

Escalamiento de Impedancia y de Frecuencia

Víctor Manuel Sánchez Esquivel/Antonio Salvá Calleja

Objetivo de aprendizaje

Introducción a los teoremas de escalamiento de *impedancia* y de *frecuencia*.

Familiarizar al estudiante con la aplicación en la práctica de dichos teoremas.

Estimar la importancia de tales teoremas en el diseño y síntesis de los sistemas o filtros eléctricos.

Introducción teórica

Escalamiento de impedancia

Considere una red eléctrica plana, constituida por elementos lineales e invariantes en el tiempo, cuya entrada es el voltaje de la fuente independiente de voltaje $v_s(t)$ y la salida es el voltaje $v_o(t)$, correspondiente a una rama arbitraria de la misma red, como se observa en la figura 1.

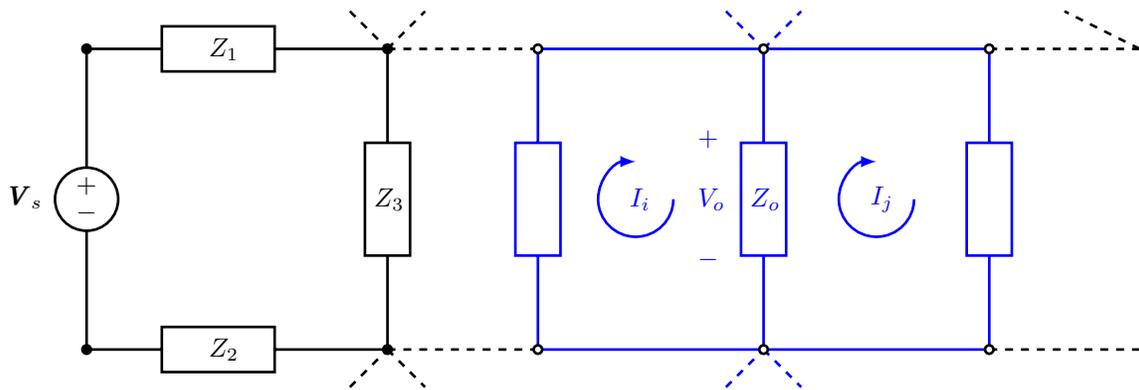


Figura 1. Red eléctrica plana con elementos lineales e invariantes en el tiempo.

El voltaje V_o de la rama eléctrica con impedancia Z_o , está dado por

$$\mathbf{V}_o = Z_o (\mathbf{I}_i - \mathbf{I}_j) \quad (1)$$

La ecuación de mallas de la red eléctrica es

$$\begin{bmatrix} Z_{11}(j\omega) & Z_{12}(j\omega) & \cdots & Z_{1m}(j\omega) \\ Z_{21}(j\omega) & Z_{22}(j\omega) & \cdots & Z_{2m}(j\omega) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ Z_{m1}(j\omega) & Z_{m2}(j\omega) & \cdots & Z_{mm}(j\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{I}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_s \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

resolviendo para \mathbf{I}_i e \mathbf{I}_j

$$\mathbf{I}_i = \frac{\begin{vmatrix} Z_{11} & \cdots & Z_{1(i-1)} & \mathbf{V}_s & Z_{1(i+1)} & \cdots & Z_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_{m1} & \cdots & Z_{m(i-1)} & 0 & Z_{m(i+1)} & \cdots & Z_{mm} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{11} & \cdots & Z_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ Z_{m1} & \cdots & Z_{mm} \end{vmatrix}} \quad (3)$$

$$\mathbf{I}_j = \frac{\begin{vmatrix} Z_{11} & \cdots & Z_{1(j-1)} & \mathbf{V}_s & Z_{1(j+1)} & \cdots & Z_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_{m1} & \cdots & Z_{m(j-1)} & 0 & Z_{m(j+1)} & \cdots & Z_{mm} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{11} & \cdots & & & & & Z_{1m} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ Z_{m1} & \cdots & & & & & Z_{mm} \end{vmatrix}} \quad (4)$$

Si se define

$$\Delta = \begin{vmatrix} Z_{11} & \cdots & & & Z_{1m} \\ \vdots & & & & \vdots \\ Z_{m1} & \cdots & & & Z_{mm} \end{vmatrix} \quad (5)$$

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} Z_{21} & \cdots & Z_{2(i-1)} & Z_{2(i+1)} & \cdots & Z_{2m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_{m1} & \cdots & Z_{m(i-1)} & Z_{m(i+1)} & \cdots & Z_{mm} \end{vmatrix} \quad (6)$$

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} Z_{21} & \cdots & Z_{2(j-1)} & Z_{2(j+1)} & \cdots & Z_{2m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_{m1} & \cdots & Z_{m(j-1)} & Z_{m(j+1)} & \cdots & Z_{mm} \end{vmatrix} \quad (7)$$

Considerando las ecuaciones (1), (3), (4), (5), (6) y (7) se tiene

$$\mathbf{V}_o = Z_o \frac{(\Delta_i - \Delta_j)}{\Delta} \mathbf{V}_s \quad (8)$$

por lo que la función de transferencia resulta

$$\frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_s} = Z_o \frac{(\Delta_i - \Delta_j)}{\Delta} \quad (9)$$

Si todas las impedancias que constituyen la red eléctrica se multiplican por un factor k , de la ecuación (9), se tiene

$$\frac{\mathbf{V}'_o}{\mathbf{V}_s} = k Z_o \frac{(\Delta'_i - \Delta'_j)}{\Delta'} \quad (10)$$

donde por álgebra de determinantes

$$\begin{aligned} \Delta'_i &= k^{m-1} \Delta_i \\ \Delta'_j &= k^{m-1} \Delta_j \\ \Delta' &= k^m \Delta \end{aligned} \quad (11)$$

sustituyendo la ecuación (11) en la ecuación (10)

$$\frac{\mathbf{V}'_o}{\mathbf{V}_s} = k Z_o \frac{k^{m-1} (\Delta_i - \Delta_j)}{k^m \Delta} = \frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_s} \quad (12)$$

de la expresión anterior se concluye lo siguiente:

Si en una red eléctrica se multiplican todas las impedancias por una misma constante, k , la función de transferencia (si ésta es la razón de un voltaje de salida y un voltaje de entrada) no se altera.

En función de los elementos que conforman la red eléctrica:

Si en una red eléctrica todas las resistencias e inductancias que la constituyen se multiplican por una constante k y las capacitancias de la misma red se dividen por la constante k , la función de transferencia (si ésta es la razón de un voltaje de salida y un voltaje de entrada) no se altera.

Escalamiento de frecuencia

La respuesta de estado sinusoidal permanente de un sistema lineal, invariante en el tiempo y estable debida a una entrada de la forma $x(t) = \text{sen}(\omega t)$ está dada por

$$y(t) = |H(j\omega)| \text{sen}(\omega t + \angle H(j\omega)) \quad (13)$$

donde $H(j\omega)$ es la función de transferencia de la red eléctrica $H(s)$ evaluada en el eje imaginario del plano complejo, es decir

$$H(s) \Big|_{s=j\omega} = H(j\omega) = |H(j\omega)| \angle H(j\omega)$$

En una red eléctrica dada de b ramas, la función de transferencia depende de la frecuencia angular y de los valores de los componentes eléctricos que la conforman, esto es

$$H(j\omega) = f(R_1, \dots, R_b, j\omega L_1, \dots, j\omega L_b, j\omega C_1, \dots, j\omega C_b)$$

Para una frecuencia angular ω_1 , se tiene

$$H(j\omega_1) = f(R_1, \dots, R_b, j\omega_1 L_1, \dots, j\omega_1 L_b, j\omega_1 C_1, \dots, j\omega_1 C_b) \quad (14)$$

Para una frecuencia angular ω_2 y suponiendo que las inductancias y las capacitancias de cada rama de la red se pueden modificar

$$H(j\omega_2) = f(R_1, \dots, R_b, j\omega_2 L'_1, \dots, j\omega_2 L'_b, j\omega_2 C'_1, \dots, j\omega_2 C'_b) \quad (15)$$

Ahora, si se desea que las respuestas en frecuencia, dadas por las ecuaciones (14) y (15), presenten las mismas características, se requiere

$$\omega_1 L_n = \omega_2 L'_n \quad \text{para } n = 1, \dots, b \quad (16)$$

y

$$\omega_1 C_n = \omega_2 C'_n \quad \text{para } n = 1, \dots, b \quad (17)$$

por consiguiente, los nuevos valores de los elementos inductivos y capacitivos para que se cumpla lo dicho en el párrafo anterior son

$$L'_n = \frac{\omega_1}{\omega_2} L_n \quad \text{para } n = 1, \dots, b \quad (18)$$

$$C'_n = \frac{\omega_1}{\omega_2} C_n \quad \text{para } n = 1, \dots, b \quad (19)$$

por lo que se infiere: si se desea que la respuesta sinusoidal permanente de una red eléctrica a una cierta frecuencia angular ω_2 presente las mismas características de magnitud y fase que se tienen para una frecuencia ω_1 , los inductores y los capacitores que constituyen la red eléctrica deben modificarse de acuerdo a las ecuaciones (18) y (19).

Bibliografía

- Desoer, C. A. and Kuh, E.S. *Basic Circuit Theory*. New York: McGraw-Hill Company, 1969.
- Dorf, R. C., Svoboda, J. A. *Circuitos Eléctricos*. México, D. F.: Alfaomega Grupo Editor, S. A. de C. V., 2011.
- Hayt, W. H., Kemmerly, J. E. *Análisis de circuitos eléctricos en ingeniería*. México: Mc Graw Hill, 2007.
- Sears, F. W. *Fundamentos de Física II. Electricidad y Magnetismo*. Madrid, España: Aguilar, S. A. de Ediciones, 1970.
- Johnson, D. E., Hilburn, J. L., Johnson, J. R. *Basic Electric Circuit Analysis*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1986.