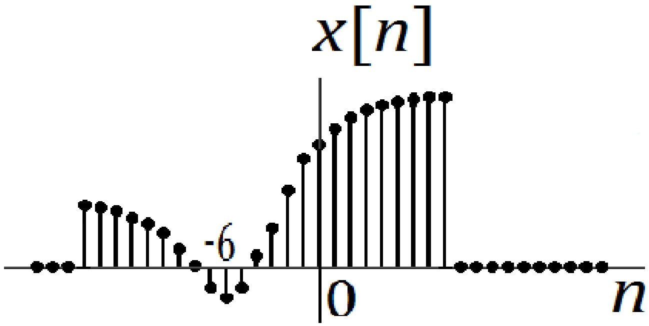


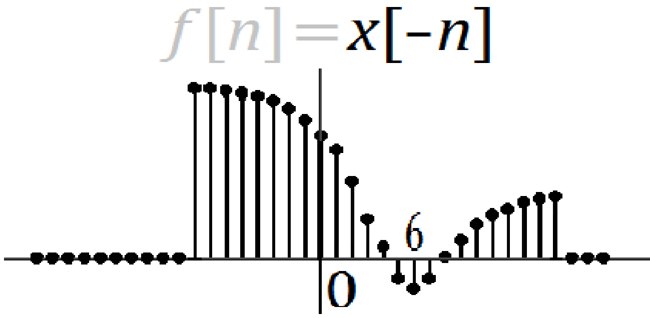


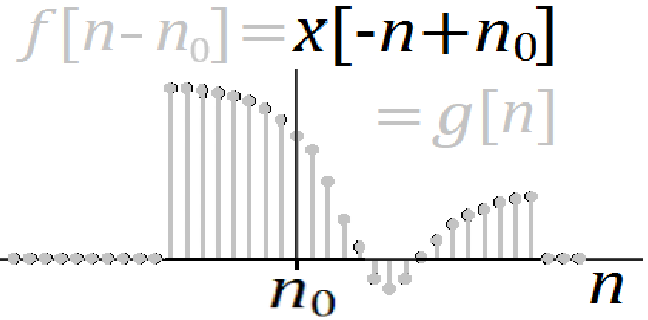
Inversión

Inversión y luego desplazamiento
($t_0 > 0$ atraso, $t_0 < 0$ adelanto)

Inversión y desplazamiento en el tiempo discreto







Inversión

Inversión y luego desplazamiento
($n_0 > 0$ atraso, $n_0 < 0$ adelanto)

Ejemplo de desplazamiento en el tiempo discreto

$$x[n] = \{\,1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 9\}$$

$$f[n] = x[n-1] = \{\,0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 9\}$$

$$f[n] = x[n-2] = \{\,0,\ 0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 9\}$$

Ejemplo de inversión y desplazamiento en el tiempo discreto

$$x[n] = \{\,1,\ 3,\ 4,\ 7\}$$

$$f[n] = x[-n] = \{\,7,\ 4,\ 3,\ \underset{\uparrow}{1},\ 0,\ 0,\ 0\}$$

$$g[n] = x[-n+1] = \{\,0,\ 7,\ 4,\ \underset{\uparrow}{3},\ 1,\ 0,\ 0\}$$

$$g[n] = x[-n+2] = \{\,0,\ 0,\ 7,\ \underset{\uparrow}{4},\ 3,\ 1,\ 0\}$$

$$g[n] = x[-n+3] = \{\,0,\ 0,\ 0,\ \underset{\uparrow}{7},\ 4,\ 3,\ 1\,\}$$

$$g[n] = x[-n+4] = \{\,0,\ 0,\ 0,\ \underset{\uparrow}{0},\ 7,\ 4,\ 3,\ 1\}$$

La integral y la derivada de una señal continua son las definidas en el cálculo diferencial e integral.

La suma de $x[n]$ en el intervalo $a \le n \le b$ se define como:

$$\sum_{n=a}^{b} x[n] = x[a] + x[a+1] + x[a+2] \cdots x[b-1] + x[b]$$

Suma útil:

$$\sum_{n=0}^{N} b^n = \frac{1 - b^{N+1}}{1 - b} \quad \text{con} \quad b \in \mathbb{C} \quad b \neq 0 \text{ y } b \neq 1 \qquad (a)$$

La diferencia hacia atrás de $x[n]$ se define como la secuencia:

$$\nabla x[n] = \frac{\Delta x}{\Delta n} = x[n] - x[n-1]$$

Integral de convolución

La operación convolución entre cualesquiera señales $f(t)$ y $g(t)$, da como resultado otra señal y se define como:

$$y(t) = f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, g(t-\tau) d\tau \qquad (1)$$

Suma de convolución

La operación convolución entre cualesquiera secuencias $f[n]$ y $g[n]$, da como resultado otra secuencia y se define como:

$$y[n] = f[n] * g[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f[k] g[n-k] \qquad (2)$$

Propiedades de la convolución

Para cualesquiera señales (o secuencias) $x_1,\ x_2,\ x_3,$ y constantes $\alpha,\ \beta,\ t_0 \in \mathbb{R}$ y $n_0 \in \mathbb{Z}$; la convolución tiene las propiedades:

1) Conmutativa $\quad x_1 * x_2 = x_2 * x_1$

2) Asociativa $\quad (\ x_1 * x_2\ ) * x_3 = x_1 * (\ x_2 * x_3)$

3) Distributiva $\quad x_1 * (x_2 + x_3) = x_1 * x_2 + x_1 * x_3$

4) Asociativa con el escalamiento en amplitud

$$(\alpha x_1) * (\beta x_2) = \alpha\beta(x_1 * x_2)$$

5) Desplazamiento con el impulso unitario desplazado

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

$$x[n] * \delta[n - n_0] = x[n - n_0]$$

Ejemplo

Para las funciones $f(t) = e^{-t^2}$ y $g(t) = \delta(t+4) + \delta(t-4)$, obtener $y(t) = f(t) * g(t)$.

Solución

$$y(t) = f(t) * g(t) = e^{-t^2} * \big(\delta(t+4) + \delta(t-4)\big)$$

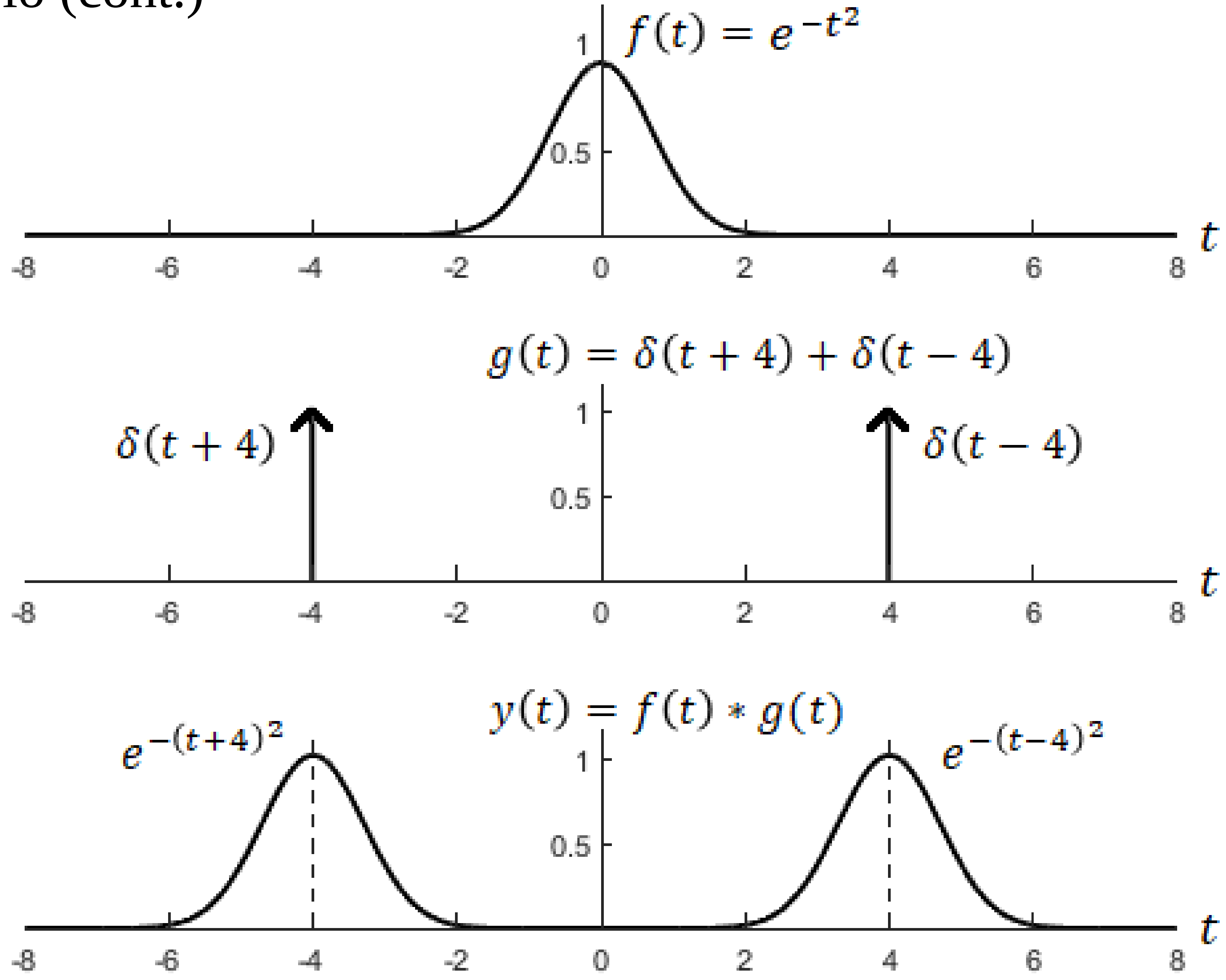
Por la propiedad distributiva de la convolución se tiene que:

$$y(t) = e^{-t^2} * \delta(t+4) + e^{-t^2} * \delta(t-4)$$

Por la prop. de desplazamiento con el impulso unitario se tiene que:

$$y(t) = e^{-(t+4)^2} + e^{-(t-4)^2}$$

Ejemplo (cont.)



Fundamentos de muestreo

Muestreo es el proceso de convertir una señal $x_c(t)$, en su representación mediante una secuencia $x[n]$. Con muestreo periódico, $x[n]$ se obtiene al tomar muestras de $x_c(t)$ cada T segundos, así:

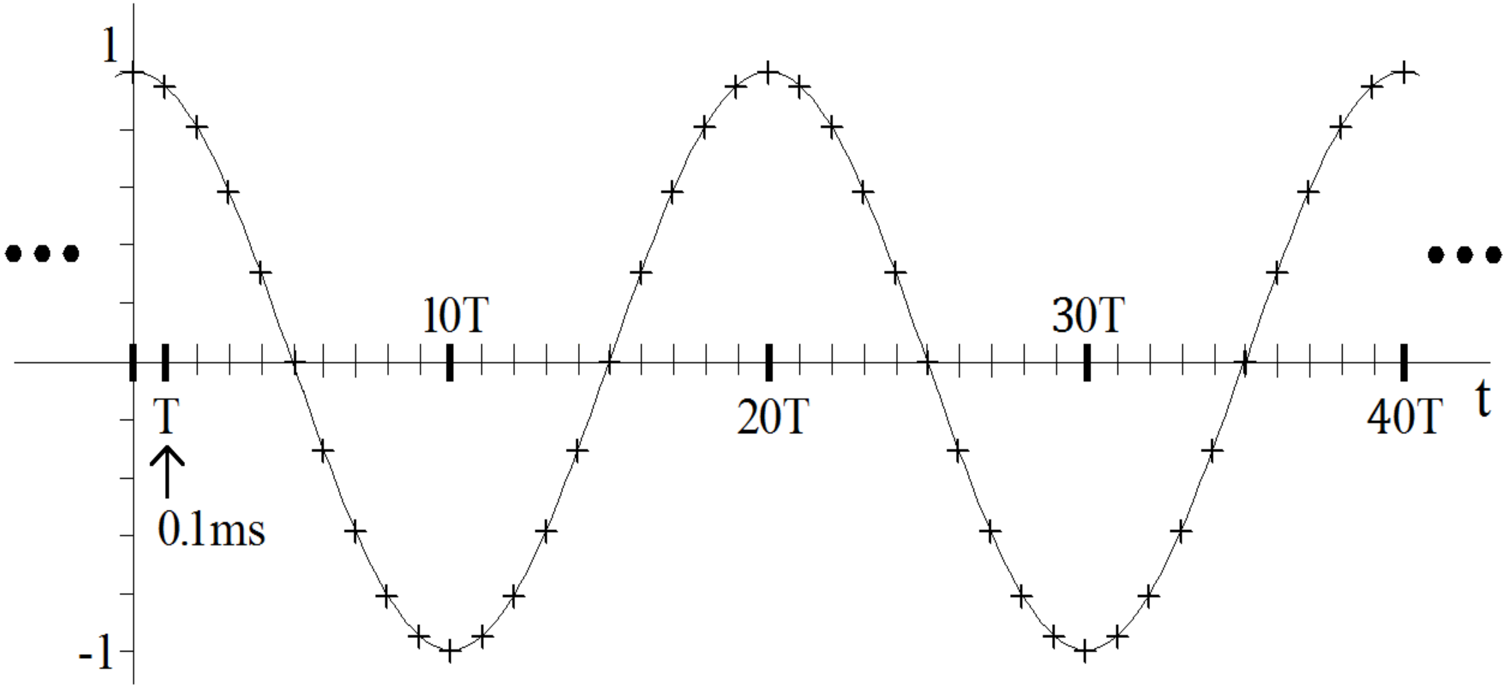
$$x[n] = x_c(nT), \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z}$$

A T, en segundos, se le denomina periodo de muestreo. $F_s = 1/T$ es la frecuencia de muestreo medida en muestras/segundo o Hertz.

Teorema de Muestreo: Si la frecuencia más alta contenida en una señal $x_c(t)$ es F_{max}, y la señal se muestrea con $F_s > 2F_{max}$, entonces $x_c(t)$ puede ser reconstruida exactamente a partir de sus muestras $x[n]$, mediante interpolación ideal (solo posible en teoría).

Ejemplo de muestreo de una señal sinusoidal

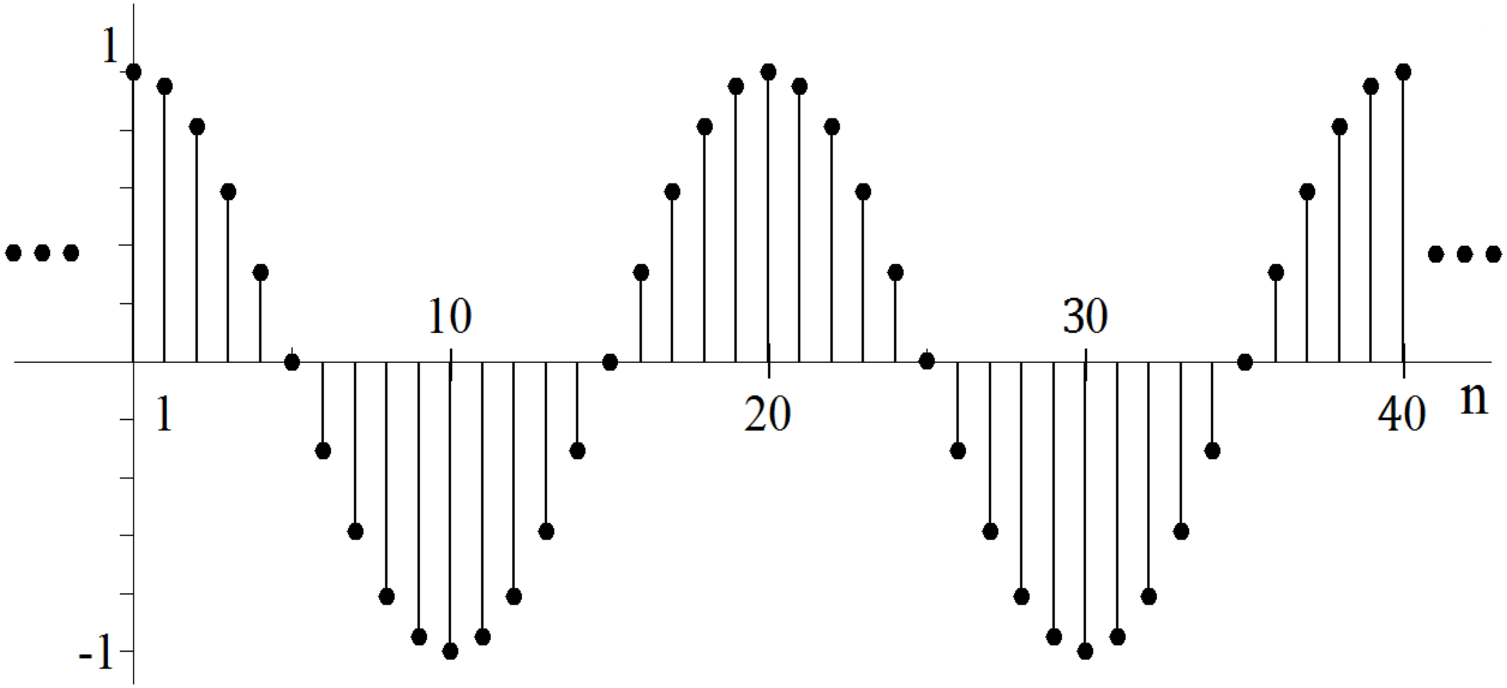
$$x_c(t) = \cos(2\pi 500 t)$$



Considerando la fig. anterior, si se toman muestras de la señal $x_c(t)$ cada $T = \frac{1}{10000}$ $[s]$ (es decir, si se toman $F_s = \frac{1}{T} = 10000 \left[\frac{muestras}{s}\right]$);

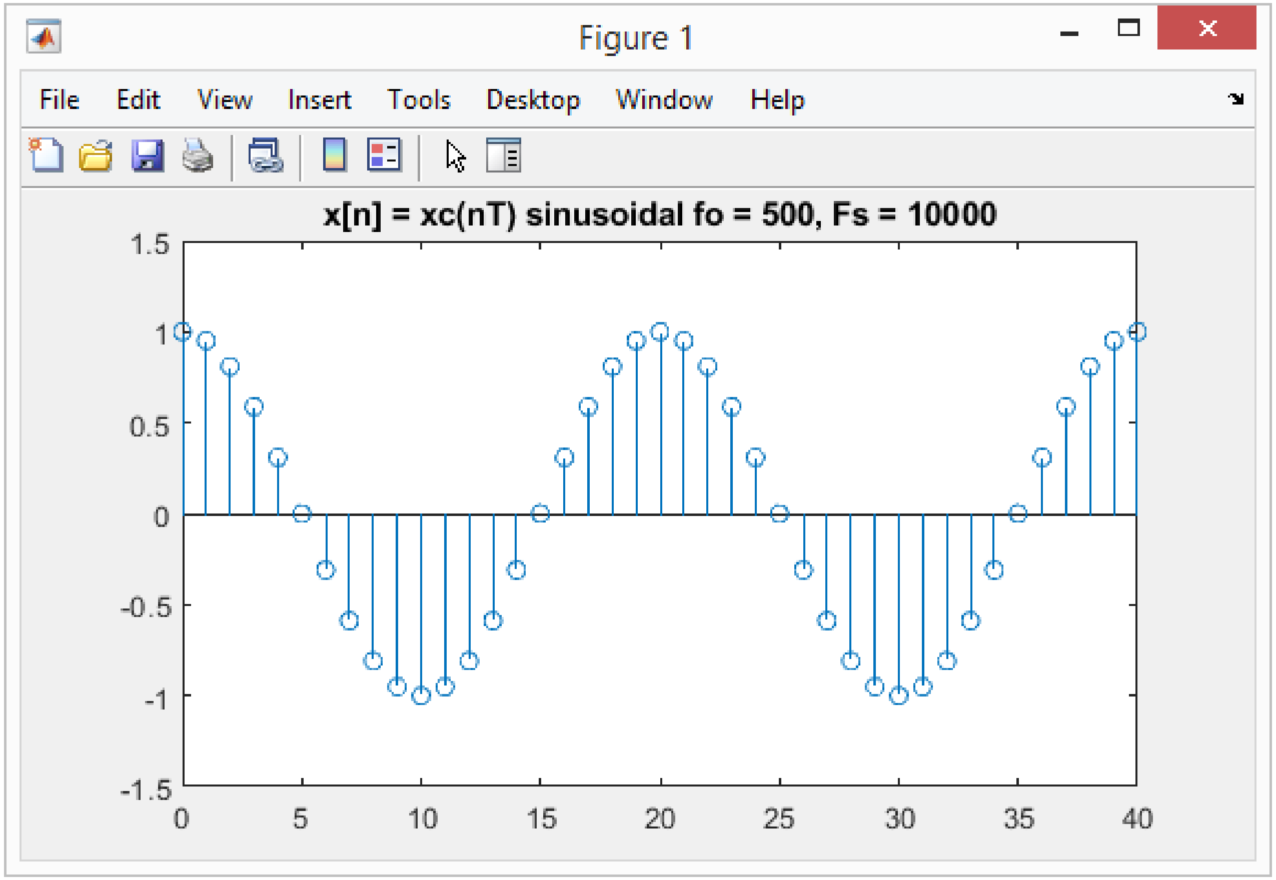
entonces se obtiene la secuencia:

$$x[n] = x_c(nT) = \cos\left(2\pi 500\left(n\frac{1}{10000}\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{10}n\right)$$



En este caso $F_{max} = 500\,$[Hz] y $F_s = 10000\,$[Hz]. Como $F_s > 2F_{max}$, de acuerdo con teorema de muestreo, $x_c(t)$ puede ser reconstruido exactamente a partir de su secuencia de muestras $x[n]$.

```matlab
%*********************************************************************
%        MUESTREO DE UNA SEÑAL SINUSOIDAL UTILIZANDO MATLAB
%*********************************************************************
Fs = 10000;                    %Frec de muestreo    [muestras/segundo]
T = 1/Fs;                      %Periodo de muestreo [segundos]
tseg = 10;                     %Tiempo a manejar    [segundos]
Lx = round( tseg*Fs );         %Cantidad de muestras necesarias
n = 0:1:Lx-1;                  %Arreglo con indices de tiempo discreto

f0 = 500;                      %Frecuencia en Hz de xc(t)
phi = 0;                       %Fase en radianes de xc(t)
x = 1*cos(  (2*pi*f0)*(n*T) + phi );    % x[n] = xc(nT)
%***********************grafica de la señal*************************
figure
stem(n,x)
xlim( [0, 40] )        %Limita el intervalo a despelgar de x[n]=xc(nT)
ylim( [-1.5,1.5] )
str = sprintf('x[n] = xc(nT) sinusoidal fo = %.0f, Fs = %.0f',f0,Fs);
title(str)
%**********************reproducción de x[n]*************************
%La tarjeta de sonido de la PC interpola la secuencia x[n] = xc(nT)
player = audioplayer(x,Fs);%para obtener y reproducir la señal xr(t)
playblocking(player);       %que es aproximadamente igual a xc(t)
%*********************************************************************
```



$$x_c(t) = \cos(2\pi f_0 t)\,, \quad f_0 = 500[\text{Hz}] \quad y \quad Fs = 10[\text{kHz}]$$

Aliasing

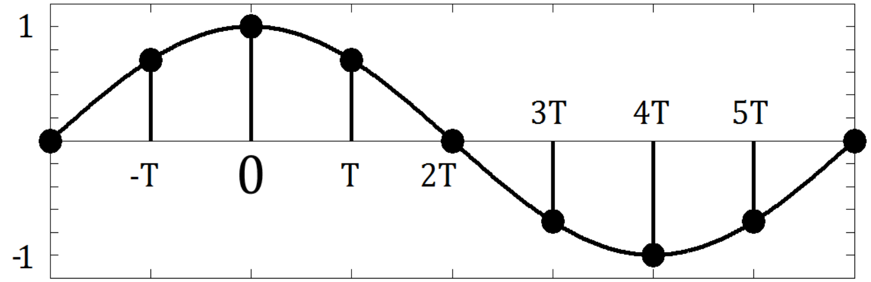
Cuando no se cumple con el teorema de muestreo se produce el fenómeno de aliasing. Este fenómeno causa que señales continuas distintas se vuelvan indistinguibles cuando se representan mediante una secuencia de muestras.

$$F_s = 8000[Hz], \quad T = 125[\mu s]$$

$$f_0 < F_s/2$$

$$x_{0c}(t) = \cos(2\pi 1000 t)$$

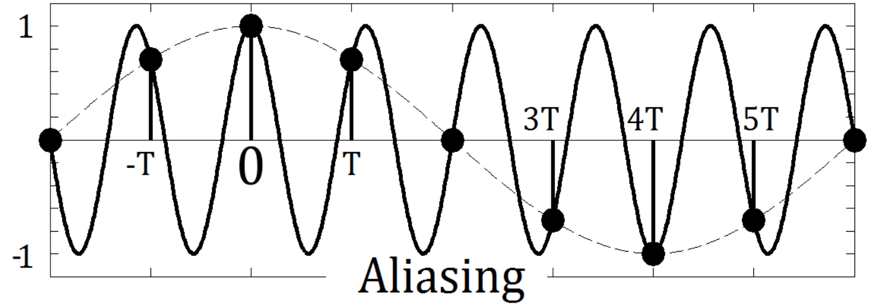
$$x_0[n] = x_{0c}(nT) = \cos\left(\frac{\pi}{4} n\right)$$



$$f_1 > F_s/2$$

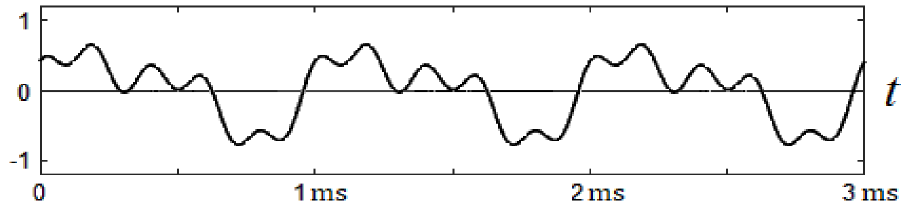
$$x_{1c}(t) = \cos(2\pi 7000 t)$$

$$x_1[n] = x_{1c}(nT) = x_0[n]$$

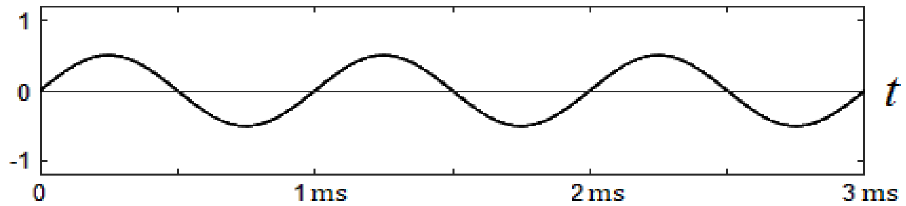


Ejemplo

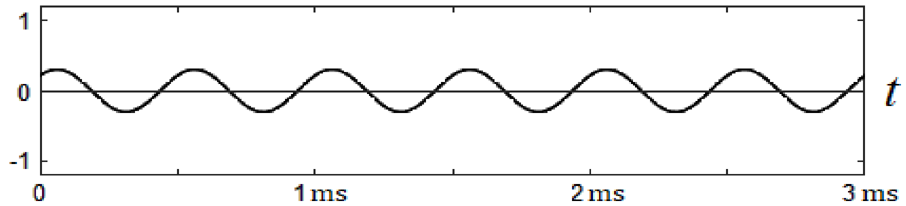
$$x_c(t) = x_0(t) + x_1(t) + x_2(t)$$



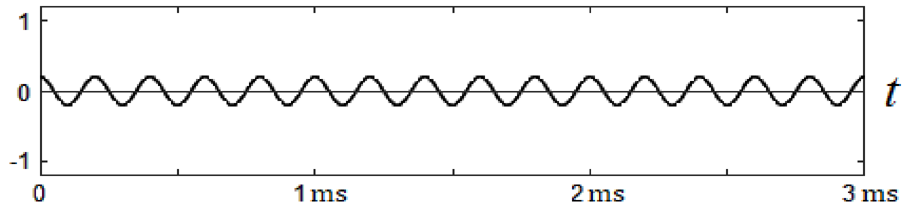
$$x_0(t) = 0.5\cos(2\pi F_0 t - \pi/2)$$
$$F_0 = 1000$$



$$x_1(t) = 0.3\cos(2\pi F_1 t - \pi/4)$$
$$F_1 = 2000$$



$$x_2(t) = 0.2\cos(2\pi F_2 t)$$
$$F_2 = 5000$$



En esta figura $F_{max} = 5000$, entonces debe cumplirse que $F_s > 10000$ para que $x_c(t)$ pueda ser reconstruida a partir de $x[n]$.

Ejemplo (continuación)

$x_c(t)$

$F_{max} = 5000$

Teorema de muestreo

$F_s > 10000$

$x[n] = x_c(nT)$

$F_s = \ 20000 \ > 2F_{max}$

No hay aliasing

$x[n] = x_c(nT)$

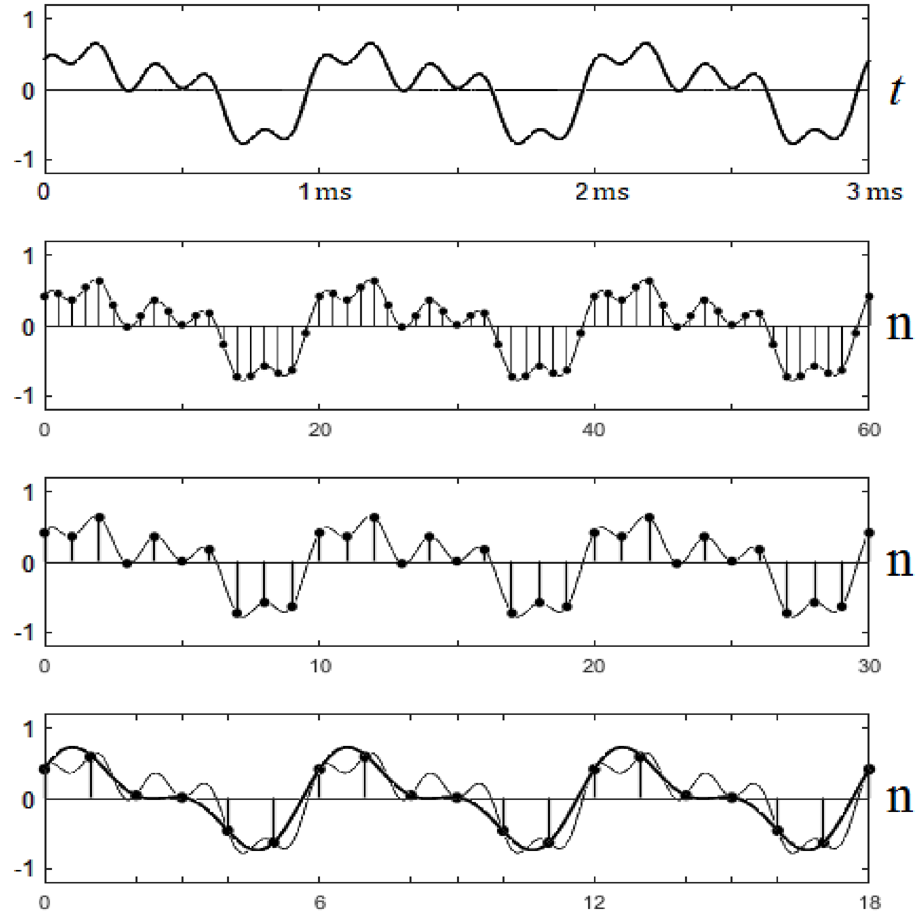
$F_s = 10000.1 > 2F_{max}$

No hay aliasing

$x[n] = x_c(nT)$

$F_s = \ 6000 < 2F_{max}$

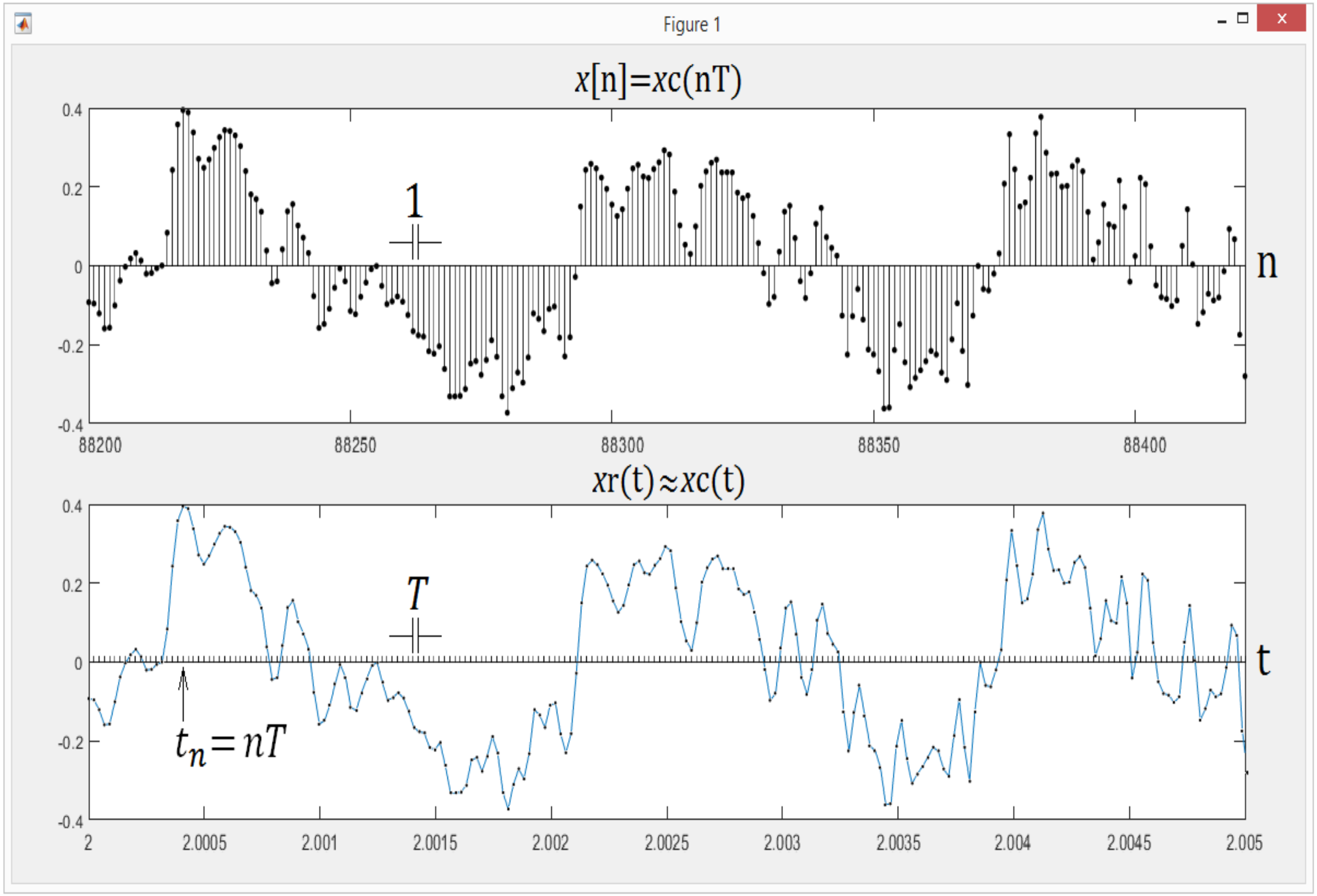
Si hay aliasing



$x[n] = x_c(nT)$ son las muestras de $x_c(t)$ tomadas a una tasa de F_s[Hz],
Cuando $F_s > 2F_{max}$, $x_c(t)$ puede ser reconstruido a partir de $x[n]$.

```
[xLR,Fs] = audioread('x_kitt.wav');              %formato wav,mp3,m4a
x = mean(xLR,2).';   %obtención x[n]=xc(nT) monoaural. 2=>prom cols

Lx = length(x);                     %num de muestras en x[n]
n = 0:1:Lx-1;                       %Arreglo de indices de tiempo discreto
t1 = 2;                             %Instante inicial a desplegar en [seg]
t2 = t1 + 5/1000;                   %Instante final a desplegar en [seg]
figure
subplot(2,1,1)
stem(n,x,'filled','k','MarkerSize',3,'LineWidth',1)
xlim( round([t1,t2]*Fs) )           %Limita grafica al intervalo [n1,n2]
title('x[n] = xc(nT)')
subplot(2,1,2)
plot( n*(1/Fs), x )                 %T=1/Fs Periodo de muestreo en [seg]
xlim( [t1,t2] )                     %Limita grafica al intervalo [t1,t2]
title('xr(t)')

%La tarjeta de sonido interpola a:
player = audioplayer( x, Fs );
playblocking(player);                     %x[n] para reproducir xr(t)
```

Código de Matlab para leer $x[n] = x_c(nT)$ de un archivo de audio.



5ms de una señal de audio con $F_{max} = 20\,\text{kHz}$ y $Fs = 44.1\,\text{kHz}$

Sistemas continuos y sistemas discretos

Sistema

Un sistema es una interconexión de componentes, que transforma señales de entrada en señales de salida. Este curso se enfoca en sistemas de 1 entrada y 1 salida (o respuesta).

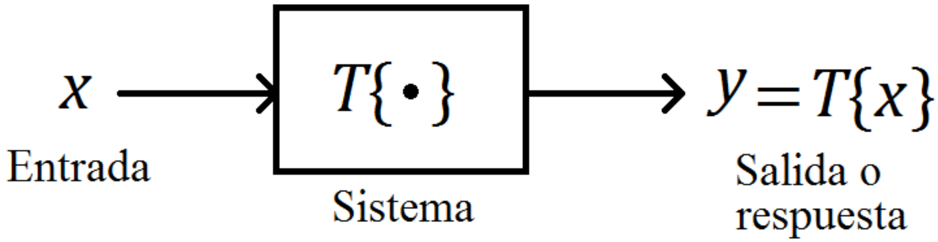


Figura. Representación entrada-salida de un sistema *T*.

- Sistema continuo: $x(t)$ e $y(t)$ son señales de TC.
- Sistema discreto: $x[n]$ e $y[n]$ son señales de TD.

Principales propiedades de los sistemas

- Linealidad

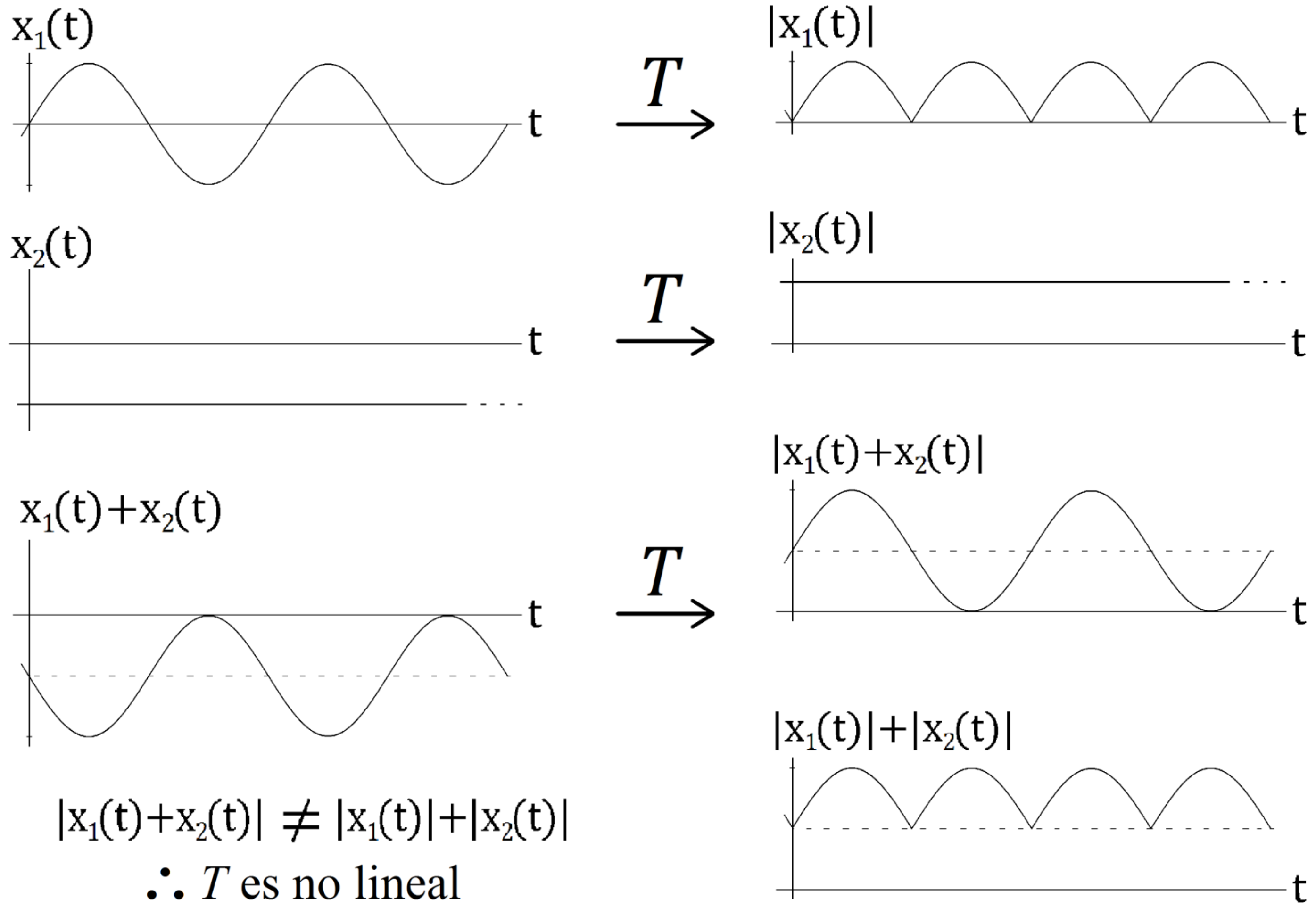
Un sistema continuo (o discreto) T es lineal, si y sólo si cumple con el principio de superposición:

$$T\{\, a_1 x_1 + a_2 x_2 \,\} = a_1 T\{x_1\} + a_2 T\{x_2\}$$

Para cualesquiera señales (o secuencias) de entrada x_1 y x_2, y cualesquiera constantes arbitrarias a_1 y a_2.

Ejemplo

Verificar que el sistema $T\{x(t)\} = |x(t)|$ no es lineal:



$$|x_1(t)+x_2(t)| \neq |x_1(t)|+|x_2(t)|$$

$\therefore$ T es no lineal

- Invariancia en el tiempo

Un sistema T continuo es invariante en el tiempo, si y sólo si

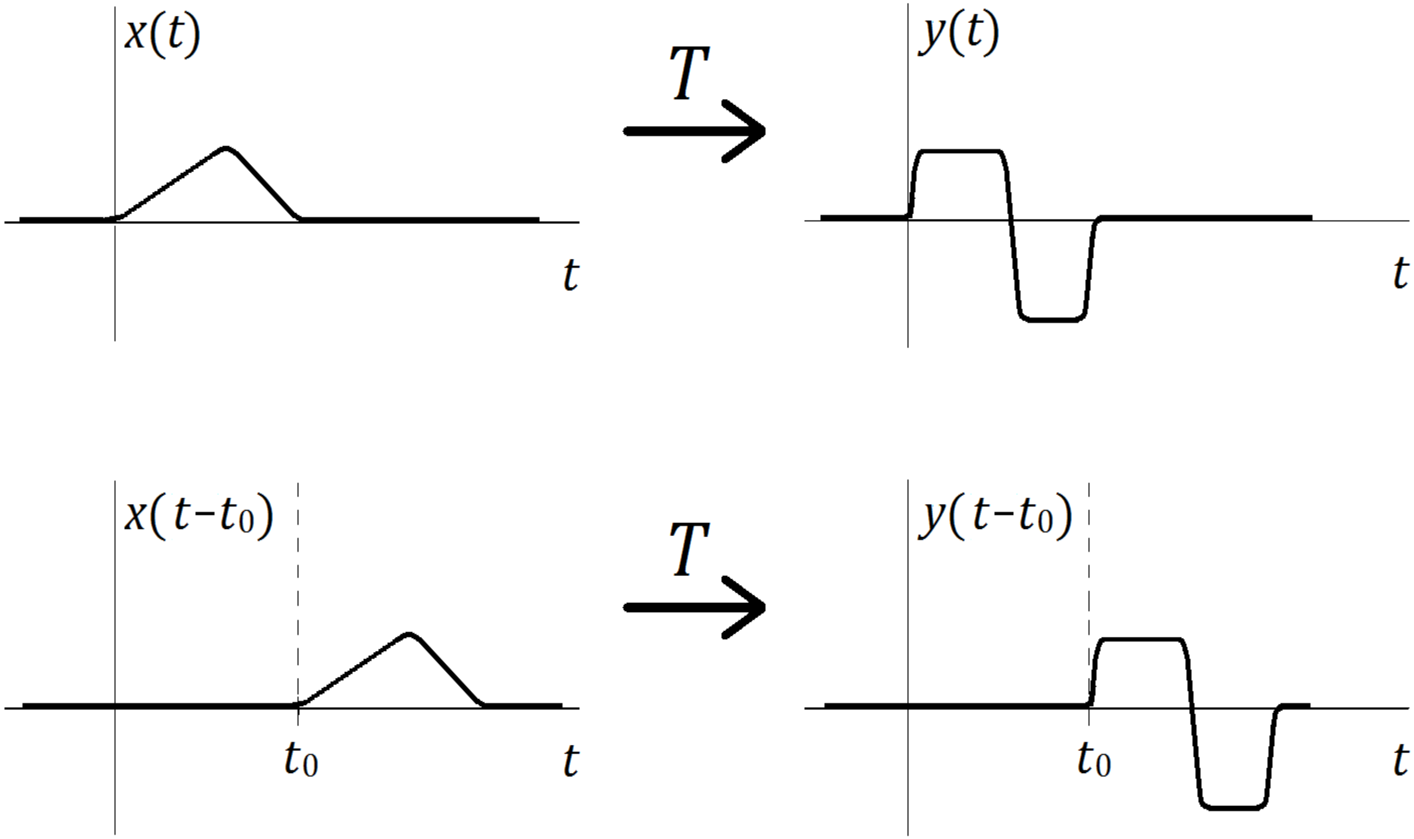
$$T\{\, x(t) \,\} = y(t) \quad \Longrightarrow \quad T\{\, x(t-a) \,\} = y(t-a)$$

para toda señal de entrada $x(t)$ y todo desplazamiento $a \in \mathbb{R}$ en el tiempo.

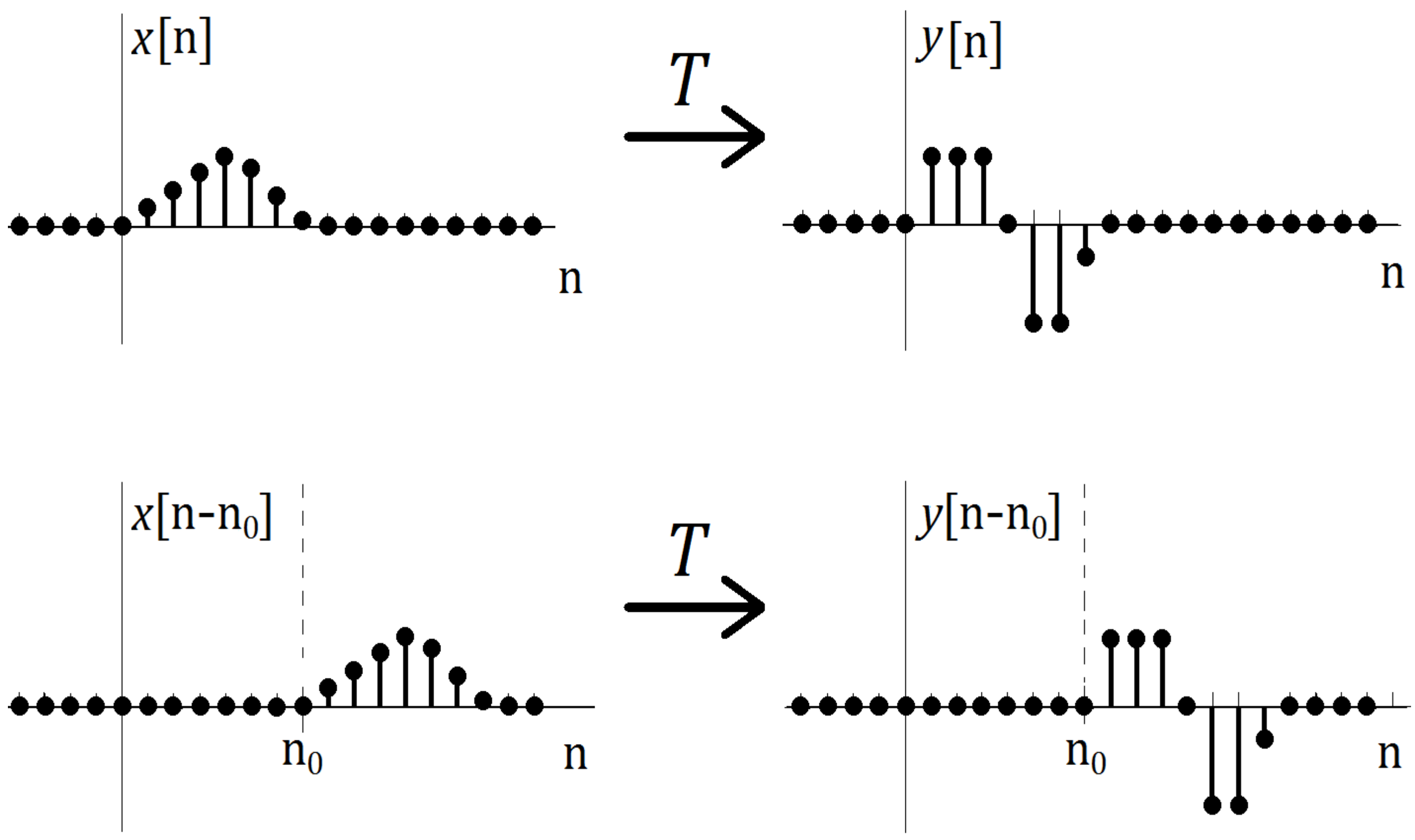
Un sistema T discreto es invariante en el tiempo, si y sólo si

$$T\{\, x[n] \,\} = y[n] \quad \Longrightarrow \quad T\{\, x[n-k] \,\} = y[n-k]$$

para toda secuencia de entrada $x[n]$ y todo desplazamiento $k \in \mathbb{Z}$ en el tiempo.



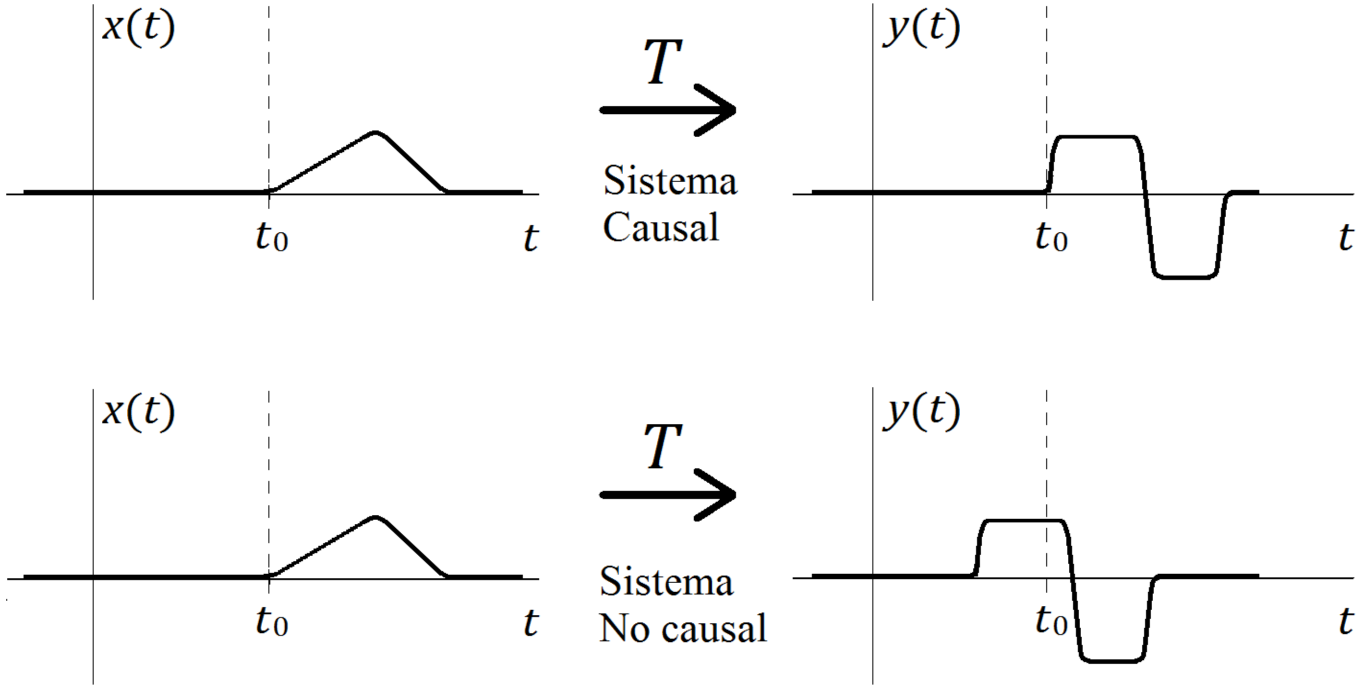
Invarianciа en el tiempo continuo



Invariancia en el tiempo discreto

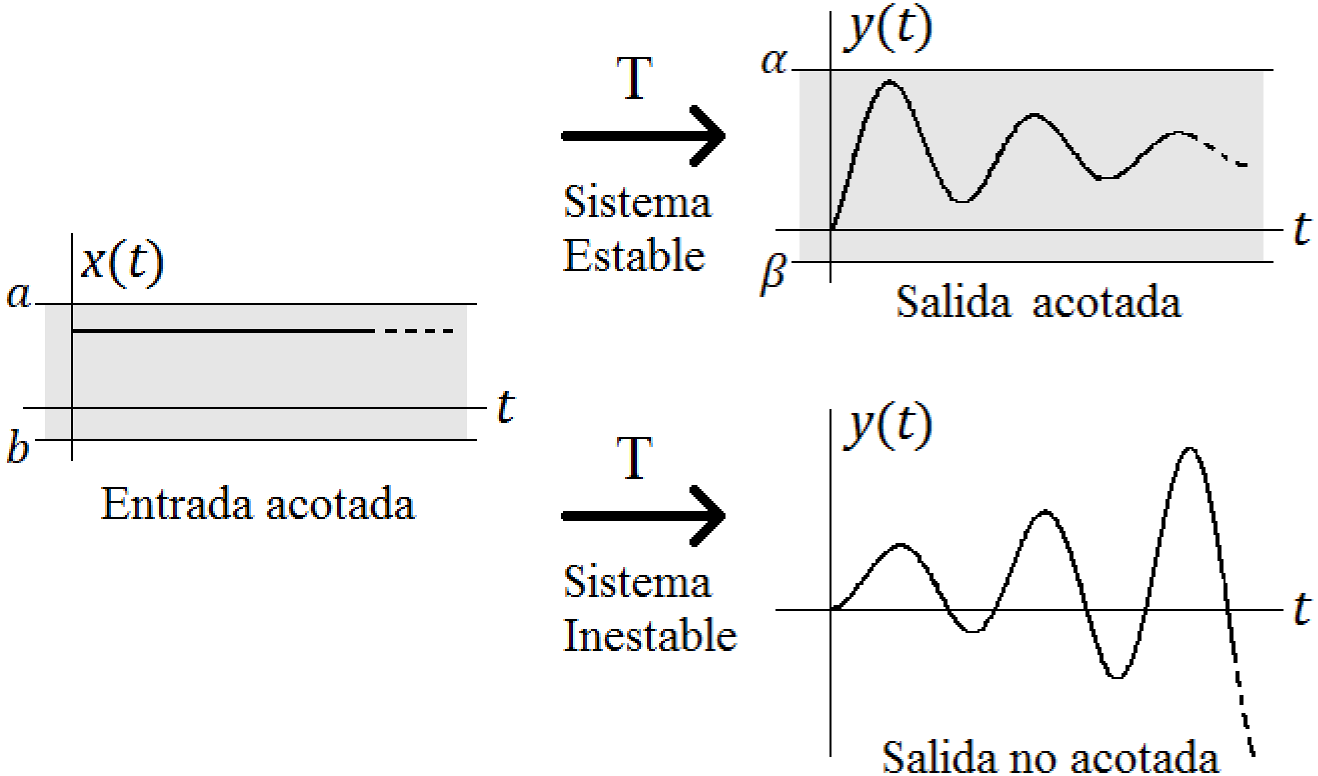
- Causalidad

Un sistema causal o no anticipativo es aquel responde después de que se presenta la señal de entrada y no antes.



- Estabilidad

Un sistema es estable en el sentido de entrada acotada-salida acotada (estable BIBO), si toda entrada acotada produce una salida acotada.



2. SISTEMAS LINEALES E INVARIANTES EN EL TIEMPO

- Definición

Un sistema lineal e invariante en el tiempo (sistema LTI) continuo o discreto es aquel que posee las propiedades de linealidad e invariancia en el tiempo. De aquí en adelante, el curso se enfocará en el análisis de este tipo de sistemas.

Modelado de sistemas LTI en el dominio del tiempo

Se puede demostrar que las características de cualquier sistema LTI están completamente determinadas por su respuesta al impulso unitario (denominada $h(t)$ en el caso continuo y $h[n]$ en el caso discreto):

Sistema LTI continuo

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$y(t) = x(t) \underbrace{* \, h(t)}_{T}$$

Sistema LTI discreto

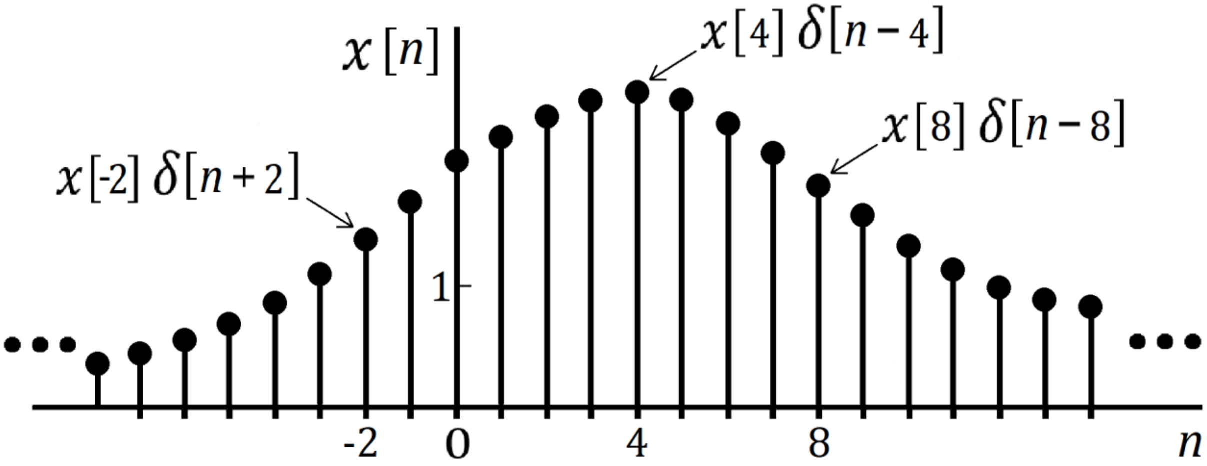
$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

$$y[n] = x[n] \underbrace{* \, h[n]}_{T}$$

Demostración de $y[n] = x[n] * h[n]$ para un sistema LTI discreto

Cualquier secuencia $x[n]$ se puede representar como una combinación lineal de impulsos unitarios desplazados $\delta[n-k]$:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta\,[n-k]$$



Sea un sistema discreto LTI con regla de correspondencia $T\{\cdot\}$, y con respuesta al impulso $h[n]=T\{\delta[n]\}$. La respuesta del sistema T a una secuencia $x[n]$ cualquiera está dada por:

$$y[n] = T\{x[n]\} = T\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta[n-k]\right\},$$

como T es un sistema lineal se tiene que

$$T\{x[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,T\{\,\delta[n-k]\,\},$$

como T es un sistema invariante con respuesta al impulso $h[n]$,

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,h[n-k] = x[n] * h[n] \qquad \text{Q. E. D.}$$

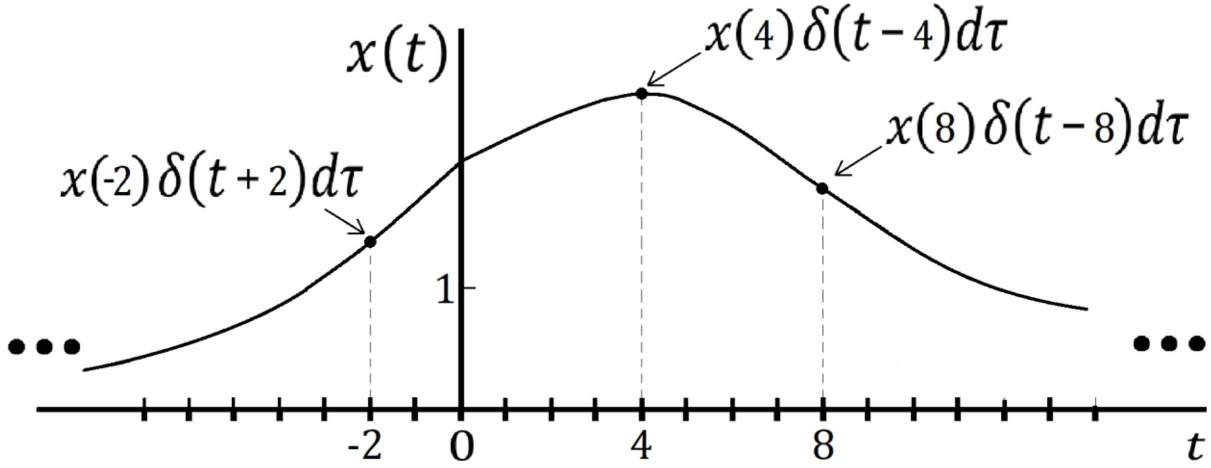
De la ecuación anterior se tiene que $T\{\cdot\} = * h[n]$

Nótese que $T\{\delta[n]\} = \delta[n] * h[n] = h[n]$, como era de esperarse.

Demostración de $y(t) = x(t) * h(t)$ para un sistema LTI continuo

Cualquier señal $x(t)$ se puede representar como una combinación lineal de "pulsos unitarios" desplazados $\delta(t-\tau)d\tau$, de ancho infinitesimal:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)d\tau$$



Sea un sistema continuo LTI con regla de correspondencia $T\{\cdot\}$, y con respuesta al impulso $h(t) = T\{\delta(t)\}$. La respuesta del sistema T a una señal $x(t)$ cualquiera está dada por:

$$y(t) = T\{x(t)\} = T\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right\},$$

como T es un sistema lineal se tiene que

$$T\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)T\{\delta(t-\tau)\}\, d\tau,$$

como T es un sistema invariante con respuesta al impulso $h(t)$,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t) \qquad \text{Q.E.D.}$$

De la ecuación anterior se tiene que $T\{\cdot\} = * h(t)$

Nótese que $T\{\delta(t)\} = \delta(t) * h(t) = h(t)$, como era de esperarse.

Ejemplo

Dado un sistema LTI con respuesta al impulso $h(t) = 2e^{-2t}u(t)$, determinar la respuesta del sistema a la entrada $x(t) = u(t)$.

Solución

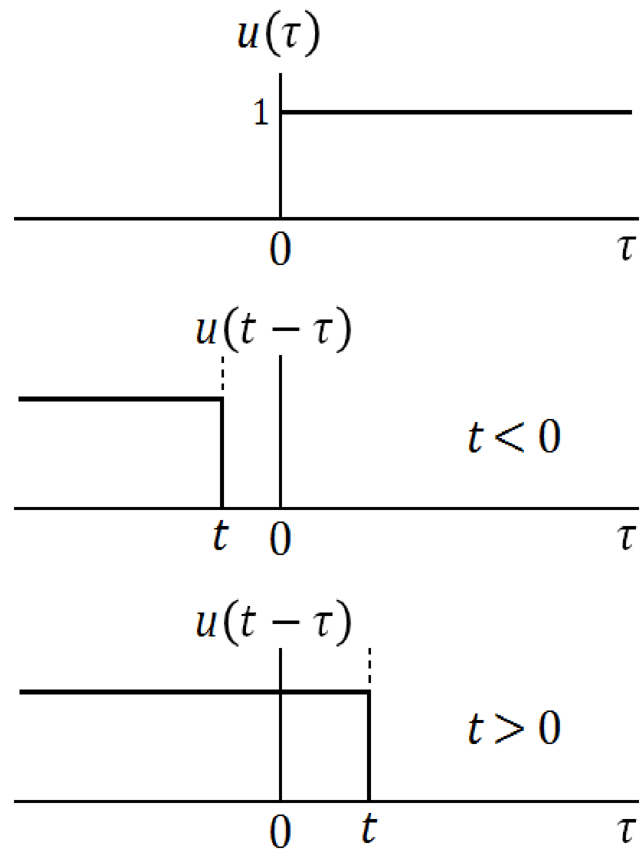
$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} 2e^{-2\tau}u(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2e^{-2\tau}\,0d\tau = 0 \;\text{ para }\; t < 0$$

$$y(t) = \int_{0}^{t} 2e^{-2\tau}\,1d\tau \;\;\text{ para }\;\; t \geq 0$$

$$= [-e^{-2\tau}]_{\tau=0}^{t} \;= -e^{-2t} + 1$$



Finalmente: $y(t) = [1 - e^{-2t}]u(t)$ para $-\infty < t < +\infty$

Ejemplo (continuación)
Dado un sistema LTI con respuesta al impulso $h[n] = 0.5^n u[n]$, determinar la respuesta del sistema a la entrada $x[n] = u[n]$.

Solución

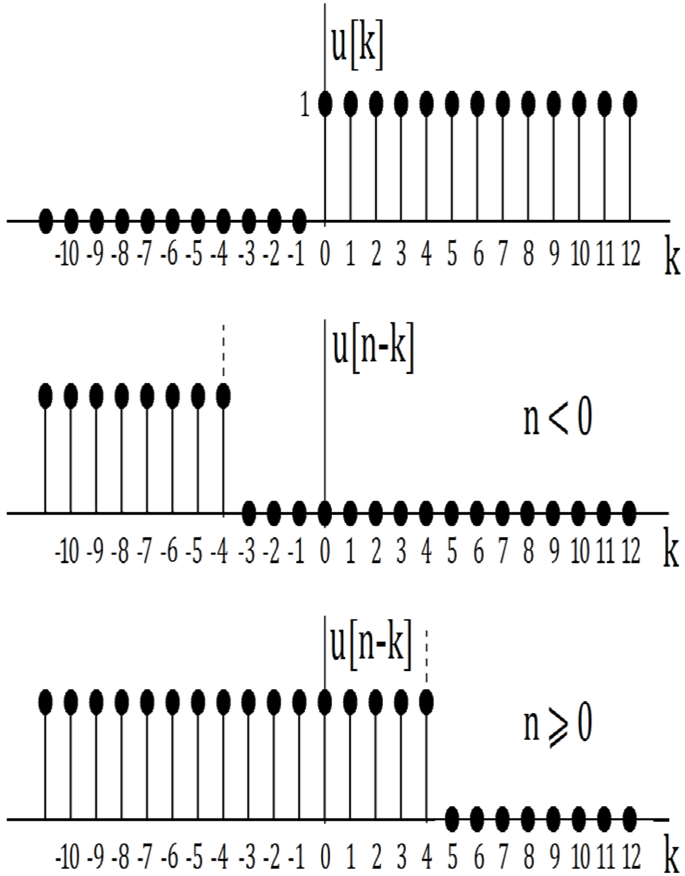
$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 0.5^k u[k]u[n-k]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 0.5^k 0 = 0 \quad \text{para} \quad n < 0$$

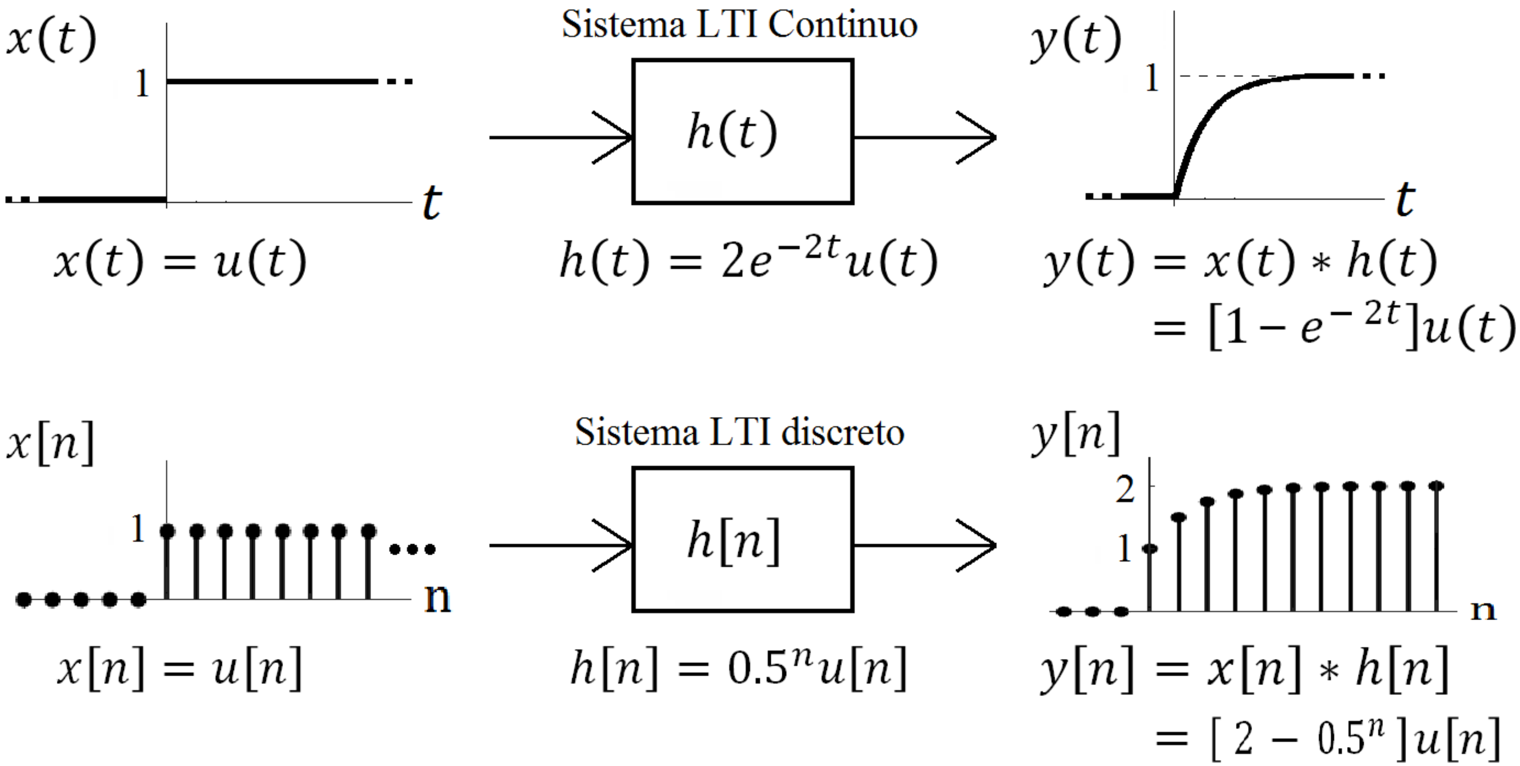
$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} 0.5^k = \frac{1-0.5^{n+1}}{1-0.5} \quad n \geq 0$$

$$= 2[1-0.5(0.5^n)] \ \text{para} \ n \geq 0$$



Finalmente: $y[n] = [2 - 0.5^n]u[n]$ para $-\infty < n < +\infty$

Ejemplo (continuación)



En el tema 3, utilizando la transformada de Laplace (transformada Z), se verá un método muy eficiente para determinar $y(t) = x(t) * h(t)$ ($y[n] = x[n] * h[n]$).

Para la respuesta de un sistema LTI continuo o discreto se tiene que:

$$y = y_p + y_h$$

y_p es la respuesta permanente del sistema y persiste mientras dure la entrada.
y_h es la respuesta transitoria del sistema y tiende a 0 conforme t ó n tiende a infinito, cuando el sistema es estable.

Ejemplo
Para las respuestas de los sistemas LTI en el ejemplo anterior se tiene que:

$$y(t) = \underbrace{u(t)}_{y_p(t)} + \underbrace{-e^{-2t}u(t)}_{y_h(t)}$$

$$y[n] = \underbrace{2u[n]}_{y_p[n]} + \underbrace{-0.5^{n}u[n]}_{y_h[n]}$$

Causalidad en términos de la respuesta al impulso

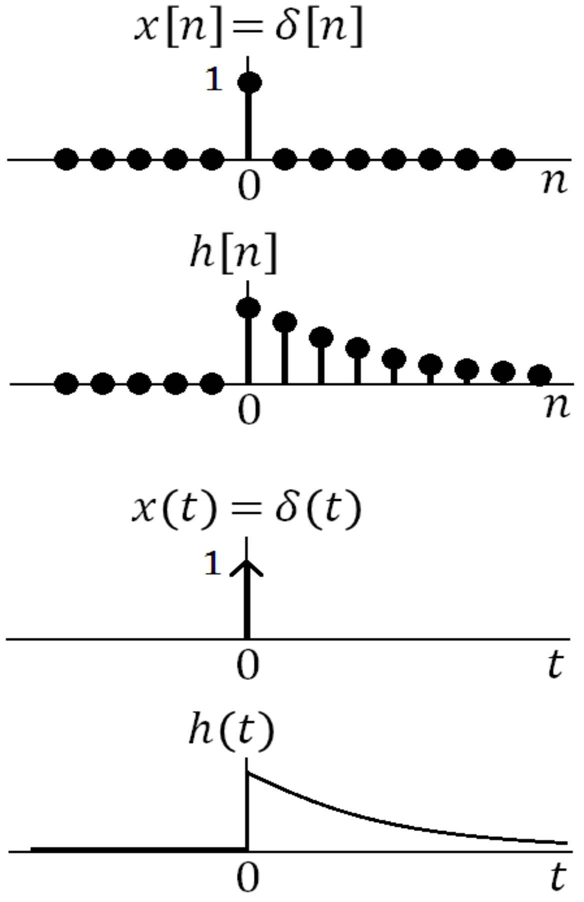
Para que un sistema LTI sea causal, su respuesta al impulso debe ser causal, i.e:

$$h[n] = 0, \text{ para } n < 0$$

en el caso discreto, y

$$h(t) = 0, \text{ para } t < 0$$

en el caso continuo.



Estabilidad en términos de la respuesta al impulso

Para que un sistema LTI sea estable (BIBO), en el caso discreto su respuesta al impulso, $h[n]$, debe ser absolutamente sumable:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty$$

Mientras que en el caso continuo su respuesta al impulso, $h(t)$, debe ser absolutamente integrable:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < \infty$$

En el tema 3 se verá un método muy eficiente para determinar la estabilidad de un sistema LTI, utilizando la T. de Laplace de $h(t)$ en el caso continuo, y utilizando la T. Z de $h[n]$ en el caso discreto.

Ejemplo

Determinar si es estable un sistema LTI con respuesta al impulso

$$h(t) = 2e^{-2t}u(t).$$

Solución

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |2e^{-2t}u(t)|dt = \int_{0}^{+\infty} 2e^{-2t}dt$$

$$= \lim_{\tau\to\infty} \int_{0}^{\tau} 2e^{-2t}dt = \lim_{\tau\to\infty} (-e^{-2t}) \Big|_{0}^{\tau} = \lim_{\tau\to\infty} (-e^{-2\tau} + 1)$$

$$B = 1 < \infty \quad \therefore \text{ el sistema es estable}$$

Ejemplo

Determinar si es estable un sistema LTI discreto con resp. al impulso

$$h[n] = 0.5^n u[n]$$

Sol.

$$B = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |0.5^n u[n]| = \sum_{n=0}^{+\infty} |0.5^n| = \sum_{n=0}^{+\infty} 0.5^n$$

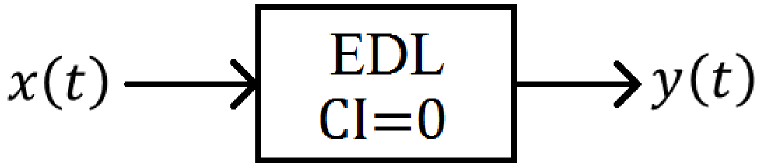
$$B = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} 0.5^n = \lim_{N\to\infty} \frac{1 - 0.5^{N+1}}{1 - 0.5} = \frac{1 - \lim_{N\to\infty}(0.5^{N+1})}{1 - 0.5}$$

Como $\lim_{N\to\infty} 0.5^{N+1} = 0$, entonces se tiene que

$$B = \frac{1}{1 - 0.5} = 2 < \infty \quad \therefore \text{ el sistema } h[n] \text{ es estable}$$

Sistemas LTI continuos representados mediante EDLs

Una ecuación diferencial lineal (EDL) de coeficientes constantes de orden N junto con condiciones iniciales nulas ($\mathrm{CI}=0$), también describe un sistema LTI causal:



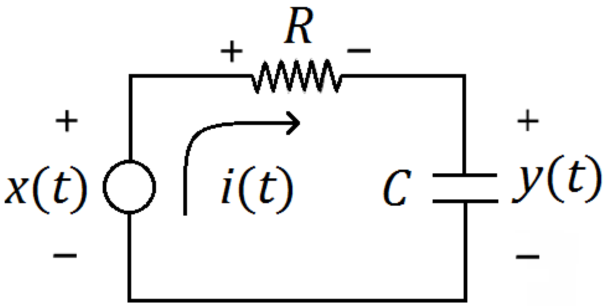
$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \tag{3}$$

$$\text{CI nulas} \qquad \frac{d^k y(0)}{dt^k} = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

En un sistema modelado por una EDL junto con CI$=0$, a $y(t)$ se le conoce como respuesta forzada del sistema.

Ejemplo

El siguiente sistema eléctrico (circuito RC)



$x(t)$: voltaje de entrada

$y(t)$: voltaje de salida

está modelado por la siguiente EDL de orden $N = 1$:

$$RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

Si $x(t) = 1u(t)$, al resolver la EDL anterior se obtiene la sol. general:

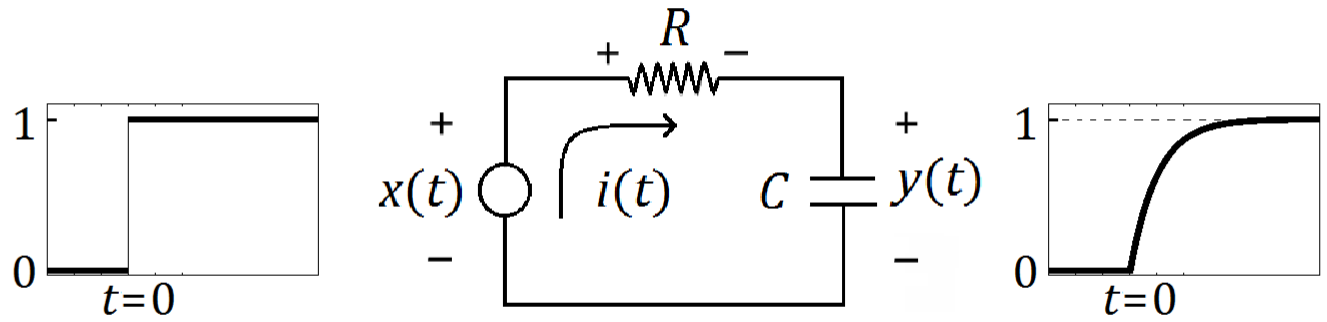
$$y(t) = [\ \underbrace{1}_{y_p(t)} + \underbrace{C_1 e^{-\frac{1}{RC}t}}_{y_h(t)}\ ]\, u(t)$$

Considerando CI nulas, i.e. $y(0) = 0$, de la ec. anterior se tiene que:

$$0 = 1 + C_1 e^{-\frac{1}{RC}0} \Rightarrow \; C_1 = -1$$

Con condiciones iniciales nulas, el circuito RC se comporta como un sistema LTI con respuesta al escalón:

$$y(t) = [1 - e^{-\frac{1}{RC}t}]\, u(t)$$



Sistemas discretos FIR

Son sistemas discretos LTI con respuesta al impulso de duración finita. En la práctica se implementan mediante la suma de convolución.

Ejemplo

Dado el sistema LTI FIR con respuesta al impulso $h[n]=\{4,2,1\}$, determinar la respuesta del sistema a la entrada $x[n]=\{1, 2, 3,5\}$.

Solución

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=0}^{Lh-1} h[k]x[n-k]$$

$$h[n] = \{4, 2, 1\} \text{ de } L_h = 3 \quad \text{y} \quad x[n] = \{1, 2, 3, 5\} \text{ de } L_x = 4,$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{L_h-1} h[k]x[n-k]$$

		k = -3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
	$h[k]$	0	0	0	4	2	1	0	0	0
n=0	$x[-k]$	5	3	2	1	0	0			
n=1	$x[1-k]$		5	3	2	1	0			
n=2	$x[2-k]$			5	3	2	1			
n=3	$x[3-k]$				5	3	2	1		
n=4	$x[4-k]$				0	5	3	2	1	
n=5	$x[5-k]$				0	0	5	3	2	1

para $0 \le k \le L_h - 1$

$$\underbrace{\text{h[k]}} \qquad \underbrace{x\text{[n-k]}}$$

$$y[0] = (4, 2, 1) \bullet (1, 0, 0) = 4$$

$$y[1] = (4, 2, 1) \bullet (2, 1, 0) = 10$$

$$y[2] = (4, 2, 1) \bullet (3, 2, 1) = 17$$

$$y[3] = (4, 2, 1) \bullet (5, 3, 2) = 28$$

$$y[4] = (4, 2, 1) \bullet (0, 5, 3) = 13$$

$$y[5] = (4, 2, 1) \bullet (0, 0, 5) = 5$$

Ly=Lh+Lx-1=6 y[n]={ 4, 10, 17, 28, 13, 5 }

```
function y = f_conv(h,x)   %Calcula y[n] = h[n]*x[n]
    Lh = length(h);         %Longitud de h[n]
    Lx = length(x);         %Longitud de x[n]
    Ly = Lx+Lh-1;           %Longitud de y[n]
    xn_k = zeros(1,Lh);     %xn_k = [0,...,0], de duración Lh
    x = [x,zeros(1,Lh-1)]; %x = [x[0],...,x[Lx-1], Lh-1 0s]
    y = zeros(1,Ly);        %y = [0,0,0,...,0]

    for n = 1 : 1 : Ly
        xn_k(1) = x(n);
        for k = 1 : 1 : Lh
            y(n) = y(n) + h(k)*xn_k(k);
        end
        for k = Lh :-1 : 2
            xn_k(k) = xn_k( k-1 );
        end
    end
end
```

Función en Matlab para calcular la convolución.

Sistemas discretos IIR

Son sistemas discretos LTI con respuesta al impulso de duración infinita. Un sistema IIR causal también se puede describir mediante una ecuación en diferencias lineal (EDL) de coeficientes constantes de orden $N > 0$, junto con condiciones iniciales nulas $(\mathrm{CI} = 0)$:

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{EDL}\\ \text{CI=0}\end{array}} \longrightarrow y[n]$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \qquad (4)$$

$$\text{CI nulas} \quad y[-1] = y[-2] = \cdots = y[-N] = 0$$

Con $N > 0$, la ec. (4) puede reescribirse <u>en su forma recursiva</u> como:

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left(\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]\right), \qquad (5)$$

La ecuación (5) expresa el valor de la salida en el instante n, en función de la señal de entrada y de N valores previos de la señal de salida.

En la práctica, los sistemas IIR se implementan mediante ecuaciones en diferencias en su forma recursiva.

Ejemplo

Para el sistema LTI descrito por la EDL de orden 2

$$y[n] - 2y[n-1] + 4y[n-2] = 2x[n] + 5x[n-1] - 3x[n-2]$$

Considerando la entrada $x[n] = \{ 1, 2, 3 \}$, obtener $y[n]$ para n = 0, 1, 2, 3, 4.

Sol.

Primero se reescribe la ec. en diferencias en su forma recursiva:

$$y[n] = 2x[n] + 5x[n-1] - 3x[n-2] + 2y[n-1] - 4y[n-2]$$

Como el sistema es LTI se consideran CI nulas: $y[-1] = y[-2] = 0$.

Entonces se procede a obtener $y[n]$ para n = 0, 1, 2, 3, 4:

$$y[n] = 2x[n] + 5x[n-1] - 3x[n-2] + 2y[n-1] - 4y[n-2]$$

$$\begin{aligned} y[0] &= 2x[0] + 5x[-1] - 3x[-2] + 2y[-1] - 4y[-2] \\ &= 2\times 1 + 5\times 0 - 3\times 0 + 2\times 0 - 4\times 0 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y[1] &= 2x[1] + 5x[0] - 3x[-1] + 2y[0] - 4y[-1] \\ &= 2\times 2 + 5\times 1 - 3\times 0 + 2\times 2 - 4\times 0 = 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y[2] &= 2x[2] + 5x[1] - 3x[0] + 2y[1] - 4y[0] \\ &= 2\times 3 + 5\times 2 - 3\times 1 + 2\times 13 - 4\times 2 = 31 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y[3] &= 2x[3] + 5x[2] - 3x[1] + 2y[2] - 4y[1] \\ &= 2\times 0 + 5\times 3 - 3\times 2 + 2\times 31 - 4\times 13 = 19 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y[4] &= 2x[4] + 5x[3] - 3x[2] + 2y[3] - 4y[2] \\ &= 2\times 0 + 5\times 0 - 3\times 3 + 2\times 19 - 4\times 31 = -95 \end{aligned}$$

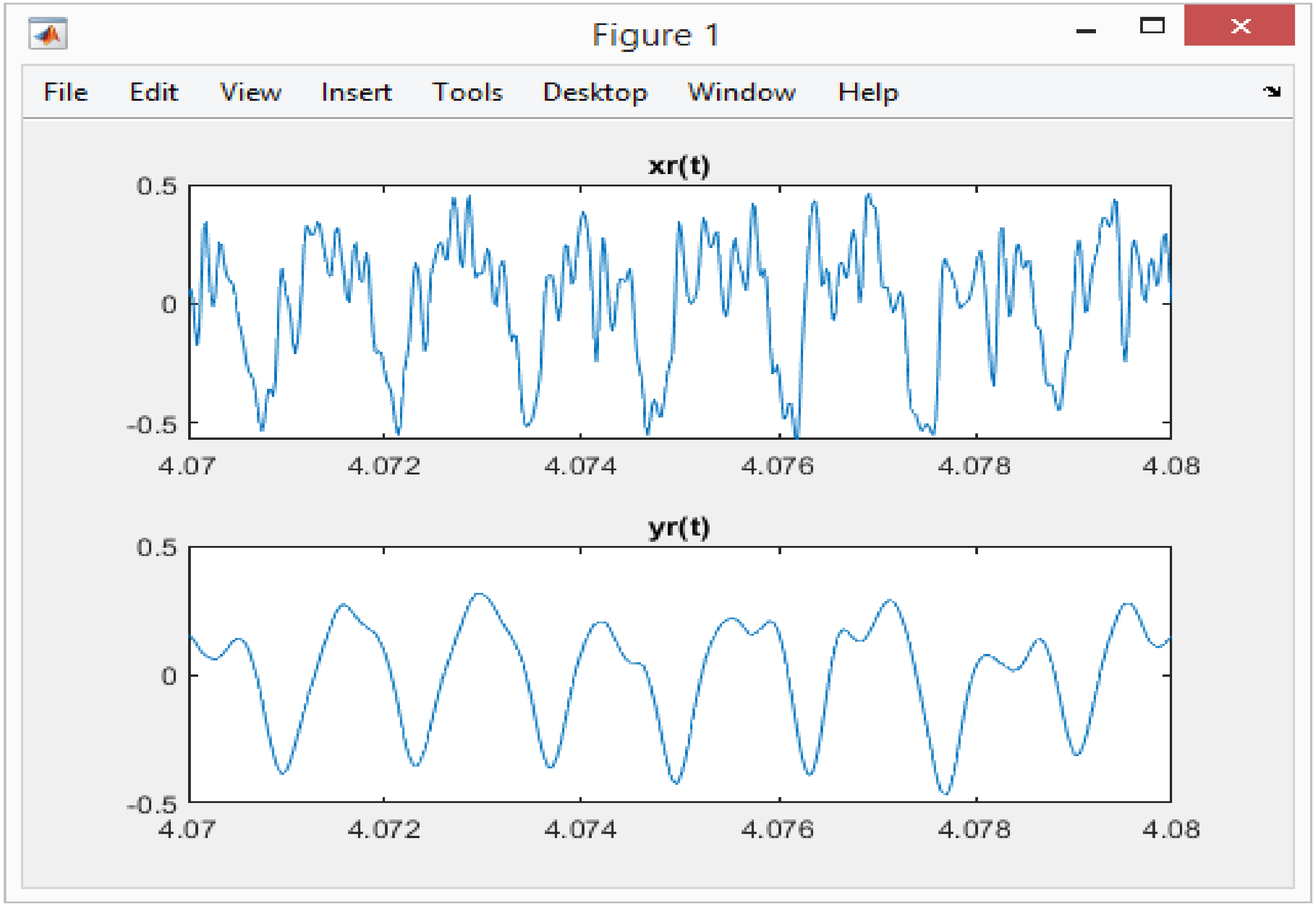
$$y[n] = \{\, 2,\ 13,\ 31,\ 19, -95, \ldots \}$$

```matlab
%y = f_recN2(a,b,x)  resuelve de forma recursiva la EDL
%    a0y[n]+a1y[n-1]+a2y[n-2] = b0x[n]+b1x[n-1]+b2x[n-2]
%Recibe a = [ a0  a1  a2 ], b = [ b0  b1  b2 ],
%Recibe x[n] de longitud Lx y devuelve y[n] de longitud Lx

function y = f_recN2(a,b,x)
   xn_1 = 0;  % x[n] casual
   xn_2 = 0;  % x[n] casual
   yn_1 = 0;  % sistema LTI causal => CIs=0
   yn_2 = 0;  % sistema LTI causal => CIs=0
   Lx = length(x);    % Longitud de la secuencia x[n]
   y = zeros(1,Lx);   % para los PRIMEROS Lx VALORES de y[n]

   for n = 1 : 1 : Lx
      y(n)=b(1)*x(n)+b(2)*xn_1+b(3)*xn_2-a(2)*yn_1-a(3)*yn_2;
      y(n) = (1/a(1))*y(n); % división entre coeficiente a0

      yn_2 = yn_1;
      yn_1 = y(n);
      xn_2 = xn_1;
      xn_1 = x(n);
   end
end
```

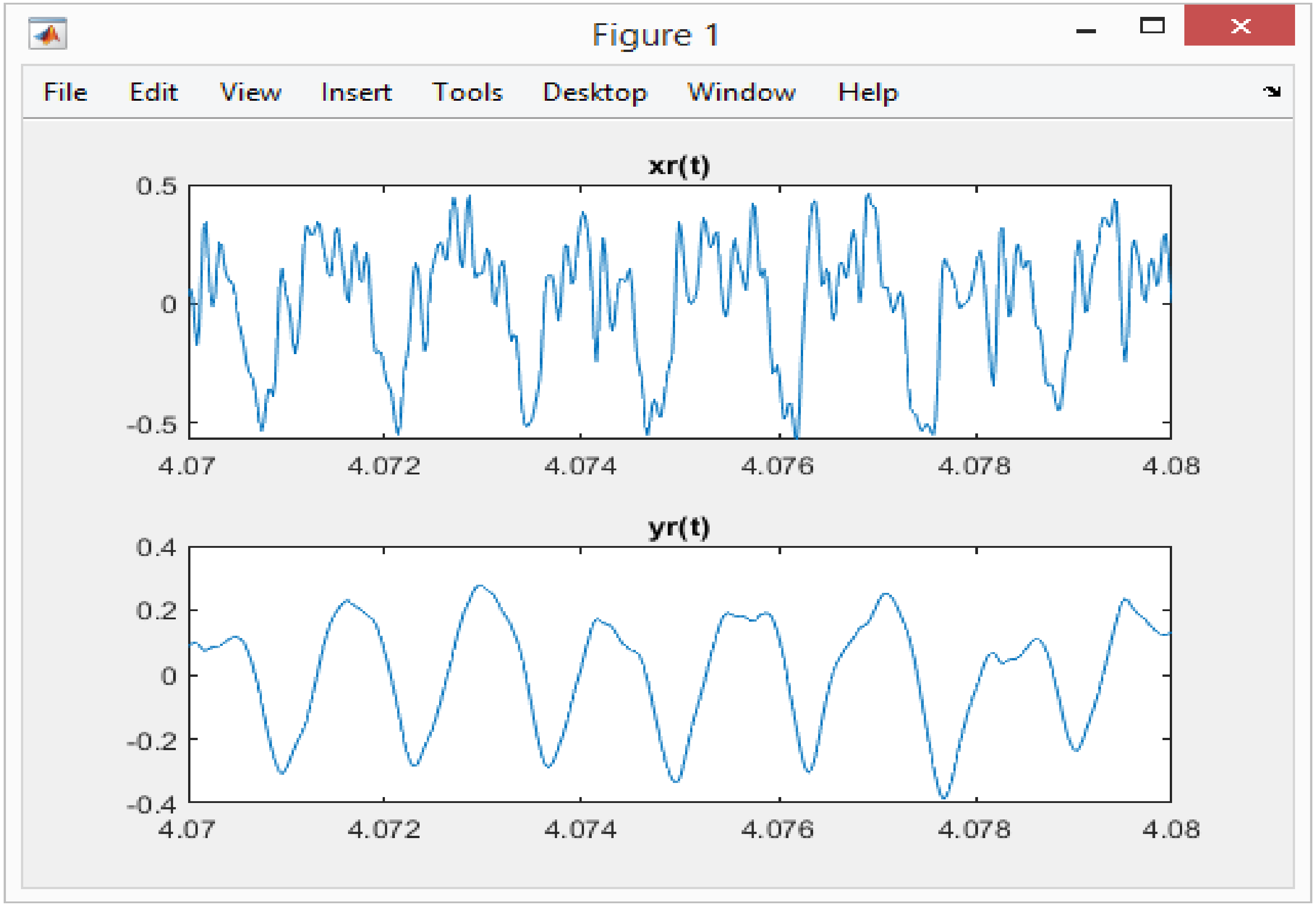
Función en Matlab que implementa la ec. (5) para $N = 2$.

```matlab
[xLR,Fs] = audioread('x_kitt.wav');              %formato wav,mp3,m4a
x = mean(xLR,2).';    %obtención x[n]=xc(nT) monoaural. 2=>prom cols

%Sistema FIR con h[n] de longitud Lh = 21
h = (1/256)*[3,5,7,9,12,15,17,19,21,22,22,22,21,19,17,15,12,9,7,5,3];
%Sistema IIR de orden 2
ak = [ 218, -392, 178.2 ];   %  218y[n] - 392y[n-1] + 178.2y[n-2]
bk = [ 1, 2, 1 ];             %          = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2]

y = f_conv(h,x);              %Aplicación del sistema FIR
%y = f_recN2(ak,bk,x);         %Aplicación del sistema IIR, N=2

Lx = length(x);               %num de muestras en x[n]
n = 0:1:Lx-1;                 %Arreglo de indices de tiempo discreto
t1 = 4.07;                    %Instante inicial a desplegar en [seg]
t2 = t1 + 10/1000;            %Instante final a desplegar en [seg]
figure
subplot(2,1,1)
plot( n*(1/Fs), x )           %T=1/Fs Periodo de muestreo en [seg]
xlim( [t1,t2] )
title('xr(t)')
subplot(2,1,2)
plot( n*(1/Fs), y(1:Lx) )     %T=1/Fs Periodo de muestreo en [seg]
xlim( [t1,t2] )
title('yr(t)')

%El DAC de la tarjeta de sonido interpola a:
player = audioplayer( x, Fs );
playblocking(player);               %x[n] para reproducir xr(t)
player = audioplayer( y, Fs );
playblocking(player);               %y[n] para reproducir yr(t)
```

Código de Matlab para aplicar un sistema LTI discreto a una señal de audio.



Señal de audio $x_r(t)$ transformada en la señal de audio $y_r(t)$ de forma discreta, utilizando un sistema FIR con $\mathrm{Fs} = 44100[\mathrm{Hz}]$



Señal de audio $x_r(t)$ transformada en la señal de audio $y_r(t)$ de forma discreta, utilizando un sistema IIR con $Fs = 44100[Hz]$

3. ANÁLISIS DE SISTEMAS LTI, MEDIANTE LAS TRANSFORMACIONES DE LAPLACE Y Z

Representación de los sistemas LTI continuos mediante la transformada de Laplace

Transformada de Laplace (unilateral)

La transformada de Laplace de una señal $x(t)$ se define como:

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) = \int_{0^-}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt \qquad (6)$$

$X(s)$ es una función de la variable compleja $s = \sigma + j\omega$. La relación entre $x(t)$ y $X(s)$ tambien se puede denotar como:

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$$

Para la transformada inversa de Laplace se tiene la expresión

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)\, e^{st}ds$$

Principales propiedades de la transformada de Laplace		
Propiedad	Señales causales	T. de Laplace
	$x(t)$ $x_1(t)$ $x_2(t)$	$X(s)$ $X_1(s)$ $X_2(s)$
Linealidad	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(s) + bX_2(s)$
Convolución	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$
Diferenciación en el dominio del tiempo	$\frac{d^n}{dt^n}x(t)$	$s^n X(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} \frac{d^k x(0)}{dt^k}$
Desplazamiento en s	$e^{at}x(t)$	$X(s-a)$
Diferenciación en el dominio de s	$-tx(t)$	$\frac{d}{ds}X(s)$

Transformadas de Laplace de funciones elementales		
Señales causales	T. de Laplace	ROC
$\delta(t)$	1	El plano s
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$Re\{s\} > 0$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$Re\{s\} > -a$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$Re\{s\} > -a$
$e^{-at}\cos(\omega_0 t)\,u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+{\omega_0}^2}$	$Re\{s\} > -a$
$e^{-at}\operatorname{sen}(\omega_0 t)\,u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2+{\omega_0}^2}$	$Re\{s\} > -a$

Transformada inversa útil en el método de expansión en fracciones parciales, válida cuando $s^2 + \beta s + \gamma$ tiene raíces complejas conjugadas (i.e. $\beta^2 - 4\gamma < 0$):

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Bs+C}{s^2+\beta s+\gamma}\right\} = e^{-at}[A_1 \cos(\omega_0 t) + A_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t)]u(t)$$

Donde

$$a = 0.5\beta, \qquad \omega_0 = 0.5\sqrt{4\gamma - \beta^2}$$

y

$$A_1 = B, \qquad A_2 = \frac{2C - B\beta}{2\omega_0}$$

<u>Función de transferencia de sistemas continuos LTI</u>

Como ya se estudió, para un sistema LTI continuo, con respuesta al impulso $h(t)$, se tiene en el dominio del tiempo que:

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

Aplicando la T. de Laplace y su propiedad de convolución a la ec. anterior, se tiene en el dominio de la transformada que:

$$X(s) \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow Y(s)$$

$$Y(s) = X(s)H(s)$$

$\mathcal{L}\{h(t)\} = H(s) = \dfrac{Y(s)}{X(s)}$ es la <u>función de transferencia del sistema</u>.

Ejemplo
Dado un sistema LTI con respuesta al impulso $h(t) = 2e^{-2t}u(t)$, determinar la respuesta del sistema a la entrada $x(t) = u(t)$.

Sol.
De tablas de la transformada de Laplace tiene que:

$$X(s) = \frac{1}{s} \quad \text{y} \quad H(s) = 2\frac{1}{s+2}$$

Entonces

$$Y(s) = X(s)H(s) = \left(\frac{1}{s}\right)\left(\frac{2}{s+2}\right)$$

Como $Y(s)$ es un función racional propia, para obtener $y(t)$ mediante el uso de tablas de la T. de Laplace, se procede a realizar la expansión en fracciones parciales de $Y(s)$:

$$\frac{2}{s(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2}$$

Multiplicando ambos lados de la ec. anterior por $s(s+2)$ se obtiene:

$$2 = A(s+2) + Bs$$

De la ec. anterior

con $\quad s = 0, \qquad 2 = A(2) \quad \Rightarrow \quad A = 1$

con $\quad s = -2, \qquad 2 = B(-2) \quad \Rightarrow \quad B = -1$

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}$$

Aplicando la T. Inversa a la ec. anterior, "por tablas", se obtiene:

$$y(t) = u(t) - e^{-2t}u(t) = [1 - e^{-2t}]u(t)$$

Para obtener $H(s)$ en el caso de un sistema LTI continuo representado mediante una EDL junto con CI nulas:

Se aplica la T. de Laplace a ambos lados de la EDL (3)

$$\mathcal{L}\left\{\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k}\right\} = \mathcal{L}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}\right\}$$

Utilizando las propiedades de linealidad y de diferenciación de la T. de Laplace en ambos lados de la ecuación anterior se obtiene:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k s^k Y(s) = \sum_{k=0}^{M} b_k s^k X(s)$$

o bien $$Y(s) \sum_{k=0}^{N} a_k s^k = X(s) \sum_{k=0}^{M} b_k s^k$$

Finalmente, de la ec. anterior se obtiene la siguiente función racional:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k = P(s)}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k = Q(s)}$$

Las raíces del polinomio $P(s)$ se conocen como los ceros del sistema. Las raíces del polinomio $Q(s)$ se conocen como los polos del sistema. En el plano $\boldsymbol{s}$, cada cero se representa con una "o" y cada polo se representa con una "×".

Teorema de estabilidad

Un sistema causal con $H(s)$ racional es estable, si y solo si todos los polos de $H(s)$ se ubican en la parte izquierda del plano $\boldsymbol{s}$ (i.e. todos los polos tienen parte real negativa).

Ejemplo:
Dado el sistema LTI causal representado por la siguiente EDL de orden $N = 3$.

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + \frac{d^2y(t)}{dt^2} - 4\frac{dy(t)}{dt} - 4y(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

Obtener $H(s)$ y determinar si el sistema es estable.

Primero

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^3y(t)}{dt^3} + \frac{d^2y(t)}{dt^2} - 4\frac{dy(t)}{dt} - 4y(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\frac{dx(t)}{dt} + x(t)\right\}$$

De las propiedades de linealidad y de diferenciación se obtiene

$$s^3Y(s) + s^2Y(s) - 4sY(s) - 4Y(s) = s^2X(s) + 2sX(s) + X(s)$$

O bien $(s^3 + s^2 - 4s - 4)\, Y(s) = (s^2 + 2s + 1)X(s)$

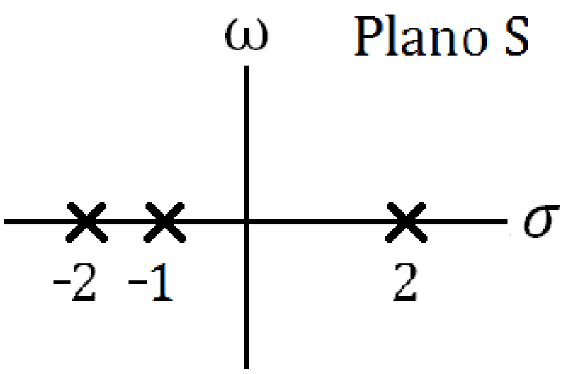
Finalmente

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^3 + s^2 - 4s - 4}$$

Para este sistema $Q(s) = s^3 + s^2 - 4s - 4$, y sus polos son:

$$P_1 = -2, \;\; P_2 = -1, \;\; P_3 = 2$$

el sistema no es estable, ya que un polo de $H(s)$ cae en la parte derecha del plano s (i.e. un polo tiene parte real positiva).



Ejemplo:
Dado el sistema LTI causal representado por la siguiente EDL de orden $N = 2$.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) = 12x(t)$$

Obtener $H(s)$, determinar si el sistema es estable, y obtener la respuesta del sistema a $x(t) = u(t)$.

Primero

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} - 2y(t)\right\} = \mathcal{L}\{12x(t)\}$$

De las propiedades de linealidad y de diferenciación se obtiene

$$s^2Y(s) + sY(s) - 2Y(s) = 12X(s)$$

O bien $$(s^2 + s - 2)\, Y(s) = 12X(s)$$

Finalmente

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{12}{s^2 + s - 2}$$

Para este sistema $Q(s) = s^2 + s - 2 = as^2 + bs + c$, y sus polos son:

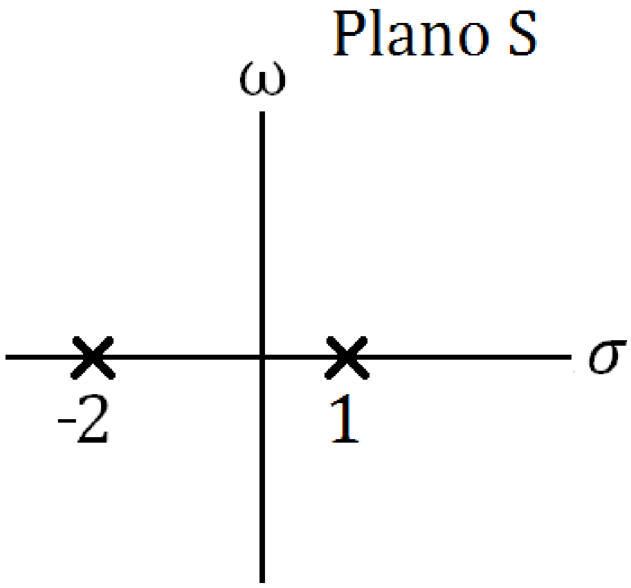
$$P_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)}$$

$$P_1 = 1, \qquad P_2 = -2$$

Entonces

$$H(s) = \frac{12}{s^2 + s - 2} = \frac{12}{(s-1)(s+2)}$$

el sistema no es estable, ya que un polo de $H(s)$ cae en la parte derecha del plano s (i.e. un polo tiene parte real positiva).



Para obtener la respuesta del sistema a $x(t) = u(t)$:

Primero, de tablas se obtiene que $X(s) = \frac{1}{s}$, luego se tiene que:

$$Y(s) = X(s)H(s) = \left(\frac{1}{s}\right)\frac{12}{(s-1)(s+2)}$$

$$Y(s) = \frac{12}{s(s-1)(s+2)}$$

Como es un función racional propia, es posible realizar la expansión en fracciones parciales de $Y(s)$:

$$\frac{12}{s(s-1)(s+2)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-1}+\frac{C}{s+2}$$

Multiplicando ambos lados de la ec. anterior por $s(s-1)(s+2)$ se obtiene:

$$12=A(s-1)(s+2)+Bs(s+2)+Cs(s-1)$$

De la ec. anterior

con $s=0,\quad 12=A(-1)(2)\quad\Rightarrow\quad A=-6$

con $s=1,\quad 12=B(1)(3)\quad\Rightarrow\quad B=4$

con $s=-2,\quad 12=C(-2)(-3)\quad\Rightarrow\quad C=2$

$$Y(s)=-\frac{6}{s}+\frac{4}{s-1}+\frac{2}{s+2}$$

Aplicando la T. Inversa de Laplace a la ecuación anterior se obtiene:

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{6}{s} + \frac{4}{s-1} + \frac{2}{s+2}\right\}$$

$$y(t) = -6\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}$$

Mediante tablas

$$y(t) = -6u(t) + 4e^{t}u(t) + 2e^{-2t}u(t)$$

$$y(t) = [-6 + 4e^{t} + 2e^{-2t}]u(t)$$

Ejemplo:
Dado el sistema LTI causal con función de transferencia

$$H(\underline{s}) = \frac{5}{\underline{s}^2 + 2\underline{s} + 5}$$

determinar si el sistema es estable y obtener la respuesta del sistema a la entrada $x(t) = u(t)$.

Para este sistema $Q(\underline{s}) = \underline{s}^2 + 2\underline{s} + 5 = a\underline{s}^2 + b\underline{s} + c$, y sus polos son:

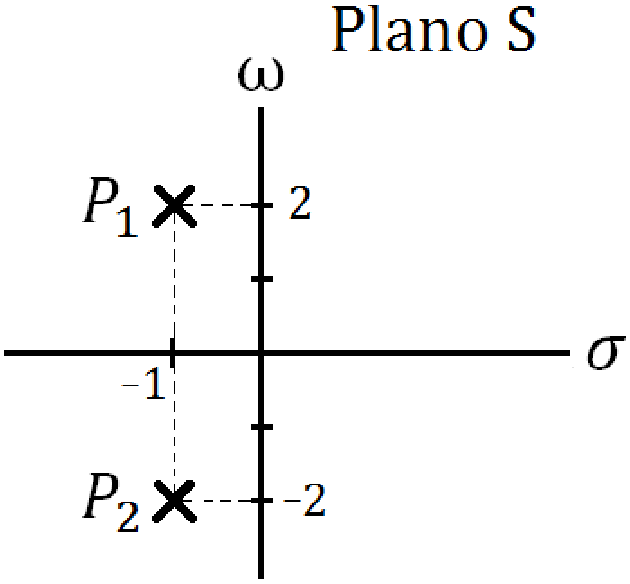
$$P_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(5)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm 4j}{2}$$

$$P_{1,2} = -1 \pm 2j$$

Entonces

$$H(s) = \frac{5}{\underline{s}^2 + 2\underline{s} + 5} = \frac{5}{(\underline{s} - P_1)(\underline{s} - P_2)}, \qquad P_{1,2} = -1 \pm 2j$$

el sistema es estable, ya que los 2 polos de $H(\underline{s})$ caen en la parte izquierda del plano s (los 2 polos tienen parte real negativa (-1)).



Para obtener la respuesta del sistema a $x(t) = u(t)$:

Primero, de tablas se obtiene que $X(\underline{s}) = \frac{1}{\underline{s}}$, luego se tiene que:

$$Y(\underline{s}) = H(\underline{s})X(\underline{s}) = \frac{5}{\underline{s}^2 + 2\underline{s} + 5}\left(\frac{1}{\underline{s}}\right)$$

$$Y(\underline{s}) = \frac{5}{\underline{s}(\underline{s}^2 + 2\underline{s} + 5)}$$

Entonces, se realiza expansión en fracciones parciales de $Y(s)$:

$$\frac{5}{\underline{s}\left(\underline{s}^2+2\underline{s}+5\right)}=\frac{A}{\underline{s}}+\frac{B\underline{s}+C}{\underline{s}^2+2\underline{s}+5}$$

Multiplicando ambos lados de la ec. anterior por $\underline{s}\left(\underline{s}^2+2\underline{s}+5\right)$ se obtiene:

$$5=A\left(\underline{s}^2+2\underline{s}+5\right)+\underline{s}\left(B\underline{s}+C\right)$$

con $s=0,\qquad 5=A(5)\quad\Rightarrow\quad A=1$

con $s=1,\qquad 5=1(8)+1(B+C\ )\quad\Rightarrow\quad B+C=-3$

con $s=-1,\qquad 5=1(4)-(-B+C)\quad\Rightarrow\quad B-C=\ 1$

$$B=-1,\qquad C=-2$$

Entonces

$$Y(s)=\frac{1}{\underline{s}}+\frac{-\underline{s}-2}{\underline{s}^2+2\underline{s}+5}$$

O bien

$$Y(s) = \frac{1}{\underline{s}} - \frac{\underline{s} + 2}{\underline{s}^2 + 2\underline{s} + 5}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Bs+C}{s^2+\beta s+\gamma}\right\} = e^{-at}[A_1 \cos(\omega_0 t) + A_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t)]u(t)$$

$$a = 0.5\beta = 0.5(2) = 1$$

$$\omega_0 = 0.5\sqrt{4\gamma - \beta^2} = 0.5\sqrt{4(5) - (2)^2} = 2$$

$$A_1 = B = 1, \qquad A_2 = \frac{2C - B\beta}{2\omega_0} = \frac{2(2) - (1)(2)}{2(2)} = 0.5$$

Aplicando a $Y(s)$ la T. de Laplace inversa "por tablas", se obtiene:

$$y(t) = u(t) - e^{-t}\left[\cos(2t) + \tfrac{1}{2}sen(2t)\right]u(t)$$

Ejemplo:
Dado el sistema LTI causal con función de transferencia

$$H(s) = \frac{2s^2 + 10s + 9}{s^3 + 5s^2 + 8s + 4}$$

determinar si el sistema es estable y obtener $h(t)$.

Para este sistema se tiene que

$$\begin{aligned} Q(s) &= s^3 + 5s^2 + 8s + 4 \\ &= (s+1)(s+2)^2 \end{aligned}$$

y sus polos son:

$$P_1 = -1, \qquad P_2 = P_3 = -2$$

Como todos los polos tienen parte real negativa, el sistema es estable.

Expansión en fracciones parciales de $H(s)$:

$$\frac{2s^2+10s+9}{(s+1)(s+2)^2}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{(s+2)^2}$$

Se puede comprobar que (tarea moral):

$$A=1,\qquad B=1,\qquad C=3$$

Por lo que

$$H(s)=\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+2}+\frac{3}{(s+2)^2}$$

y de tablas

$$h(t)=[e^{-t}+e^{-2t}+3te^{-2t}]u(t)$$

Ejemplo (con CI no nulas)
Dado el sistema representado por la siguiente EDL de orden $N = 1$

$$y'(t) + 2y(t) = 2x(t)$$

con condiciones iniciales no nulas, $y(0) \neq 0$. Obtener la respuesta del sistema a $x(t) = u(t)$.

Aplicando la T. de Laplace y su propiedad de linealidad se obtiene

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} + 2\mathcal{L}\{y(t)\} = 2\mathcal{L}\{x(t)\}$$

Aplicando la propiedad de diferenciación en el tiempo de la T. de Laplace (unilateral) se obtiene

$$sY(s) - y(0) + 2Y(s) = 2X(s)$$

$$sY(s) + 2Y(s) = 2X(s) + y(0)$$

$$(s + 2)Y(s) = 2X(s) + y(0)$$

$$Y(s) = \frac{2}{s+2}X(s) + \frac{1}{s+2}y(0)$$

De tablas, para $x(t) = u(t)$ se tiene que $X(s) = \frac{1}{s}$ y

$$Y(s) = \frac{2}{(s+2)s} + y(0)\frac{1}{s+2}$$

Entonces donde sea necesario, se procede a realizar la expansión en fracciones parciales de los sumandos de $Y(s)$:

$$\frac{2}{(s+2)s} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s}$$

Multiplicando ambos lados de la ec. anterior por $(s+2)s$ se obtiene:

$$2 = As + B(s+2)$$

con $s = 0, \qquad 2 = B(2) \quad \Rightarrow \quad B = 1$

con $s = -2, \qquad 2 = A(-2) \quad \Rightarrow \quad A = -1$

De esta forma se obtiene que

$$Y(s) = \frac{-1}{s+2} + \frac{1}{s} + y(0)\frac{1}{s+2}$$

Aplicando la T. de Laplace inversa por tablas se obtiene

$$y(t) = -e^{-2t}u(t) + u(t) + y(0)e^{-2t}u(t)$$

$$y(t) = \underbrace{[1 - e^{-2t}]u(t)}_{y_{zs}(t)\ \text{res. de estado 0}} + \underbrace{y(0)e^{-2t}u(t)}_{y_{zi}(t)\ \text{res. de entrada 0}}$$

Representación de los sistemas LTI discretos mediante la transformada Z

Transformada Z

La transformada Z de una secuencia $x[n]$ se define como:

$$\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} \qquad (7)$$

$X(z)$ es una función de la variable compleja $z = re^{j\Omega}$. La relación entre $x[n]$ y $X(z)$ tambien se puede denotar como:

$$x[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(z)$$

Para la transformada Z inversa se tiene la expresión

$$\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint X(z)z^{n-1}dz$$

Ejemplo:

Obtener la transformada Z de $x[n] = a^n u[n]$, $a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{a^n u[n]}_{x[n]} z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} (az^{-1})^n$$

como $\sum_{n=0}^{N} b^n = \dfrac{1-b^{N+1}}{1-b}$ $\quad b \neq 1 \quad b \in \mathbb{C}$ $\quad$ entonces

$$X(z) = \lim_{N\to\infty} \frac{1-(az^{-1})^{N+1}}{1-az^{-1}} = \frac{1}{1-az^{-1}}, \qquad |az^{-1}| < 1$$

$$\mathcal{Z}\{a^n u[n]\} = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \qquad |z| > |a| \quad \text{(ROC)}$$

ROC: región de convergencia de la T. Z (en el plano Z).

Principales propiedades de la transformada Z		
Propiedad	Secuencia	Transformada Z
	$x[n]$ $x_1[n]$ $x_2[n]$	$X(z)$ $X_1(z)$ $X_2(z)$
Linealidad	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1(z) + bX_2(z)$
Convolución	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$
Desplazamiento en n	$x[n-a]$	$z^{-a}X(z)$
Escalamiento en Z	$a^n x[n]$	$X(a^{-1}z)$
Diferenciación en Z	$nx[n]$	$-z\frac{dX(z)}{dz}$

Transformadas Z de secuencias elementales		
Secuencia	Transformada Z	ROC
$\delta[n]$	1	El plano z
$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\| > 1$
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| > \|a\|$
$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\| > \|a\|$
$\rho^n \, cos(\Omega_0 n) \, u[n]$	$\frac{1-(\rho cos\Omega_0)z^{-1}}{1-(2\rho cos\Omega_0)z^{-1}+\rho^2 z^{-2}}$	$\|z\| > \rho$
$\rho^n \, sen(\Omega_0 n) \, u[n]$	$\frac{(\rho sen\Omega_0)z^{-1}}{1-(2\rho cos\Omega_0)z^{-1}+\rho^2 z^{-2}}$	$\|z\| > \rho$

Transformadas Z de secuencias elementales		
Secuencia	Transformada Z	ROC
$\delta[n]$	1	El plano z
$u[n]$	$\frac{z}{z-1}$	$\|z\| > 1$
$a^n u[n]$	$\frac{z}{z-a}$	$\|z\| > \|a\|$
$na^n u[n]$	$\frac{az}{(z-a)^2}$	$\|z\| > \|a\|$
$\rho^n \cos(\Omega_0 n)\, u[n]$	$\frac{z^2-(\rho\cos\Omega_0)z}{z^2-(2\rho\cos\Omega_0)z+\rho^2}$	$\|z\| > \rho$
$\rho^n \operatorname{sen}(\Omega_0 n)\, u[n]$	$\frac{(\rho\operatorname{sen}\Omega_0)z}{z^2-(2\rho\cos\Omega_0)z+\rho^2}$	$\|z\| > \rho$

Transformada Z inversa útil en el método de expansión en fraccio-nes parciales, válida cuando $z^2 + \beta z + \gamma$ tiene raíces complejas conjugadas (i.e. $\beta^2 - 4\gamma < 0$):

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{Bz^2+Cz}{z^2+\beta z+\gamma}\right\} = \rho^n[A_1 \cos(\Omega_0 n) + A_2 \operatorname{sen}(\Omega_0 n)]u[n]$$

Donde

$$\rho = \sqrt{\gamma}, \qquad \Omega_0 = \cos^{-1}\left(\frac{-\beta}{2\sqrt{\gamma}}\right)$$

y

$$A_1 = B, \qquad A_2 = \frac{2C - B\beta}{2\rho sen\Omega_0}$$

Función de transferencia de sistemas discretos LTI

Como ya se estudió, para un sistema LTI discreto, con respuesta al impulso $h[n]$, se tiene en el dominio del tiempo que:

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

Aplicando la transformada Z y su propiedad de convolución a la ec. anterior, se tiene en el dominio de la transformada que:

$$X(z) \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow Y(z)$$

$$Y(z) = X(z)H(z)$$

$\mathcal{Z}\{h[n]\} = H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)}$ es la <u>función de transferencia del sistema</u>.

Ejemplo

Dado un sistema LTI con respuesta al impulso $h[n] = 0.5^n u[n]$, determinar la respuesta del sistema a la entrada $x[n] = u[n]$.

Sol.

De tablas de la transformada Z se tiene que:

$$X(z) = \frac{z}{z-1} \quad \text{y} \quad H(z) = \frac{z}{z-0.5}$$

Entonces

$$Y(z) = X(z)H(z) = \left(\frac{z}{z-1}\right)\left(\frac{z}{z-0.5}\right)$$

Como $Y(z)/z$ es una función racional propia, para obtener $y[n]$ mediante el uso de tablas de la T.Z, se procede a realizar la expansión en fracciones parciales de:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z}{(z-1)(z-0.5)}$$

$$\frac{z}{(z-1)(z-0.5)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-0.5}$$

Multiplicando ambos lados de la ec. anterior por $(\mathrm{z}-1)(z-0.5)$ se obtiene:

$$z = A(z-0.5) + B(z-1)$$

De la ec. anterior

con $\quad z = 1, \qquad 1 = A(0.5) \qquad \Rightarrow \quad A = 2$

con $\quad z = 0.5, \quad 0.5 = B(-0.5) \quad \Rightarrow \quad B = -1$

$$Y(z) = \frac{2z}{z-1} - \frac{z}{z-0.5}$$

Aplicando la T. Z. inversa a la ec. anterior, "por tablas", se obtiene:

$$y[n] = 2u[n] - 0.5^n u[n] = [2 - 0.5^n]u[n]$$

Para obtener $H(z)$ en el caso de un sistema LTI discreto representado mediante una ecuación en diferencias lineal, junto con CI nulas:

Se aplica la transformada Z a ambos lados de la EDL (4)

$$\mathcal{Z}\left\{\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k]\right\} = \mathcal{Z}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]\right\}$$

Utilizando las propiedades de linealidad y de desplazamiento en n de la transformada Z en ambos lados de la ec. anterior se obtiene:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X(z)$$

o bien $$Y(z)\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = X(z)\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}$$

Finalmente, de la ecuación anterior se obtiene:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{z^N \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} = P(z)}{z^N \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = Q(z)}$$

Cuando el sist. representado por $H(z)$ es causal se tiene que $N \geq M$, lo que implica que $P(z)$ y $Q(z)$ son polinomios. Las raíces de $P(z)$ se conocen como los ceros del sistema. Las raíces de $Q(z)$ se conocen como los polos del sistema. En el plano $\boldsymbol{z}$, cada cero se representa con una "o" y cada polo se representa con una "×".

Teorema de estabilidad

Un sist. causal con $H(z)$ racional es estable, si y solo si todos los polos de $H(z)$ se ubican dentro del círculo unitario del plano $\boldsymbol{z}$ (i.e. todos los polos tienen magnitud menor a 1).

Ejemplo:
Dado el sistema LTI causal representado por la siguiente EDL de orden $N = 3$.

$$y[n] + 0.5y[n-1] - 4y[n-2] - 2y[n-3] = x[n] + x[n-1]$$

Obtener $H(z)$ y determinar si el sistema es estable.

Primero

$$\mathcal{Z}\{y[n] + 0.5y[n-1] - 4y[n-2] - 2y[n-3]\} = \mathcal{Z}\{x[n] + x[n-1]\}$$

De las propiedades de linealidad y de desplazamiento en el tiempo se obtiene

$$Y(z) + 0.5z^{-1}Y(z) - 4z^{-2}Y(z) - 2z^{-3}Y(z) = X(z) + z^{-1}X(z)$$

O bien $$(1+0.5z^{-1}-4z^{-2}-2z^{-3})\,Y(z)=(1+z^{-1})X(z)$$

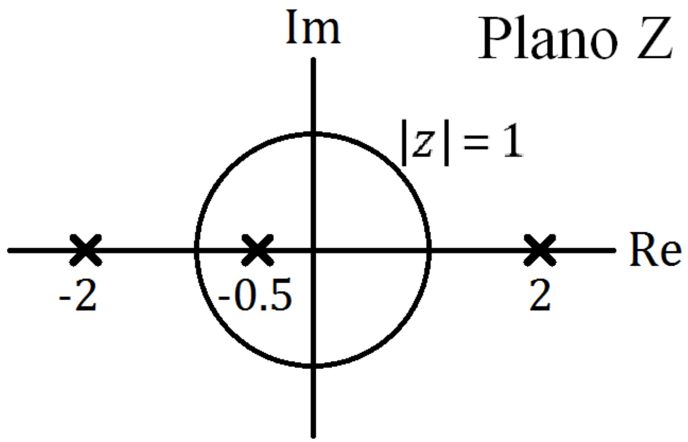
Finalmente

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+z^{-1}}{1+0.5z^{-1}-4z^{-2}-2z^{-3}}=\frac{z^3+z^2}{z^3+0.5z^2-4z-2}$$

Para este sistema $Q(z)=z^3+0.5z^2-4z-2$, y sus polos son:

$$P_1=-2,\ P_2=-0.5,\ P_3=2$$

el sistema no es estable, ya que los polos P_1 y P_3 de $H(z)$ caen fuera del círculo unitario.



Ejemplo:
Dado el sistema LTI causal representado por la siguiente EDL de orden N=2

$$y[n] + 2.5y[n-1] + y[n-2] = 9x[n-1] + 9x[n-2]$$

Obtener $H(z)$, determinar si el sistema es estable, y obtener la respuesta del sistema a $x[n] = u[n]$.

Primero

$$\mathcal{Z}\{y[n] + 2.5y[n-1] + y[n-2]\} = \mathcal{Z}\{9x[n-1] + 9x[n-2]\}$$

Utilizando las propiedades de linealidad y desplazamiento en el tiempo se obtiene

$$Y(z) + 2.5z^{-1}Y(z) + z^{-2}Y(z) = 9z^{-1}X(z) + 9z^{-2}X(z)$$

O bien

$$(1 + 2.5z^{-1} + z^{-2})Y(z) = (9z^{-1} + 9z^{-2})X(z)$$

Finalmente

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{9z^{-1} + 9z^{-2}}{1 + 2.5z^{-1} + z^{-2}} = \frac{9z + 9}{z^2 + 2.5z + 1}$$

Para este sistema $Q(z) = z^2 + 2.5z + 1 = az^2 + bz + c$, y sus polos son:

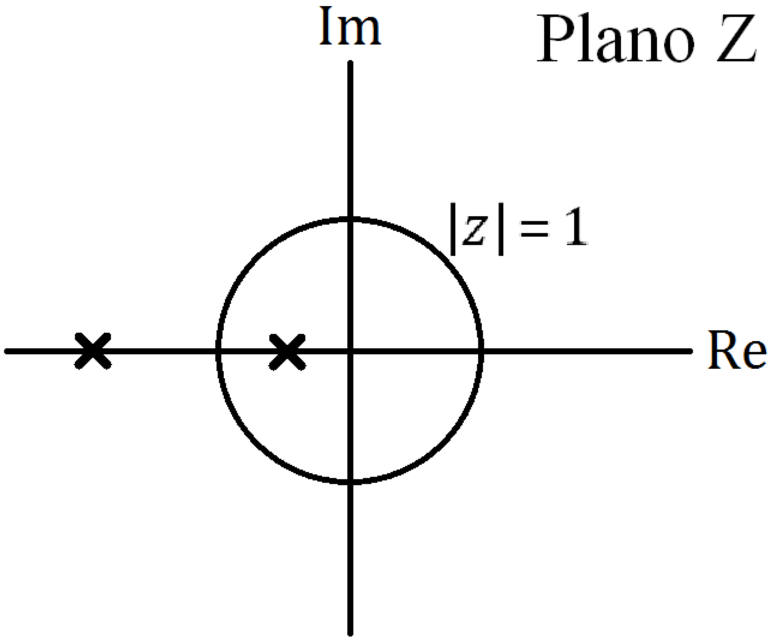
$$P_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2.5 \pm \sqrt{(2.5)^2 - 4}}{2(1)} = \frac{-2.5 \pm 1.5}{2}$$

$$P_1 = -0.5, \qquad P_2 = -2$$

Entonces

$$H(z) = \frac{9z + 9}{z^2 + 2.5z + 1} = \frac{9z + 9}{(z + 0.5)(z + 2)}$$

El sistema no es estable ya que uno de sus polos cae fuera del circulo unitario.



Para obtener la respuesta del sistema a $x[n] = u[n]$:

Primero, de tablas se obtiene que $X(z) = \frac{z}{z-1}$, luego se tiene que:

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{9z + 9}{(z + 0.5)(z + 2)}\left(\frac{z}{z - 1}\right)$$

Entonces, para garantizar que se trabaja con una función racional propia, se procede a realizar la expansión en fracciones parciales de

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{9z + 9}{(z + 0.5)(z + 2)(z - 1)}$$

$$\frac{9z+9}{(z+0.5)(z+2)(z-1)} = \frac{A}{z+0.5} + \frac{B}{z+2} + \frac{C}{z-1}$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación anterior por $(z+0.5)(z+2)(z-1)$ se obtiene:

$$9z+9 = A(z+2)(z-1) + B(z+0.5)(z-1) + C(z+0.5)(z+2)$$

con $z=-0.5,\quad 4.5 = A(1.5)(-1.5) \quad \Rightarrow \quad A=-2$

con $z=-2,\quad -9 = B(-1.5)(-3) \quad \Rightarrow \quad B=-2$

con $z=\ \ 1,\quad 18 = C(1.5)(3) \quad \Rightarrow \quad C=4$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{-2}{z+0.5} + \frac{-2}{z+2} + \frac{4}{z-1}$$

entonces

$$Y(z) = -2\frac{z}{z+0.5} - 2\frac{z}{z+2} + 4\frac{z}{z-1}$$

aplicando a $Y(z)$ la T. Z inversa "por tablas", se obtiene:

$$y[n] = -2(-0.5)^n u[n] - 2(-2)^n u[n] + 4u[n]$$

$$y[n] = [\,4 - 2(-0.5)^n - 2(-2)^n\,]u[n]$$

Ejemplo:
Dado el sistema LTI causal representado por la siguiente EDL de orden N=1

$$y[n] - 0.3y[n-1] = x[n]$$

Obtener $H(z)$, determinar si el sistema es estable, y obtener la respuesta del sistema a $x[n] = 0.3^n u[n]$.

Primero

$$\mathcal{Z}\{y[n] - 0.3y[n-1]\} = \mathcal{Z}\{x[n]\}$$

Utilizando las propiedades de linealidad y desplazamiento en el tiempo se obtiene

$$Y(z) - 0.3z^{-1}Y(z) = X(z)$$

O bien

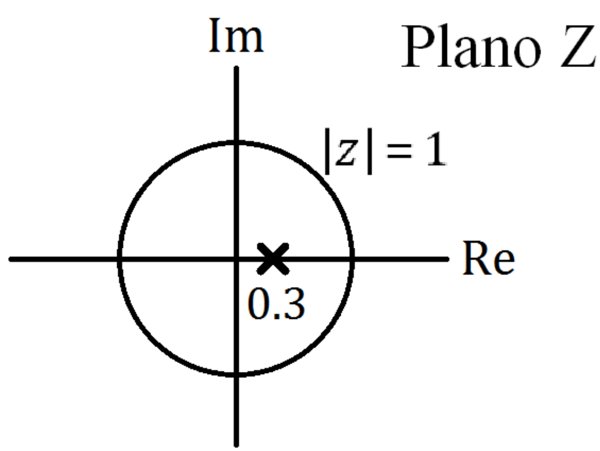
$$(1 - 0.3z^{-1})Y(z) = X(z)$$

Finalmente

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - 0.3z^{-1}} = \frac{z}{z - 0.3}$$

Para este sistema $Q(z) = z - 0.3$, y su polo es $P_1 = 0.3$

El sistema es estable ya que su polo se encuentra dentro del circulo unitario.



Para obtener la respuesta del sistema a $x[n] = 0.3^n u[n]$:

Primero, de tablas se tiene que $X(z) = \frac{z}{z-0.3}$, luego se tiene que:

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{z}{z-0.3}\left(\frac{z}{z-0.3}\right)$$

Entonces, para garantizar que se trabaja con una función racional propia, se procede a realizar la expansión en fracciones parciales de

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z}{(z-0.3)^2}$$

$$\frac{z}{(z-0.3)^2} = \frac{A}{z-0.3} + \frac{B}{(z-0.3)^2}$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación anterior por $(z-0.3)^2$ se obtiene:

$$z = A(z-0.3) + B$$

con $z = 0.3,$ $\qquad 0.3 = B$

con $z = 0,$ $\qquad 0 = A(-0.3) + 0.3 \quad \Rightarrow \quad A = 1$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{z-0.3} + \frac{0.3}{(z-0.3)^2}$$

entonces

$$Y(z) = \frac{z}{z-0.3} + \frac{0.3z}{(z-0.3)^2}$$

aplicando a $Y(z)$ la T. Z inversa "por tablas", se obtiene:

$$y[n] = (0.3)^n u[n] + n(0.3)^n u[n]$$

$$y[n] = (1+n)(0.3)^n u[n]$$

Ejemplo:
Dado el sistema LTI causal con función de transferencia

$$H(z) = \frac{3z + 2}{z^2 - z + 0.5}$$

determinar si el sistema es estable y obtener su respuesta al escalón.

Para este sistema $Q(z) = z^2 - z + 0.5 = az^2 + bz + c$, y sus polos son:

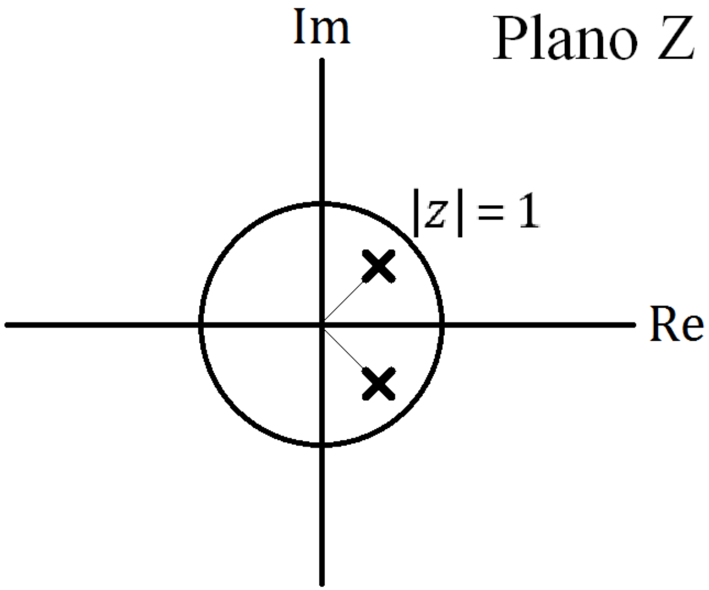
$$P_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 2}}{2(1)} = \frac{1}{2} \pm j\frac{1}{2}$$

$$P_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\pm \frac{j\pi}{4}}$$

Entonces

$$H(z)=\frac{3z+2}{z^2-z+0.5}, \qquad P_{1,2}=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\pm\frac{j\pi}{4}}$$

Este sistema es estable ya que los dos polos de $H(z)$ caen dentro del círculo unitario (i.e. los 2 polos tienen magnitud menor a 1).



Para obtener la respuesta del sistema a $x[n] = u[n]$:

Primero, de tablas se obtiene que $X(z) = \frac{z}{z-1}$, luego se tiene que:

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{3z+2}{z^2 - z + 0.5}\left(\frac{z}{z-1}\right)$$

Entonces, se procede a realizar la expansión en fracciones parciales de

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{3z+2}{(z-1)(z^2 - z + 0.5)}$$

$$\frac{3z+2}{(z-1)(z^2-z+0.5)} = \frac{A}{z-1} + \frac{Bz+C}{z^2-z+0.5}$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación anterior por $(z-1)(z^2-z+0.5)$ se obtiene:

$$3z+2 = A(z^2-z+0.5) + (Bz+C)(z-1)$$

con $z=1, \quad 5 = A(0.5) \quad \Rightarrow \quad A = 10$

con $z=0, \quad 2 = 10(0.5) + C(-1) \quad \Rightarrow \quad C = 3$

con $z=-1, \quad -1 = 10(2.5) + (-B+3)(-2) \quad \Rightarrow \quad B = -10$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{10}{z-1} + \frac{-10z+3}{z^2-z+0.5}$$

$$Y(z) = 10\frac{z}{z-1} - \frac{10z^2 - 3z}{z^2 - z + 0.5}$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{Bz^2+Cz}{z^2+\beta z+\gamma}\right\} = \rho^n[A_1\cos(\Omega_0 n) + A_2 \operatorname{sen}(\Omega_0 n)]u[n]$$

$$\rho = \sqrt{\gamma} = \sqrt{0.5}, \quad \Omega_0 = \cos^{-1}\left(\frac{-\beta}{2\sqrt{\gamma}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{0.5}}\right) = \frac{\pi}{4},$$

$$A_1 = B = 10, \quad A_2 = \frac{2C - B\beta}{2\rho sen\Omega_0} = \frac{2(-3)-(10)(-1)}{2\sqrt{0.5}sen(\pi/4)} = \frac{4}{1} = 4$$

Aplicando a $Y(z)$ la T. Z inversa "por tablas", se obtiene:

$$y[n] = \left[10 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\left[10\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) + 4\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}n\right)\right]\right]u[n]$$

Discretización de la derivada mediante la diferencia hacia atrás

La derivada de una señal $y_c(t)$ se puede aproximar como:

$$y_c{}'(t) \approx \frac{y_c(t) - y_c(t - \Delta t)}{\Delta t}$$

Mediante muestreo con periodo $T = \Delta t$, de la expr. anterior se tiene que:

$$y_c{}'(nT) \approx \frac{y_c(nT) - y_c(nT - T)}{T}$$

Tolerando el error en el que se incurre y considerando la notación $x[n] = x_c(nT)$, la expresión anterior se puede reescribir como:

$$y'[n] = \frac{y[n] - y[n-1]}{T}$$

La secuencia $y'[n]$ es la diferencia hacia atrás de $\frac{1}{T}y[n]$ y es una aprox. en tiempo discreto de $y_c{}'(t)$, la derivada de la señal $y_c(t)$.

Además, aplicando la T. Z a ambos lados de la ec. anterior se tiene que:

$$Y'(z) = \frac{Y(z) - z^{-1}Y(z)}{T} = \frac{1 - z^{-1}}{T} Y(z)$$

O bien

$$Y'(z) = \frac{z - 1}{Tz}\, Y(z) \qquad \text{(d1)}$$

La ecuación anterior aproxima en tiempo discreto y en el dominio de la transformada Z, a la operación derivada del tiempo continuo que es representada en el domino de Laplace mediante la ecuación:

$$Y_c'(s) = sY_c(s)$$

Nótese que para $y''[n]$, la sec. de muestras de $y_c''(t)$, se tiene que:

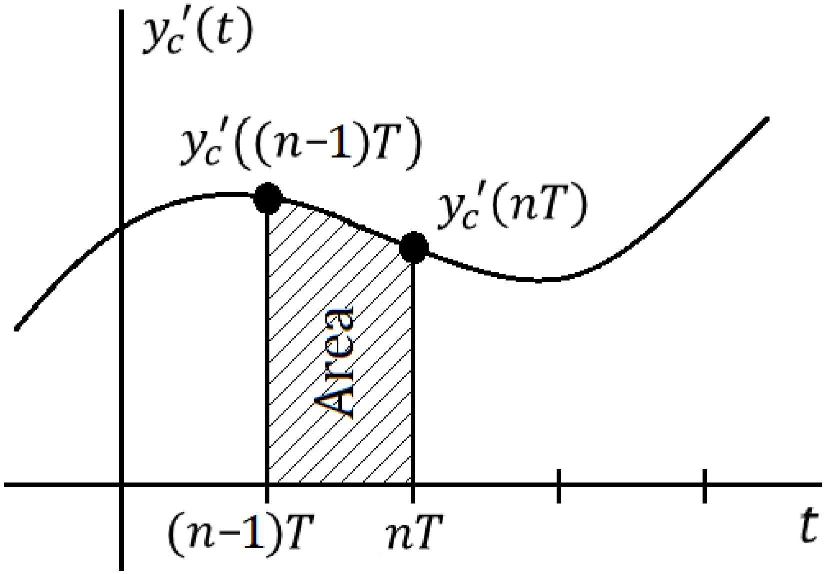
$$\mathcal{Z}\{y''[n]\} = Y''(z) = \frac{z-1}{Tz}\left(\frac{z-1}{Tz}Y(z)\right) = \left(\frac{z-1}{Tz}\right)^2 Y(z)$$

Discretización de la derivada mediante integración núm. trapezoidal

Area del trapecio

A=(b+B)h/2

b: base menor
B: base mayor
h: altura



De la regla de Barrow:

$$\int_{(n-1)T}^{nT} y_c{}'(t)dt = y_c(nT) - y_c\big((n-1)T\big) \qquad \text{(d2)}$$

Aproximando la integral anterior de forma trapezoidal se obtiene:

$$\int_{(n-1)T}^{nT} y_c{}'(t)dt \approx \frac{T}{2}\left[y_c{}'(nT) + y_c{}'\big((n-1)T\big)\right] \qquad \text{(d3)}$$

Tolerando el error en el que se incurre, se iguala (d2) con (d3):

$$y_c(nT) - y_c\big((n-1)T\big) = \frac{T}{2}\big[y_c'(nT) + y_c'\big((n-1)T\big)\big] \qquad \text{(d4)}$$

Considerando un periodo de muestreo T, a partir de la señales $y_c(t)$ y $y_c'(t)$ es posible obtener sus versiones discretas, las secuencias

$$y[n] = y_c(nT) \quad y \quad y'[n] = y_c'(nT)$$

Considerando las 2 ec. anteriores, la ec. (d4) se puede reescribir como:

$$y[n] - y[n-1] = \frac{T}{2}(y'[n] + y'[n-1])$$

Aplicando la T. Z a ambos lados de la ec. anterior se tiene que:

$$Y(z) - z^{-1}Y(z) = \frac{T}{2}[Y'(z) + z^{-1}Y'(z)]$$

O bien

$$Y(z)[1 - z^{-1}] = \frac{T}{2} Y'(z)[1 + z^{-1}]$$

Es decir

$$Y(z)[z - 1] = \frac{T}{2} Y'(z)[z + 1]$$

De la ecuación anterior se tiene que:

$$Y'(z) = \frac{2}{T} \frac{z - 1}{z + 1} Y(z) \qquad \text{(d5)}$$

La ecuación anterior aproxima en tiempo discreto y en el dominio de la transformada Z, a la operación derivada del tiempo continuo que es representada en el domino de Laplace mediante la ecuación:

$$Y_c{}'(s) = sY_c(s)$$

Ejemplo

Usando integración numérica trapezoidal como aproximación discreta de la derivada, obtener la $H(z)$ del sistema discreto que aproxime un sistema LTI continuo, definido por la siguiente ecuación diferencial:

$$y_c''(t) + \alpha\, y_c'(t) + \beta\, y_c(t) = \gamma\, x_c(t) \qquad \text{(d6)}$$

Sol.

Muestreando las señales en la ec. anterior cada T segundos se obtiene:

$$y_c''(nT) + \alpha\, y_c'(nT) + \beta\, y_c(nT) = \gamma\, x_c(nT)$$

O bien

$$y''[n] + \alpha\, y'[n] + \beta\, y[n] = \gamma\, x[n]$$

Aplicando la T. Z a ambos lados de la ecuación anterior se tiene que:

$$Y''(z) + \alpha\, Y'(z) + \beta\, Y(z) = \gamma\, X(z)$$

Utilizando de forma sucesiva la ec. (d5), de la ec. anterior se tiene que:

$$\left(\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}\right)^2 Y(z) + \alpha\left(\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}\right)Y(z) + \beta\, Y(z) = \gamma X(z)$$

Finalmente, de la ecuación anterior se tiene que:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\gamma}{\left(\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}\right)^2 + \alpha\left(\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}\right) + \beta} \qquad \text{(d7)}$$

<u>Discretización de sistemas LTI mediante la Transformada Bilineal</u>

Partiendo del ejemplo anterior y utilizando la T. de Laplace, de la ecuación (d6) se tiene que:

$$H_c(s) = \frac{\gamma}{s^2 + \alpha\, s + \ \beta}$$

Al comparar la ecuación anterior con la ecuación (d7) se tiene que:

$$H(z) = H_c(s)\Big|_{s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}}$$

En la expresión anterior (valida también para $N > 2$) a la ecuación:

$$s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} \qquad \text{(d8)}$$

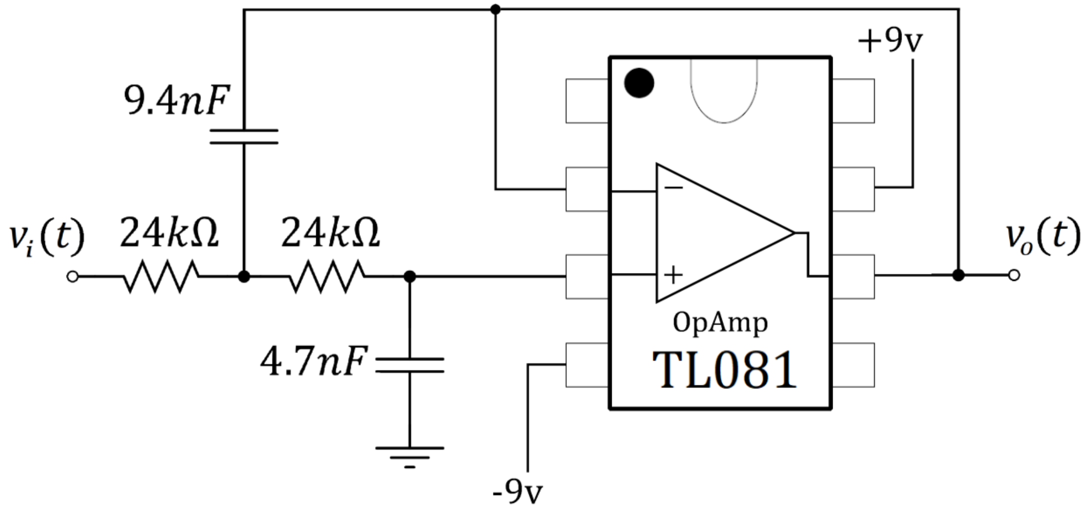
Se le conoce como la <u>Transformada bilineal</u> entre los planos **s** y **z**.

Si se aproxima la derivada de una señal $x_c(t)$ mediante la primera diferencia hacia atrás de su secuencia de muestras $x[n]$, ver ec. (d1), es posible obtener otra discretización de la operación derivada dada por la ecuación:

$$s = \frac{z-1}{Tz} \qquad \text{(d9)}$$

que se conoce como la <u>T. salto hacia atrás</u> entre los planos **s** y **z**.

Ejemplo



El circuito eléctrico mostrado en la figura anterior implementa un sistema LTI continuo (filtro paso-bajas Butterworth de orden 2 con frec. de corte $F_c = 1000$[Hz]) con función de transferencia:

$$H_c(s) = \frac{a^2}{s^2 + \sqrt{2}\,a\,s + a^2}, \qquad a = 2\pi 1000$$

Con $F_s = 44.1[k\text{Hz}]$, discretizar el sistema anterior utilizando la transformada bilineal y obtener la EDL correspondiente.

Solución

Con la transformada bilineal es posible discretizar un sistema LTI continuo hacia un sistema discreto LTI IIR mediante la ecuación:

$$H(z) = H_c(s)\Bigg|_{s = \frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)}$$

Para el problema a resolver:

$$H(z) = \frac{a^2}{s^2 + \sqrt{2}\, a\, s + a^2}\Bigg|_{s = \frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)}$$

$$H(z) = \frac{a^2}{\left(\frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)\right)^2 + \sqrt{2}\, a\left(\frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)\right) + a^2}$$

$$H(z) = \frac{a^2(z+1)^2}{\frac{4}{T^2}(z-1)^2 + 2\sqrt{2}\frac{a}{T}\ (z-1)(z+1) + a^2(z+1)^2}$$

$$= \frac{a^2(z^2+2z+1)}{\frac{4}{T^2}(z^2-2z+1) + \frac{2\sqrt{2}a}{T}(z^2-1) + a^2(z^2+2z+1)}$$

$$= \frac{z^2+2z+1}{\frac{4}{a^2T^2}(z^2-2z+1) + \frac{2\sqrt{2}}{aT}(z^2-1) + \ (z^2+2z+1)}$$

$$= \frac{z^2+2z+1}{\left(\frac{4}{(aT)^2} + \frac{2\sqrt{2}}{aT} + 1\right)z^2 + \left(2 - \frac{8}{(aT)^2}\right)z + \left(\frac{4}{(aT)^2} - \frac{2\sqrt{2}}{aT} + 1\right)}$$

Con $Fs = 44100$ ($T = 1/44100$) y como $a = 2\pi 1000$, la ecuación anterior se reduce a

$$H(z) = \frac{z^2 + 2z + 1}{218z^2 - 392z + 178.2}$$

A continuación se obtiene la ecuación en diferencias correspondiente a $H(z)$:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{218 - 392z^{-1} + 178.2z^{-2}}$$

$$(218 - 392z^{-1} + 178.2z^{-2})Y(z) = (1 + 2z^{-1} + z^{-2})X(z)$$

O bien

$$218y[n] - 392y[n-1] + 178.2y[n-2] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2]$$

Ejemplo

Obtener la función de transferencia $H(s) = V_o(s)/V_i(s)$ para el circuito eléctrico mostrado en la siguiente figura:

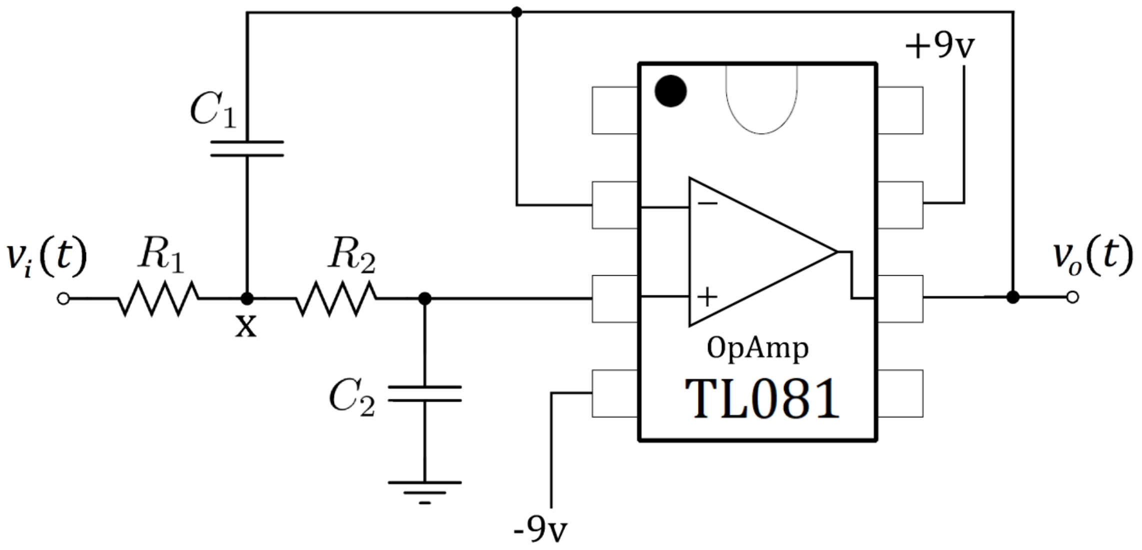


Figura 1: Filtro paso-bajas Topología Sallen-Key de segundo orden de ganancia unitaria.

Ejemplo (continuación)

En la figura 1, el amplificador operacional (OpAmp) TL081 es un circuito integrado analógico cuyas características principales se pueden aproximar utilizando el modelo de Amplificador operacional ideal, cuyas características de interés en nuestro caso son:

-Impedancia de entrada infinita, es decir que no fluye corriente eléctrica hacia el OpAmp ideal.

-Diferencia de potencial cero entre las terminales inversora (-) y no inversora (+) del OpAmp ideal, cuando la salida del OpAmp se retroalimenta a la terminal inversora del mismo.

Solución

En el dominio de Laplace mediante el concepto de impedancia, el circuito de la figura 1 se puede representar como se muestra en la figura 2:

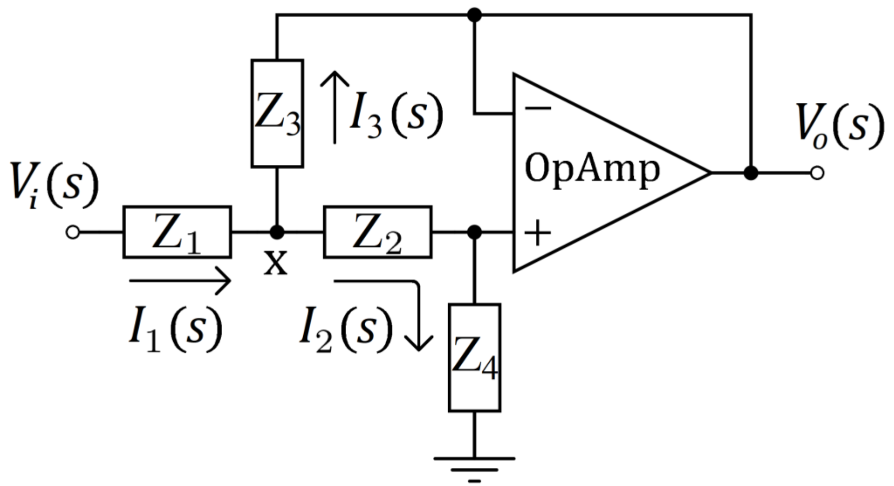


Figura 2.

Aplicando la LCK en el nodo x se tiene que

$$I_1 = I_2 + I_3$$

Solución (continuación)

De la ley de Ohm y considerando que el OpAmp ideal tiene voltaje 0 entre sus terminales $(-)$ y $(+)$, la ec. anterior se puede reescribir como:

$$\frac{V_i - V_x}{Z_1} = \frac{V_x - V_o}{Z_2} + \frac{V_x - V_o}{Z_3}$$

O bien

$$\frac{V_i}{Z_1} = \frac{V_x}{Z_1} + \frac{V_x}{Z_2} - \frac{V_o}{Z_2} + \frac{V_x}{Z_3} - \frac{V_o}{Z_3}$$

Reagrupando los términos de la ecuación anterior, y factorizando V_x y V_o se tiene que:

$$\frac{V_i}{Z_1} = \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}\right) V_x - \left(\frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}\right) V_o \qquad (a)$$

Solución (continuación)

Por otro lado, como el OpAmp ideal tiene impedancia de entrada infinita, de la fig. 2 se tiene que I_2 también circula a través de Z_4, por lo que se tiene que

$$V_x = (Z_2 + Z_4)I_2 \qquad (b)$$

y

$$V_o = Z_4 I_2 \qquad (c)$$

Despejando I_2 de la ec. (c) y sustituyéndola en la ec. (b) se tiene que

$$V_x = (Z_2 + Z_4)\frac{V_o}{Z_4}$$

O bien

$$V_x = \left(\frac{Z_2}{Z_4} + 1\right)V_o \qquad (d)$$

Solución (continuación)

Sustituyendo V_x dado por la ecuación (d) en la ec. (a), se tiene que

$$\frac{V_i}{Z_1} = \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}\right)\left(\frac{Z_2}{Z_4} + 1\right)V_o - \left(\frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}\right)V_o$$

desarrollando el producto $\left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}\right)\left(\frac{Z_2}{Z_4} + 1\right)$ y factorizando V_o en el lado derecho de la ecuación anterior, se tiene que:

$$\frac{V_i}{Z_1} = \left(\frac{Z_2}{Z_1 Z_4} + \frac{Z_2}{Z_2 Z_4} + \frac{Z_2}{Z_3 Z_4} + \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} - \frac{1}{Z_2} - \frac{1}{Z_3}\right)V_o$$

Simplificando

$$\frac{V_i}{Z_1} = \left(\frac{Z_2}{Z_1 Z_4} + \frac{1}{Z_4} + \frac{Z_2}{Z_3 Z_4} + \frac{1}{Z_1}\right)V_o$$

Solución (continuación)

Multiplicando ambos lados de la ec. anterior por Z_1 y simplificando términos se obtiene:

$$V_i = \left(\frac{Z_2}{Z_4} + \frac{Z_1}{Z_4} + \frac{Z_1 Z_2}{Z_3 Z_4} + 1\right) V_o$$

Desarrollando la suma de términos en el lado derecho de la ecuación anterior se obtiene:

$$V_i = \frac{Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3 + Z_1 Z_2 + Z_3 Z_4}{Z_3 Z_4} V_o$$

De la ec. anterior se tiene que

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{Z_3 Z_4}{Z_1 Z_2 + (Z_1 + Z_2) Z_3 + Z_3 Z_4} \qquad (e)$$

Solución (continuación)

Como $Z_1 = R_1$, $Z_2 = R_2$, $Z_3 = \frac{1}{sC_1}$, $Z_4 = \frac{1}{sC_2}$, la ec. anterior resulta en:

$$H(s) = \frac{\frac{1}{s^2 C_1 C_2}}{R_1 R_2 + (R_1 + R_2)\frac{1}{sC_1} + \frac{1}{s^2 C_1 C_2}}$$

Multiplicando y dividiendo el lado derecho de la ec. anterior con $\frac{s^2}{R_1 R_2}$, finalmente se tiene que:

$$H(s) = \frac{\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}{s^2 + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C_1} s + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}} \qquad (4.4)$$

Transformada de Fourier de tiempo continuo

La Transformada de Fourier de una señal $x(t)$ se define como:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt \qquad (\mathrm{F.3})$$

La Transformada Inversa de Fourier de la función $X(j\omega)$ está dada por:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \qquad (\mathrm{F.4})$$

Donde $\omega = 2\pi f$. Si $x(t)$ aperiódica es absolutamente integrable, $X(j\omega)$ converge (existe). Si $x(t)$ es real, la ec. (F.4) puede reescribirse como:

$$x(t) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\infty} |X(j\omega)| \cos(\omega t + \sphericalangle X(j\omega))\, d\omega \qquad (\mathrm{F.4}a)$$

La ec. anterior representa a $x(t)$, real, como la "suma" de una infinidad de señales sinusoidales con amplitudes $|X(j\omega)| \frac{d\omega}{\pi}$ y frec. $\omega \in [0, +\infty)$.

Respuesta en frecuencia

Cuando una señal $x(t)$ es absolutamente integrable, $X(s)$ se puede reducir a la transformada de Fourier de $x(t)$, esto es:

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(j\omega) = X(s)\Big|_{s = j\omega}$$

Lo anterior implica que la T. de Fourier hereda de la T. de Laplace, entre otras, la propiedad de convolución. Considerando esto último, si $x(t)$ y $h(t)$ son señales absolutamente integrables, entonces

$$Y(s) = H(s)X(s)$$

Se reduce a

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$

Si $h(t)$ es la respuesta al impulso de un sistema LTI estable, a $H(j\omega)$ se conoce como la respuesta en frecuencia del sistema.

En términos de magnitudes y fases, la ec. anterior se convierte en:

$$|Y(j\omega)| = |H(j\omega)||X(j\omega)|$$

y

$$\sphericalangle Y(j\omega) = \sphericalangle H(j\omega) + \sphericalangle X(j\omega)$$

Las dos ec. anteriores implican que un sistema LTI estable $h(t)$, transforma una señal de entrada $x(t)$ en una señal de salida $y(t)$, al modificar las amplitudes y las fases de los componentes en frecuencia de $x(t)$ (definidos en la ec. F4.a cuando $x(t)$ es real):

$$x(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} |X(j\omega)| \cos(\omega t + \sphericalangle X(j\omega))\, d\omega$$

$$y(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} |H(j\omega)||X(j\omega)| \cos(\omega t + \sphericalangle X(j\omega) + \sphericalangle H(j\omega))\, d\omega$$

Ejemplo

Dado el siguiente sistema (filtro paso bajas Butterworth de 2do orden con frecuencia de corte $F_c = 1000$[Hz]):

$$H_c(s) = \frac{a^2}{s^2 + \sqrt{2}\, a\, s + a^2}, \qquad a = 2\pi 1000$$

Implementarlo de forma analógica mediante la topología de filtros Sallen-Key de ganancia unitaria.

Solución

Como se determinó en un ejemplo visto en el tema 4, la función de transferencia de un filtro paso-bajas Sallen-Key de ganancia unitaria está dada por la ecuación (4.4):

$$H(s) = \frac{\dfrac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}{s^2 + \dfrac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C_1} s + \dfrac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

Solución (continuación)

Con el fin de determinar los valores de los capacitores y resistores para implementar el filtro $H_c(s)$ con la topología Sallen-Key, al requerir que $H_c(s) = H(s)$ se tiene que:

$$\sqrt{2}a = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C_1} \quad y \quad \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} = a^2$$

De las dos ecuaciones anteriores se tiene que

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(R_1 + R_2)C_2}{R_1 R_2 C_1 C_2} = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} \qquad (1)$$

O bien

$$(R_1 + R_2)C_2 = \sqrt{2}\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}$$

Solución (continuación)

De la ecuación anterior se tiene que

$$(R_1 + R_2)^2 C_2^{\,2} = 2R_1 R_2 C_1 C_2$$

con $\boxed{R_1 = R_2 = R}$ de la ecuación anterior se tiene que

$$4R^2 C_2^{\,2} = 2R^2 C_1 C_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{C_1 = 2C_2}$$

Entonces, del lado derecho de la expresión (1) se tiene que:

$$a = \frac{1}{\sqrt{RR(2C_2)C_2}} = \frac{1}{\sqrt{2}RC_2} = 2\pi 1000 \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = \frac{1}{2\pi 1000\sqrt{2}C_2}}$$

Con $C_2 = 4.7nF$ se tiene que $C_1 = 2(4.7nF) = 9.4nF$

y que $R = 23944.58\,\Omega \quad R \approx 24\mathrm{k}\Omega$

Solución (continuación)

Finalmente, en la figura 3 se muestra el circuito que implementa un sistema (Filtro paso-bajas Butterworth de 2do orden con frecuencia de corte de $F_c = 1000[\mathrm{Hz}]$) con función de transferencia

$$H_c(s) = \frac{a^2}{s^2 + \sqrt{2}\, a\, s + a^2}, \qquad a = 2\pi 1000$$

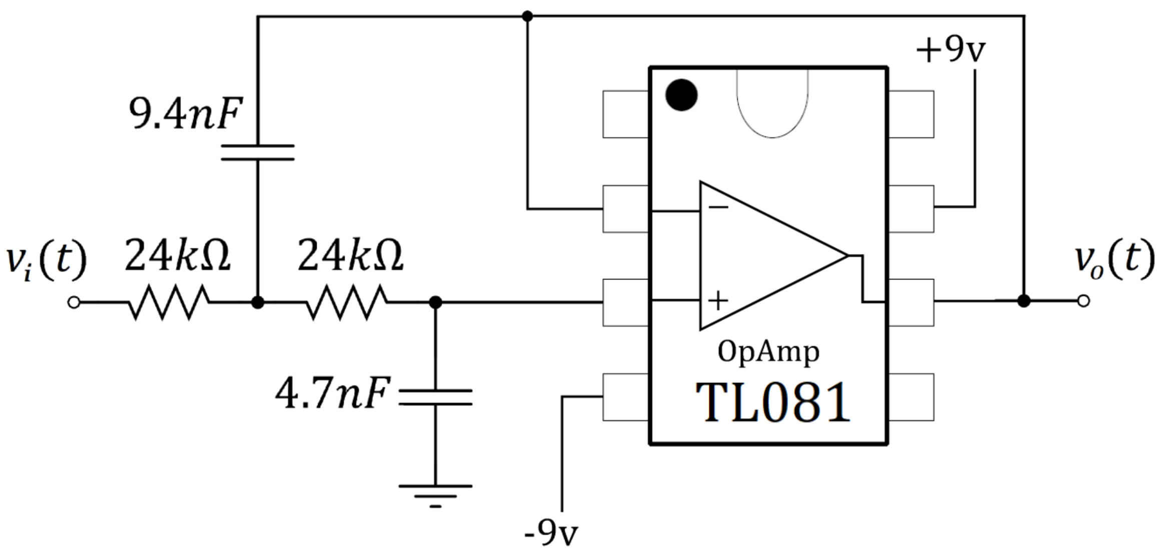
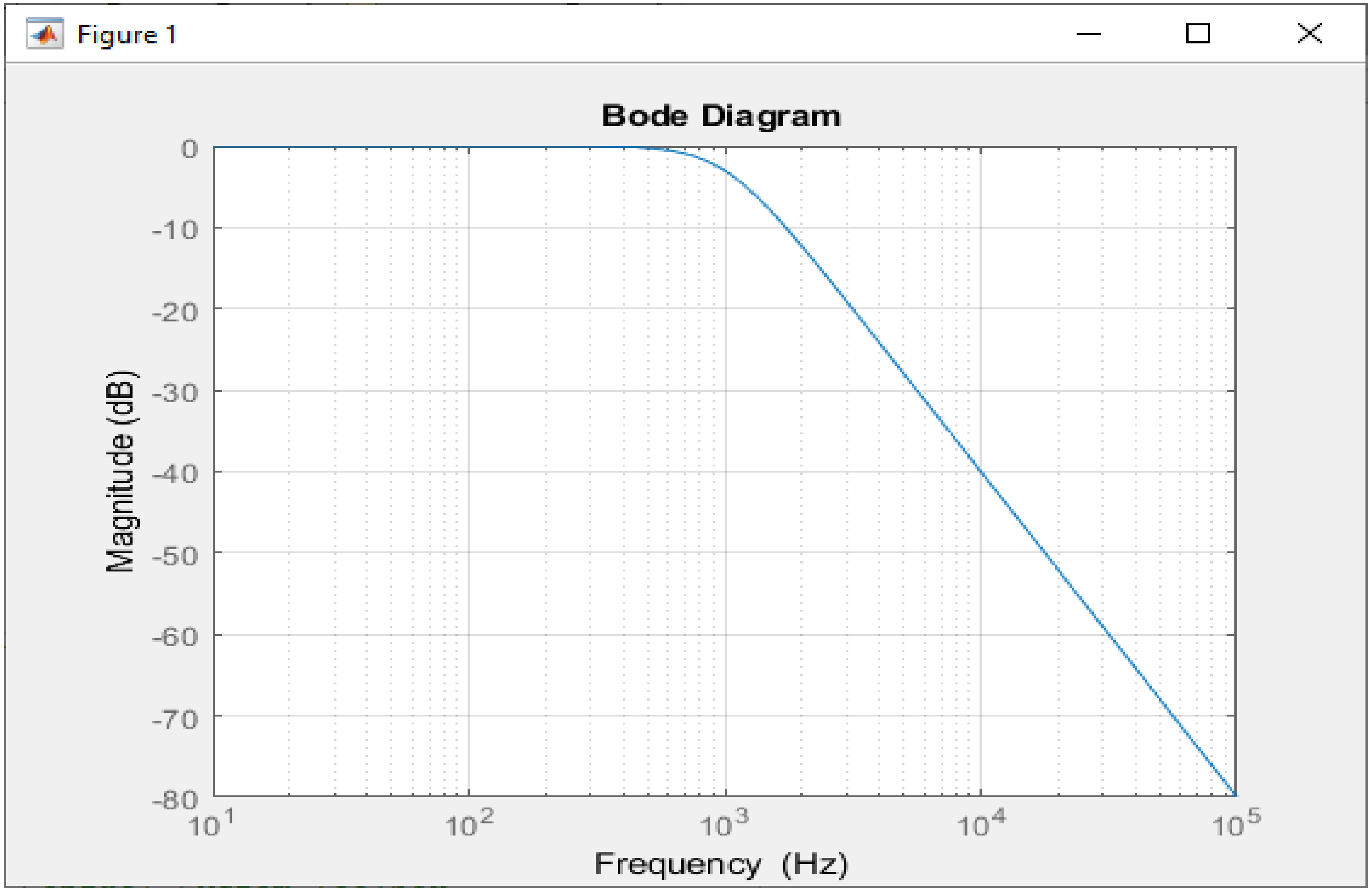


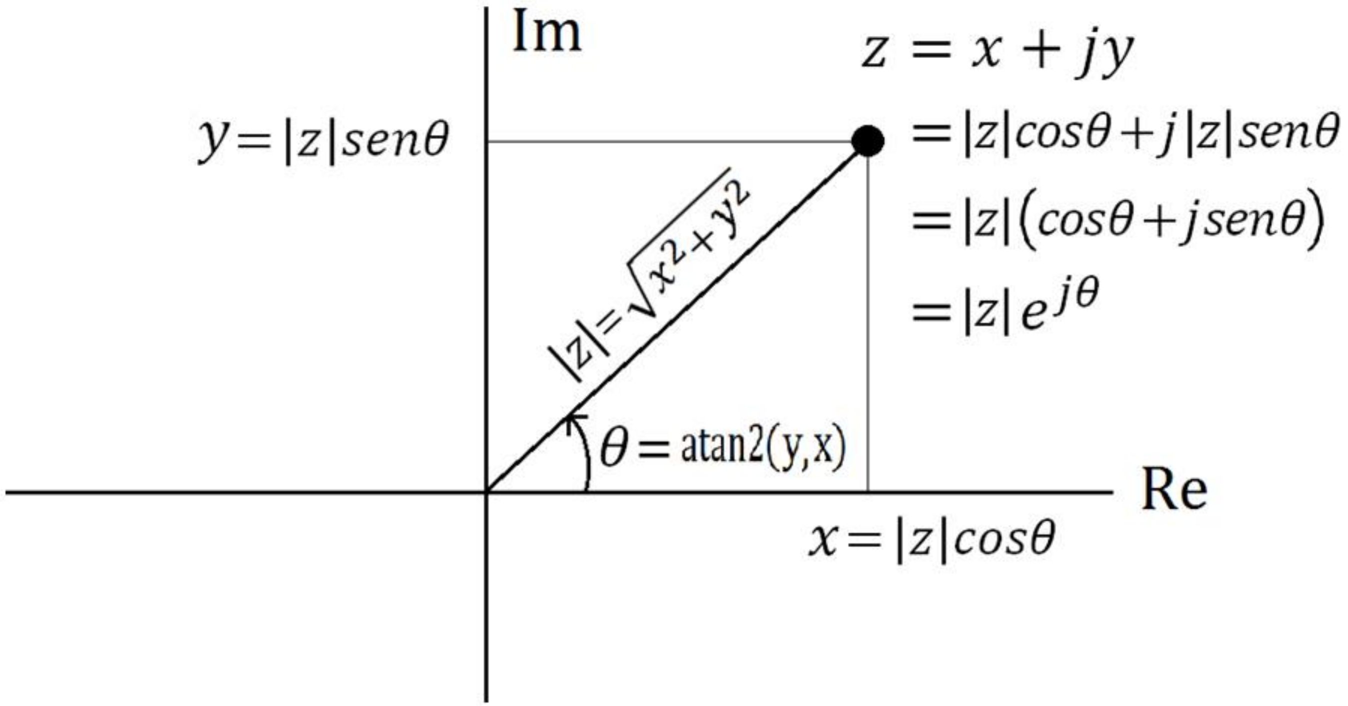
Figura 3.

Diagrama de Bode de $|H_c(j\omega)|$ en Hz con MATLAB




```
a = 2*pi*1000;
Hs = tf(a^2, [1 sqrt(2)*a a^2]);%Usa Control System Toolbox
HwdB = bodeplot(Hs);
setoptions( HwdB,'FreqUnits','Hz','PhaseVisible','off');
grid on
```

Forma magnitud y fase de un número complejo



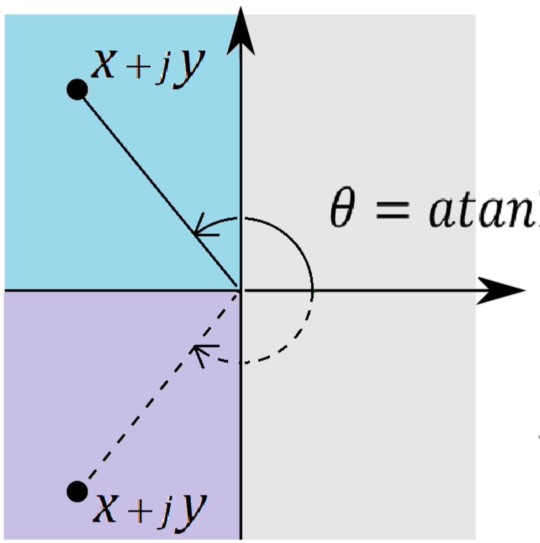
Donde

j : es la unidad imaginaria y se cumple que $j^2 = -1$

$e^{j\theta} = \cos\theta + j\mathrm{sen}\theta$: es la formula de Euler

atan2 : es la función arcotangente de dos argumentos.

Función arcotangente de dos argumentos



$$\theta = atan2(y, x) = \begin{cases} \tan^{-1}(y/x) & si\ x \geq 0, y \neq 0 \\ \tan^{-1}(y/x) + \pi & si\ x < 0, y \geq 0 \\ \tan^{-1}(y/x) - \pi & si\ x < 0, y < 0 \end{cases}$$

$$-\pi < \theta \leq \pi$$

Al analizar sistemas LTI es útil que para $Z, Z_1, Z_2 \in \mathbb{C}$ se tiene que:

$$Z = Z_1 Z_2 \qquad |Z| = |Z_1||Z_2| \qquad \sphericalangle Z = \sphericalangle Z_1 + \sphericalangle Z_2$$

$$Z = \frac{Z_1}{Z_2} \qquad |Z| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|} \qquad \sphericalangle Z = \sphericalangle Z_1 - \sphericalangle Z_2$$