

Teoremas de redes eléctricas

Víctor Manuel Sánchez Esquivel/Antonio Salvá Calleja

Objetivo de aprendizaje

Constatar experimentalmente los Teoremas de *Sustitución*, de *Tellegen*, de *Superposición*, de *Thévenin* y *Norton* y de *Reciprocidad*.

Familiarizar al estudiante con la naturaleza de tales teoremas, y así ser capaz de *comprender* y *entender* su potencial para determinar la solución de problemas teóricos y prácticos o simplificar el estudio, análisis y síntesis de redes eléctricas complejas.

Teorema de Sustitución

El teorema es de carácter general y se puede aplicar a redes eléctricas lineales o no lineales, variantes o invariantes en el tiempo. Su aplicación se restringe a redes eléctricas de parámetros concentrados o sea que satisfagan las leyes de Kirchhoff y que además sean determinísticas, es decir, que no exista incertidumbre acerca de los voltajes y las corrientes eléctricas de rama.

El teorema asevera que si en una rama k arbitraria, no acoplada a ninguna otra rama, circula una corriente eléctrica j_k y en sus terminales hay un voltaje v_k , dicha rama puede sustituirse por una fuente independiente *ideal* de corriente de valor j_k o por una fuente independiente *ideal* de voltaje de valor v_k .

Si la red eléctrica modificada tiene solución única para *todas* las corrientes eléctricas y voltajes de rama, dichas corrientes y voltajes son idénticos a los de la red eléctrica original.

Prueba del teorema

Considere una rama k , arbitraria, que no está acoplada a ninguna otra rama de la red eléctrica. Sean J_k la corriente que circula por ella y V_k el voltaje presente entre sus terminales. Suponga que dicha rama es común a las mallas α y β , como se observa en la figura 1.

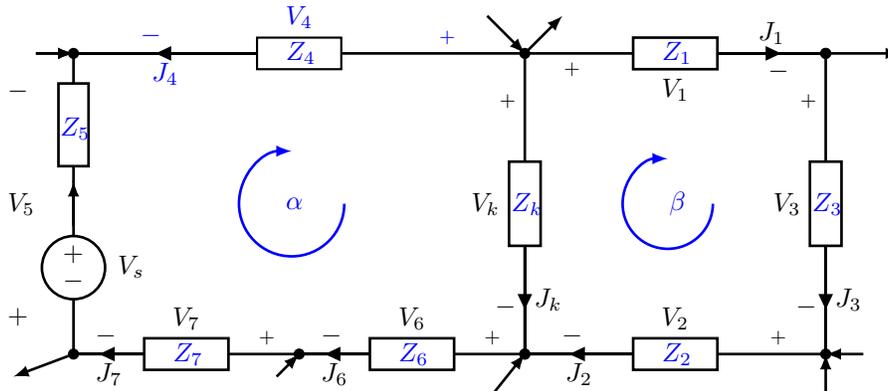


Figura 1. Sección arbitraria de una red eléctrica.

Para la malla α , de la segunda ley de Kirchhoff, se tiene

$$V_k = V_4 - V_5 - V_6 - V_7 \quad (1)$$

Asimismo, para la malla β , se cumple

$$V_k = V_1 + V_2 + V_3 \quad (2)$$

Si la rama k se modifica poniendo en paralelo una fuente independiente *ideal* de voltaje de valor V_k , como se muestra en la figura 2, las ecuaciones (1) y (2) no se modifican.

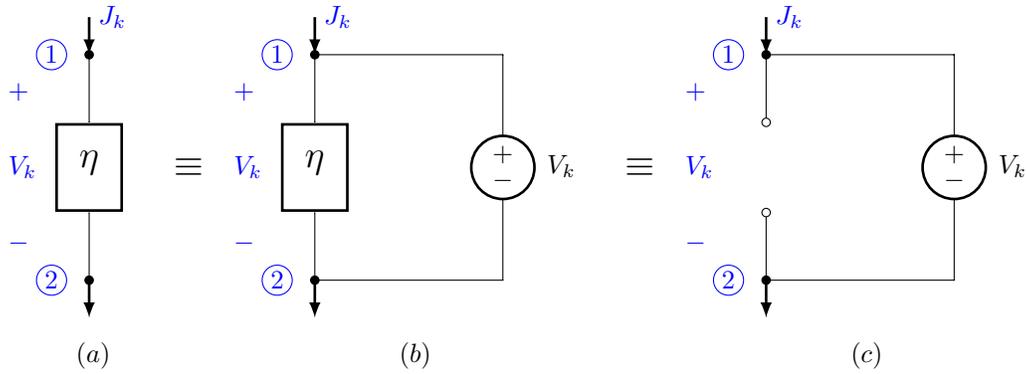


Figura 2. (a) Red eléctrica arbitraria. (b) Fuente independiente *ideal* de voltaje en paralelo con una red eléctrica arbitraria η . (c) Red eléctrica equivalente.

La red eléctrica de la figura 2(a) es equivalente a la red eléctrica de la figura 2(c). Lo anterior se demuestra al aplicar la primera ley de Kirchhoff a los nodos ① y ② en cada una de las redes eléctricas de la figura. Como consecuencia de lo anterior, si la red eléctrica η entre los nodos ① y ② se sustituye por una fuente independiente *ideal* de voltaje de valor V_k las leyes de Kirchhoff de la red eléctrica original no se alteran.

La prueba del teorema, cuando la sustitución se lleva a cabo por una fuente independiente *ideal* de corriente es completamente similar.

Teorema de Tellegen

El teorema de Tellegen asevera que en una red eléctrica de b ramas y l mallas se cumple

$$\sum_{k=1}^b j_k v_k = 0 \quad (3)$$

donde j_k y v_k representan, respectivamente, la corriente eléctrica y el voltaje de la k -ésima rama de la red eléctrica.

Este teorema está íntimamente relacionado con *el principio de la conservación de la energía*. Puesto que el producto de $j_k v_k$ representa la energía por unidad de tiempo que se suministra o se consume en la k -ésima rama; la ecuación (3) establece que la potencia que se suministra a una red eléctrica es igual a la potencia que se consume en dicha red.

Este teorema es de carácter general y se puede aplicar a una red eléctrica lineal o no lineal, variante o invariante en el tiempo; la única restricción es que se deben satisfacer las leyes de Kichhoff, es decir, la red eléctrica debe ser de parámetros concentrados y determinística.

Prueba del teorema

Considere una red eléctrica de b ramas y n nodos, lo que implica, en consecuencia, que el número de mallas¹ es $l = b - (n - 1)$ sin considerar la malla externa. A la malla externa se le asigna el número $l + 1$. Sean I_α e I_β las corrientes de malla de las mallas α y β , respectivamente. Suponga que la rama k es común a las mallas α y β como muestra la figura 3 y a través de ella circula la corriente j_k cuando el voltaje es $v_k = v_{\alpha\beta}$.

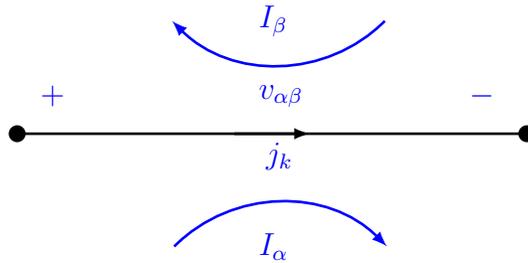


Figura 3. Rama arbitraria k , común a las mallas α y β .

Entonces

$$j_k v_k = (I_\alpha - I_\beta) v_{\alpha\beta} \quad (4)$$

que también se puede escribir como

$$j_k v_k = (I_\beta - I_\alpha) v_{\beta\alpha} \quad (5)$$

Sumando las ecuaciones (4) y (5)

$$j_k v_k = \frac{1}{2} [(I_\alpha - I_\beta) v_{\alpha\beta} + (I_\beta - I_\alpha) v_{\beta\alpha}]$$

al considerar las b ramas y las $l + 1$ mallas de la red eléctrica

$$\sum_{k=1}^b j_k v_k = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{l+1} \sum_{\beta=1}^{l+1} (I_\alpha - I_\beta) v_{\alpha\beta} \quad (6)$$

Se debe advertir, que si no hay una rama que sea común a las mallas α y β , entonces $v_{\alpha\beta} = 0$.

¹Definición de *malla*: trayectoria cerrada que no contiene ninguna rama en su interior. Malla externa: trayectoria cerrada que contiene todas las ramas.

La ecuación (6) se puede escribir de la siguiente manera

$$\sum_{k=1}^b j_k v_k = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{l+1} I_{\alpha} \left(\sum_{\beta=1}^{l+1} v_{\alpha\beta} \right) - \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^{l+1} I_{\beta} \left(\sum_{\alpha=1}^{l+1} v_{\alpha\beta} \right) \quad (7)$$

donde para cada α , $\sum_{\beta=1}^{l+1} v_{\alpha\beta}$ es la suma de todos los voltajes de rama de la malla α y, para cada β , $\sum_{\alpha=1}^{l+1} v_{\alpha\beta}$ es la suma de todos los voltajes de rama de la malla β . Dado que se ha supuesto que se satisfacen las leyes de Kirchhoff, de la segunda ley, cada una de estas sumas es igual a cero y por consiguiente

$$\sum_{k=1}^b j_k v_k = 0$$

Teorema de Superposición

Este teorema se aplica únicamente a redes eléctricas *lineales*, variantes o invariantes en el tiempo, de parámetros concentrados. El teorema señala que *la respuesta de estado cero* de una red eléctrica debido a varias fuentes independientes de entrada actuando simultáneamente, es igual a la suma de *las respuestas de estado cero* debidas a cada una de las fuentes independientes de entrada actuando por separado.

Prueba del teorema

La respuesta de estado cero $y_{zs}(t)$, de una red eléctrica cuyo modelo en variables de estado es

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}(t) &= \underline{A}(t) \underline{x}(t) + \underline{B}(t) \underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) &= \underline{C}(t) \underline{x}(t) + \underline{D}(t) \underline{u}(t)\end{aligned}\quad (8)$$

está dada por la siguiente expresión

$$\underline{y}_{zs}(t) = \int_0^t \underline{C}(t) \underline{\Phi}(t, \sigma) \underline{B}(\sigma) \underline{u}(\sigma) d\sigma + \underline{D}(t) \underline{u}(t) \quad (9)$$

donde $\underline{u}(t)$ es el vector de entrada, de dimensión $(r \times 1)$, de la forma $\underline{u}(t)^T = [u_1(t) \ u_2(t) \ \cdots \ u_r(t)]$ y que se puede escribir como

$$\underline{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u_2(t) \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r \underline{u}_i(t) \quad (10)$$

y $\underline{\Phi}(t, \sigma)$ es *la matriz de transición de estados*, de dimensión $(n \times n)$, y que se puede encontrar a partir de la siguiente relación

$$\underline{\Phi}(t, t_0) = \underline{I} + \int_{t_0}^t \underline{A}(\sigma) d\sigma + \int_{t_0}^t \underline{A}(\sigma) \int_{t_0}^{\sigma} \underline{A}(\sigma_1) d\sigma_1 d\sigma + \cdots + \int_{t_0}^t \underline{A}(\sigma) \int_{t_0}^{\sigma} \underline{A}(\sigma_1) \cdots \int_{t_0}^{\sigma_{k-2}} \underline{A}(\sigma_{k-1}) d\sigma_{k-1} \cdots d\sigma_1 d\sigma + \cdots \quad (11)$$

La i -ésima respuesta de estado cero $\underline{y}_{zs_i}(t)$ causada por la i -ésima fuente independiente de entrada, está dada por

$$\underline{y}_{zs_i}(t) = \int_0^t \underline{C}(t) \underline{\Phi}(t, \sigma) \underline{B}(\sigma) \underline{u}_i(\sigma) d\sigma + \underline{D}(t) \underline{u}_i(t) \quad (12)$$

Comparando las ecuaciones (9) y (12) y teniendo en cuenta a la (10), se tiene

$$\underline{y}_{zs}(t) = \sum_{i=1}^r \underline{y}_{zs_i}(t) \quad (13)$$

comprobándose así la validez del teorema.

Teorema del circuito equivalente de Thévenin y Norton

Este teorema se asigna únicamente a las *redes eléctricas lineales*, variantes o invariantes en el tiempo y de parámetros concentrados. El teorema considera la situación que se presenta en la figura 4. Es importante destacar que la única interacción entre la red eléctrica lineal y la carga arbitraria es la corriente eléctrica $i(t)$ que circula a través de ésta, ningún otro tipo de acoplamiento se permite.

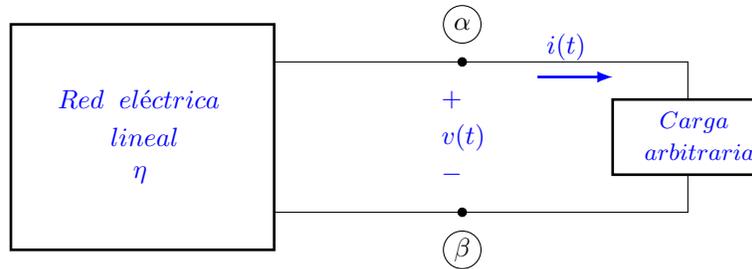


Figura 4. Red eléctrica con una carga arbitraria.

Si la red eléctrica lineal se sustituye por su circuito equivalente de Thévenin o por su circuito equivalente de Norton; tanto la corriente eléctrica $i(t)$ como el voltaje $v(t)$, en la carga eléctrica arbitraria, no se modifican.

Circuito equivalente de Thévenin

El circuito equivalente de Thévenin consiste de una fuente independiente de voltaje $e_{oc}(t)$ en serie con una red eléctrica que se obtiene de la red original al cancelar todas las fuentes independientes de corriente y de voltaje² y con *las condiciones iniciales nulas*, η_o . Las fuentes dependientes no se modifican. La figura 5, aclara esta idea.

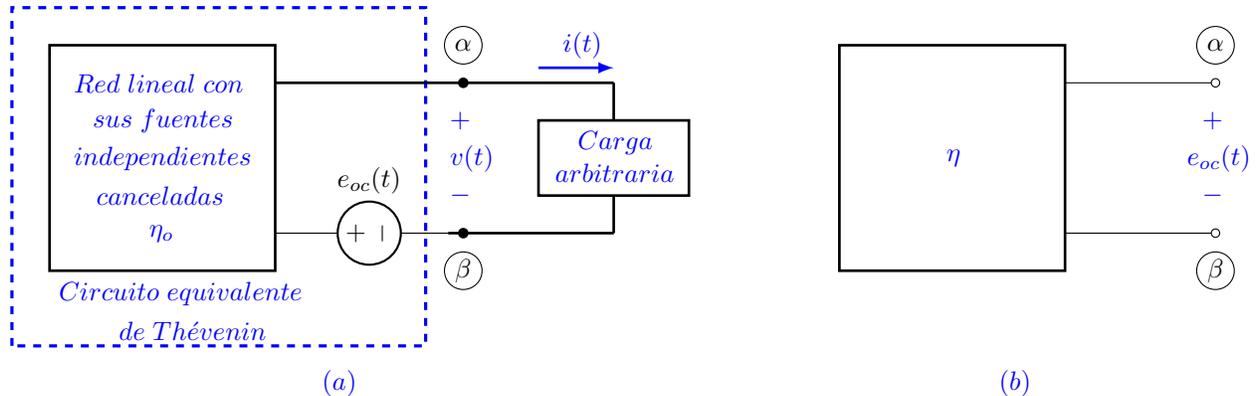


Figura 5. (a) Circuito eléctrico equivalente de Thévenin. (b) Voltaje de circuito abierto $e_{oc}(t)$.

El valor de la fuente independiente de voltaje $e_{oc}(t)$ es igual al voltaje entre los nodos α y β , cuando se desconecta la carga arbitraria. Este voltaje $e_{oc}(t)$ es causado por las fuentes independientes y las condiciones iniciales.

Circuito equivalente de Norton

El circuito equivalente de Norton consiste de una fuente independiente de corriente $i_{sc}(t)$ en paralelo con una red eléctrica que se obtiene de la red original al cancelar todas las fuentes independientes de corriente y de voltaje y con *las condiciones iniciales nulas*, η_o . Las fuentes dependientes no se modifican. La figura 6, esclarece esta idea.

²Las fuentes independientes de voltaje se sustituyen por *corto-circuitos* y las fuentes independientes de corriente se sustituyen por *circuitos-abiertos*.

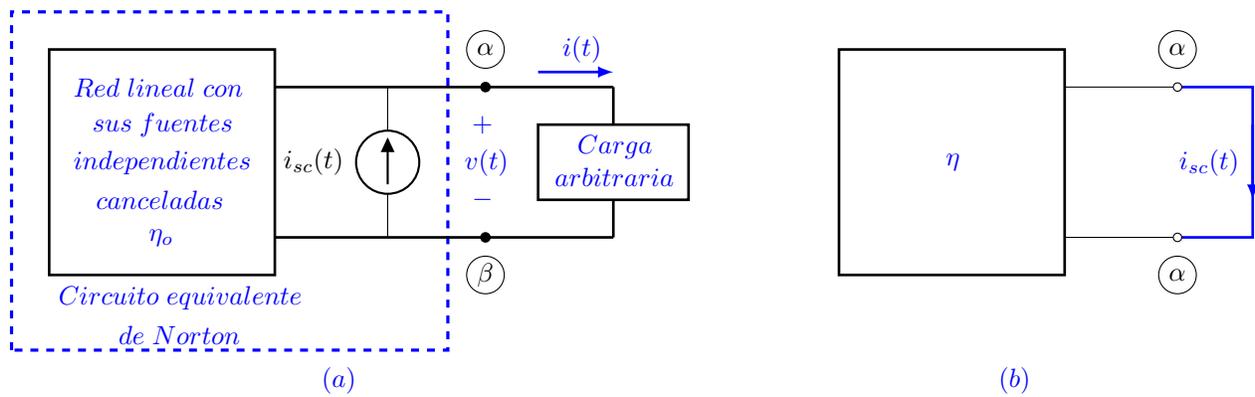


Figura 6. (a) Circuito eléctrico equivalente de Norton. (b) Corriente de corto circuito $i_{sc}(t)$.

El valor de la fuente independiente de corriente $i_{sc}(t)$ es igual a la corriente eléctrica que circula entre los nodos α y β , cuando se *cortocircuita* la carga arbitraria. Esta corriente $i_{sc}(t)$ es causado por las fuentes independientes y las condiciones iniciales.

Es importante subrayar que sobre la carga arbitraria no se ha hecho ninguna suposición, a excepción de que no hay ningún tipo de acoplamiento entre ella y la red eléctrica lineal. Lo anterior implica que la carga arbitraria puede ser lineal o no lineal, variante o invariante en el tiempo.

Prueba del teorema

A continuación se demuestra únicamente el teorema correspondiente al equivalente de Norton. El teorema de Thévenin se demuestra de manera semejante.

El primer paso consiste en sustituir las condiciones iniciales por fuentes independientes. Un capacitor con voltaje inicial se puede sustituir por un capacitor descargado en serie con una fuente independiente de voltaje de valor igual al voltaje inicial y una inductancia con corriente eléctrica inicial se puede sustituir por una inductancia con corriente eléctrica inicial nula en paralelo con una fuente independiente de corriente de valor igual al de la corriente inicial.

Aplicando el teorema de sustitución, la carga arbitraria de la figura 4 se sustituye por una fuente independiente de voltaje de valor igual a $v(t)$, como se muestra en la figura 7.

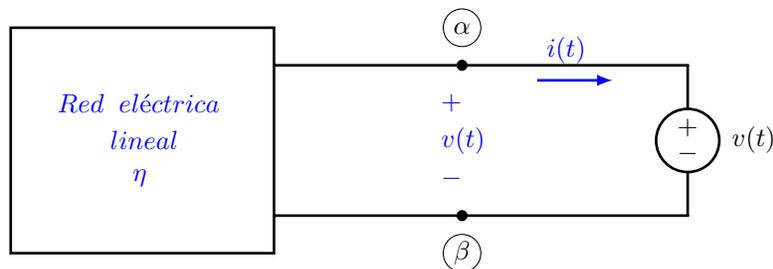


Figura 7. Red eléctrica para demostrar el teorema de Norton.

La corriente eléctrica $i(t)$, en la figura 7, se puede considerar *la respuesta de estado cero* producida por dos conjuntos de fuentes independientes, a saber: la fuente independiente de voltaje que sustituye a la carga arbitraria y las fuentes independientes de la red eléctrica lineal.

Como la red eléctrica que resulta es también lineal, la corriente eléctrica $i(t)$ se puede determinar empleando el teorema de superposición.

Una componente es la corriente eléctrica $i_o(t)$ debida a la fuente de voltaje $v(t)$, cuando se cancelan las fuentes independientes y las condiciones iniciales de la red eléctrica lineal; se obtiene mediante la expresión siguiente

$$i_o(t) = \int_0^t h(t, \tau)v(\tau)d\tau \quad (14)$$

donde $h(t, \tau)$ es la respuesta al impulso de la red eléctrica lineal, esto es, la respuesta de la red en el tiempo t cuando se aplica un impulso unitario en el tiempo τ , con sus fuentes independiente canceladas.

La otra componente es la corriente eléctrica debida a las fuentes independientes de la red eléctrica lineal al cancelar la fuente independiente de voltaje $v(t)$ de la figura 7 es $i_{cc}(t)$. Por consiguiente, la corriente eléctrica total $i(t)$ es la suma de $i_o(t)$ e $i_{cc}(t)$, o sea

$$i(t) = i_o(t) + i_{cc}(t) = \int_0^t h(t, \tau)v(\tau)d\tau + i_{cc}(t) \quad (15)$$

Al sustituir la red lineal de la figura 4 por su circuito equivalente de Nortro, el resultado se muestra en la figura 8

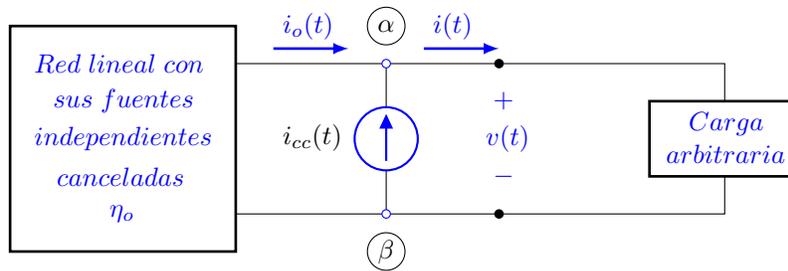


Figura 8. Circuito eléctrico equivalente de Norton y carga arbitraria.

Al aplicar la primera ley de Kirchhoff en el nodo α resulta

$$i(t) = i_o(t) + i_{cc}(t) = \int_0^t h(t, \tau)v(\tau)d\tau + i_{cc}(t) \quad (16)$$

La ecuación (16) es idéntica a la (15), por lo que queda demostrada la validez del teorema.

Teorema de Reciprocidad

El teorema de reciprocidad tiene una aplicación más restringida, pues sólo se destina a redes eléctricas de parámetros concentrados, lineales e invariantes en el tiempo y que no contengan fuentes independientes ni dependientes y tampoco *giradores*³.

El quid fundamental del teorema es que cuando se aplica a un sistema físico, la entrada y la salida se pueden intercambiar *sin que se modifique la respuesta del sistema* para una señal de entrada dada. La línea telefónica constituye el paradigma de lo anterior.

Considere una red eléctrica lineal e invariante en el tiempo, constituida por resistores, inductores, inductores acoplados, capacitores y transformadores. Se acostumbra, emplear el símbolo η_R para designar a las redes que satisfacen estas condiciones.

1. Aserción. Considere las configuraciones de redes eléctricas que se muestran en la figura 9.

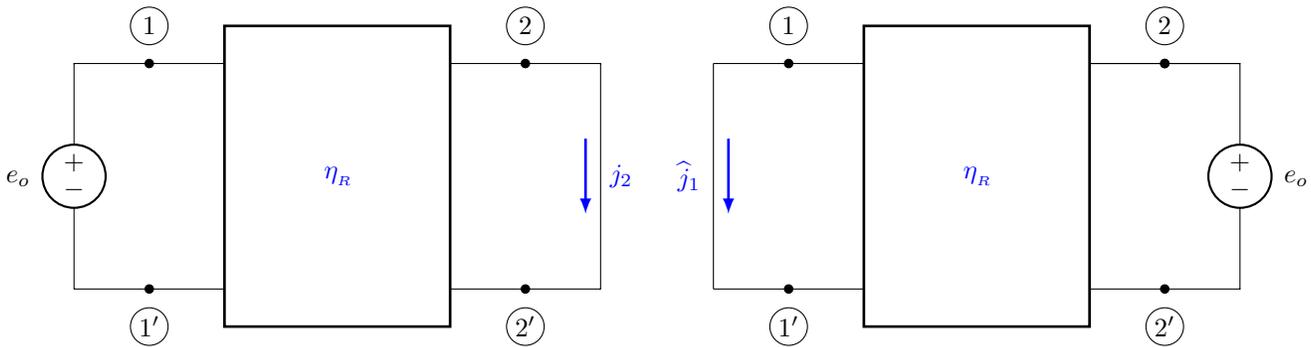


Figura 9. Primer aserto del teorema de reciprocidad.

El teorema de reciprocidad afirma que para cualquier topología y valores de los elementos de la red eléctrica η_R que lo constituyen y para toda forma de onda de la fuente independiente de voltaje e_o , las corrientes eléctricas de corto circuito

$$j_2(t) = \hat{j}_1(t) \quad \forall t$$

En términos de la función de transferencia

$$Y_{21}(s) \triangleq \frac{J_2(s)}{E_o(s)} = Y_{12}(s) \triangleq \frac{\hat{J}_1(s)}{E_o(s)}$$

2. Aserción. Considere las configuraciones de redes eléctricas que se muestran en la figura 10

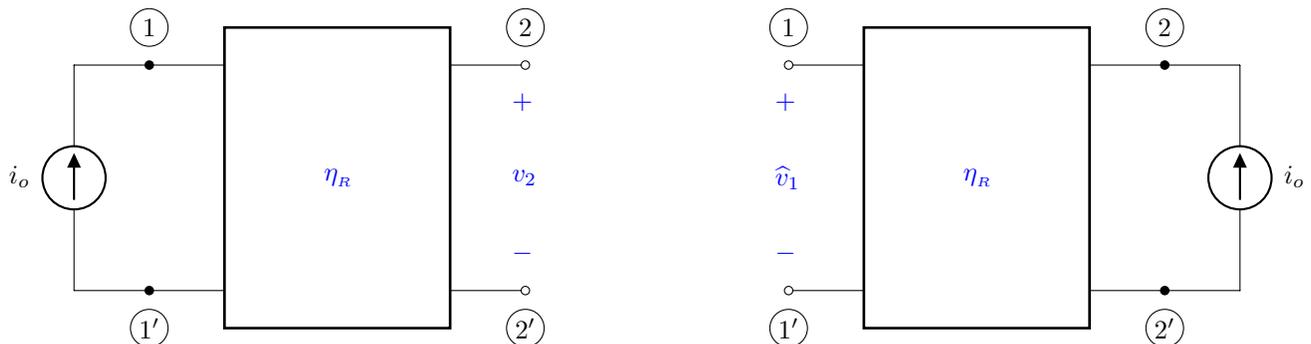


Figura 10. Segundo aserto del teorema de reciprocidad.

³Inversor de impedancia positivo, esto es, si, Z_L es la impedancia de la carga, entonces $Z_{entrada} = \alpha^2/Z_L$.

El teorema de reciprocidad asiente que para cualquier topología y valores de los elementos de la red eléctrica η_R que lo constituyen y para toda forma de onda de la fuente independiente de corriente i_o , los voltajes de circuito abierto

$$v_2(t) = \widehat{v}_1(t) \quad \forall t$$

De igual manera, en términos de la función de transferencia

$$Z_{21}(s) \triangleq \frac{V_2(s)}{I_o(s)} = Z_{12}(s) \triangleq \frac{\widehat{V}_1(s)}{I_o(s)}$$

3. Aserción. Considere las configuraciones de redes eléctricas que se muestran en la figura 11

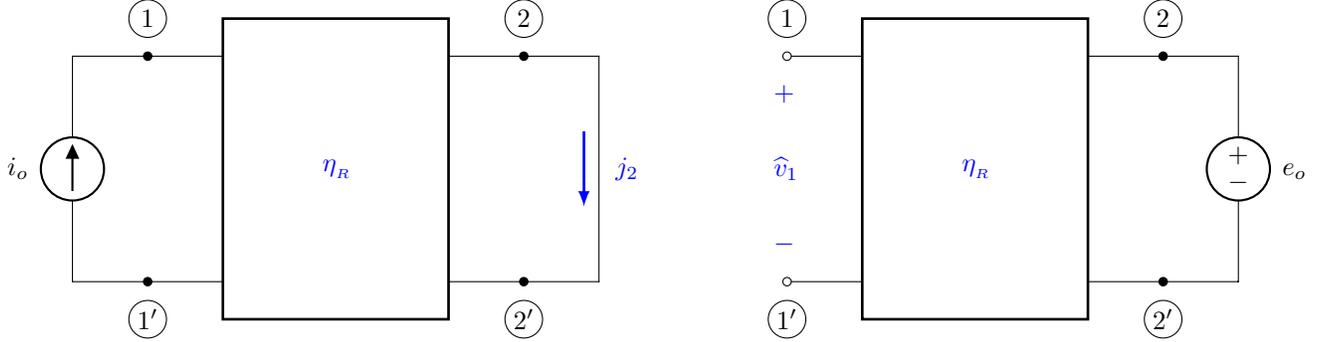


Figura 11. Tercer aserto del teorema de reciprocidad.

El teorema de reciprocidad sostiene que para cualquier topología y valores de los elementos de las redes eléctricas η_R que lo constituyen y para toda forma de onda de las fuentes independientes, si $i_o(t)$ y $e_o(t)$ son iguales para todo t , entonces

$$j_2(t) = \widehat{v}_1(t) \quad \forall t$$

En términos de la función de transferencia

$$H_i(s) \triangleq \frac{J_2(s)}{I_o(s)} = H_v(s) \triangleq \frac{\widehat{V}_1(s)}{E_o(s)}$$

Prueba del teorema

Este teorema se valida con el auxilio del teorema de Tellegen. De acuerdo a las configuraciones planteadas por el teorema y considerando direcciones de referencia asociadas, es obvio que

$$V_1(s)\widehat{J}_1(s) + V_2(s)\widehat{J}_2(s) + \sum_{k=3}^b V_k(s)\widehat{J}_k(s) = 0 \quad (17)$$

y

$$\widehat{V}_1(s)J_1(s) + \widehat{V}_2(s)J_2(s) + \sum_{k=3}^b \widehat{V}_k(s)J_k(s) = 0 \quad (18)$$

Si la k -ésima rama de la red eléctrica es un resistor, un capacitor o un inductor, entonces es cierto que

$$V_k(s)\widehat{J}_k(s) = J_k(s)Z_k(s)\widehat{J}_k(s) = J_k(s)\widehat{V}_k \quad (19)$$

donde $Z_k(s)$ es la impedancia de la k -ésima rama. Si las ramas m y n fueran dos inductores acoplados o las ramas de un transformador ideal, entonces

$$V_m(s)\widehat{J}_m(s) + V_n(s)\widehat{J}_n(s) = \widehat{V}_m(s)J_m(s) + \widehat{V}_n(s)J_n(s) \quad (20)$$

Teniendo presente las ecuaciones (19) y (20), se puede inferir que las sumas de las ecuaciones (17) y (18) son iguales y por consiguiente

$$V_1(s)\widehat{J}_1(s) + V_2(s)\widehat{J}_2(s) = \widehat{V}_1(s)J_1(s) + \widehat{V}_2(s)J_2(s) \quad (21)$$

-
-
1. Aserción. En la primera condición, $V_1(s) = E_o(s)$ y $V_2(s) = 0$. En la segunda condición $\widehat{V}_2(s) = E_o(s)$ y $\widehat{V}_1(s) = 0$. Así, de la ecuación (21) se tiene

$$E_o(s)\widehat{J}_1(s) = E_o(s)J_2(s)$$

2. Aserción. En la primera condición, $J_1(s) = -I_o(s)$ y $J_2(s) = 0$. En la segunda condición $\widehat{J}_2(s) = -I_o(s)$ y $\widehat{J}_1(s) = 0$. Así, de la ecuación (21) se tiene

$$-V_2(s)I_o(s) = -\widehat{V}_1(s)I_o(s)$$

3. Aserción. En la primera condición, $J_1(s) = -I_o(s)$ y $V_2(s) = 0$. En la segunda condición $\widehat{V}_2(s) = E_o(s)$ y $\widehat{J}_1(s) = 0$. Así, de la ecuación (21) se tiene

$$\frac{\widehat{V}_1(s)}{E_o(s)} = \frac{J_2(s)}{I_o(s)}$$

Bibliografía

- Desoer, C. A. and Kuh, E.S. *Basic Circuit Theory*. New York: McGraw-Hill Company, 1969.
- Dorf, R. C., Svoboda, J. A. *Circuitos Eléctricos*. México, D. F.: Alfaomega Grupo Editor, S. A. de C. V., 2011.
- Hayt, W. H., Kemmerly, J. E. *Análisis de circuitos eléctricos en ingeniería*. México: Mc Graw Hill, 2007.
- Sears, F. W. *Fundamentos de Física II. Electricidad y Magnetismo*. Madrid, España: Aguilar, S. A. de Ediciones, 1970.
- Johnson, D. E., Hilburn, J. L., Johnson, J. R. *Basic Electric Circuit Analysis*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1986.
- Huelsman, L. P., Allen, P. E. *Introduction to the theory and design of active filters*. USA: McGraw-Hill Book Company, 1980.