

# **Resonancia**

Víctor Manuel Sánchez Esquivel/Antonio Salvá Calleja

## Objetivo de aprendizaje

Estudiar y analizar las propiedades de un circuito eléctrico de segundo orden en estado sinusoidal permanente.

Familiarizar al estudiante con el concepto de *la respuesta en frecuencia*.

Determinar la frecuencia de resonancia eléctrica de un sistema eléctrico.

Obtención del ancho de banda de un filtro eléctrico.

## Introducción teórica

### Frecuencia de resonancia y factor de calidad

La configuración del circuito eléctrico RLC serie resonante básico se muestra en la figura 1.

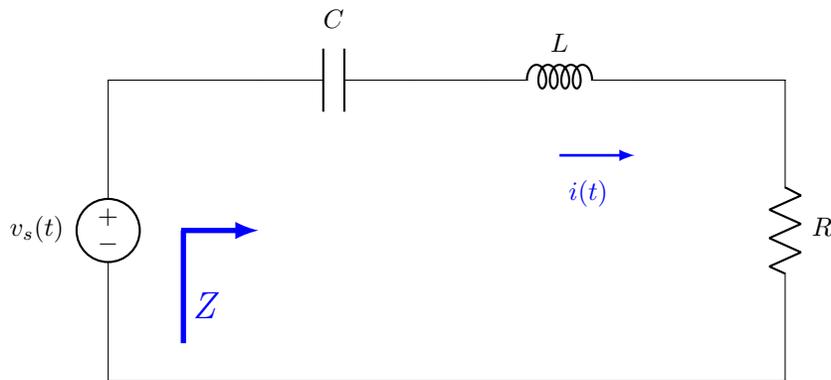


Figura 1. Circuito eléctrico RLC serie resonante básico.

Si el voltaje  $v_s(t)$  de la fuente independiente de voltaje, la entrada, es sinusoidal de frecuencia angular  $\omega$ , la corriente eléctrica  $i(t)$  en estado permanente, también sinusoidal de la misma frecuencia angular  $\omega$ , se puede determinar por medio del análisis siguiente

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_s}{Z(j\omega)}$$

donde  $\mathbf{V}_s$  e  $\mathbf{I}$  son los fasores asociados al voltaje  $v_s(t)$  y la corriente  $i(t)$  respectivamente y

$$Z(j\omega) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

es la impedancia vista desde las terminales de la fuente independiente de la entrada. Así

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_s}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{\mathbf{V}_s}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \quad (1)$$

o también

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_s}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \angle -\arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (2)$$

Cuando<sup>1</sup>

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

<sup>1</sup>Este valor se encuentra derivando la magnitud con respecto a  $\omega$  (la frecuencia angular) e igualándola a cero.

entonces

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_s}{R}$$

De lo anterior, se concluye que la corriente eléctrica presenta un máximo cuando  $\omega = 1/\sqrt{LC}$ . A este valor de frecuencia angular se le denomina *frecuencia de resonancia* y se denota con  $\omega_o$ . Es importante resaltar, que a tal frecuencia de resonancia,  $\omega_o$ , en este circuito eléctrico, el ángulo de desfase entre el voltaje de la entrada y el voltaje en la resistencia es cero.

Aunque la ecuación (1) describe el comportamiento del circuito RLC serie resonante; en la práctica se trabaja con dicha ecuación en una forma más conveniente o adecuada, llamada forma *normalizada*, la cual se obtiene a continuación.

De la ecuación (1)

$$\mathbf{I} = \frac{\frac{\mathbf{V}_s}{R}}{1 + j\frac{1}{R}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

multiplicando y dividiendo la parte imaginaria del denominador por  $\omega_o$  y teniendo presente su valor, resulta

$$\mathbf{I} = \frac{\frac{\mathbf{V}_s}{R}}{1 + j\frac{\omega_o}{R}\left(\frac{\omega L}{\omega_o} - \frac{1}{\omega C\omega_o}\right)} = \frac{\frac{\mathbf{V}_s}{R}}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega}\right)} \quad (3)$$

donde  $Q = \frac{\omega_o L}{R}$ , parámetro que recibe el nombre de *factor de calidad*.

Si se define la función de transferencia como la razón de los fasores asociados al voltaje de la resistencia y al voltaje de la entrada, de la ecuación (3), la magnitud y la fase o argumento están dadas, respectivamente, por

$$|H(j\omega)| = \frac{|\mathbf{V}_R|}{|\mathbf{V}_s|} = \frac{R|\mathbf{I}|}{|\mathbf{V}_s|} = \frac{1}{\left|1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega}\right)\right|} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega}\right)^2}} \quad (4)$$

$$\angle H(j\omega) = \angle \mathbf{V}_R - \angle \mathbf{V}_s = \angle R\mathbf{I} - \angle \mathbf{V}_s = -\arctan Q\left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega}\right) \quad (5)$$

En la figura 2 se muestran las gráficas correspondientes a las ecuaciones (4) y (5), para diferente valores de  $Q$ .

## Ancho de banda

Se define el *Ancho de Banda*,  $AB$ , al intervalo de frecuencias tales que

$$|H(j\omega)| \geq \frac{|H(j\omega)|_{\text{máxima}}}{\sqrt{2}} \quad (6)$$

Para nuestro circuito eléctrico RLC serie, se observa que  $|H(j\omega)|_{\text{máxima}} = 1$ ; y de la ecuación (4) que el ancho de banda es el conjunto de valores de la frecuencia,  $AB = \omega_2 - \omega_1$ , donde  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son los valores de frecuencia que hacen

$$Q\left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega}\right) = \pm 1 \quad (7)$$

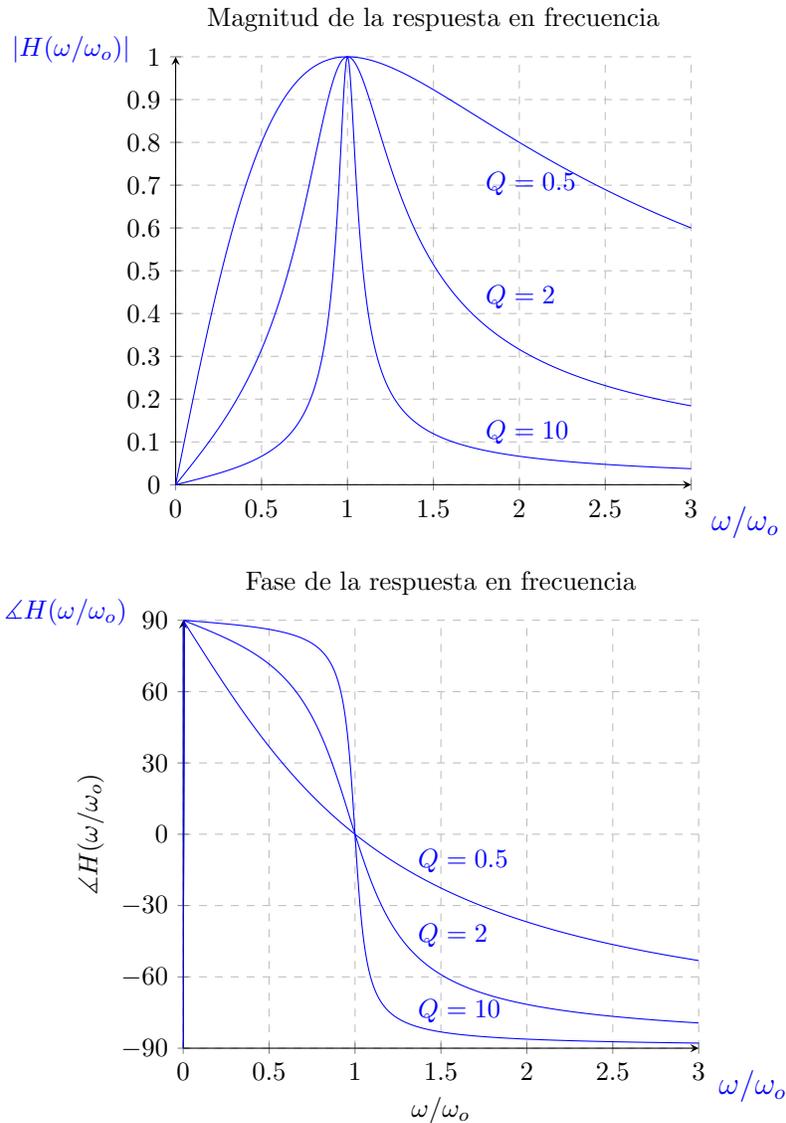


Figura 2. Respuesta en frecuencia del circuito RLC serie.

### Cálculo de $\omega_1$ y $\omega_2$

Considerando el signo positivo del miembro derecho de la ecuación (7)

$$\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega} - \frac{1}{Q} = 0$$

o bien

$$\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2 - \frac{1}{Q}\left(\frac{\omega_o}{\omega}\right) - 1 = 0$$

de donde

$$\frac{\omega}{\omega_o} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4Q^2}}{2Q}$$

con el signo positivo del radical

$$\frac{\omega}{\omega_o} = \frac{1}{2Q} (1 + \sqrt{1 + 4Q^2})$$

como  $2Q < 1 + \sqrt{1 + 4Q^2}$ ; este valor seleccionado corresponde a  $\omega_2$  y por tanto

$$\omega_2 = \frac{\omega_o}{2Q} (1 + \sqrt{1 + 4Q^2}) \quad (8)$$

el otro valor concierne a

$$\omega_1 = \frac{\omega_o}{2Q} (-1 + \sqrt{1 + 4Q^2}) \quad (9)$$

De las expresiones anteriores, resulta

$$Q = \frac{\omega_o}{\omega_2 - \omega_1} \quad (10)$$

y

$$\omega_o = \sqrt{\omega_2 \omega_1} \quad (\text{media geométrica}) \quad (11)$$

## Circuito eléctrico RCL paralelo

La configuración del circuito eléctrico RLC paralelo resonante básico se muestra en la figura 3.

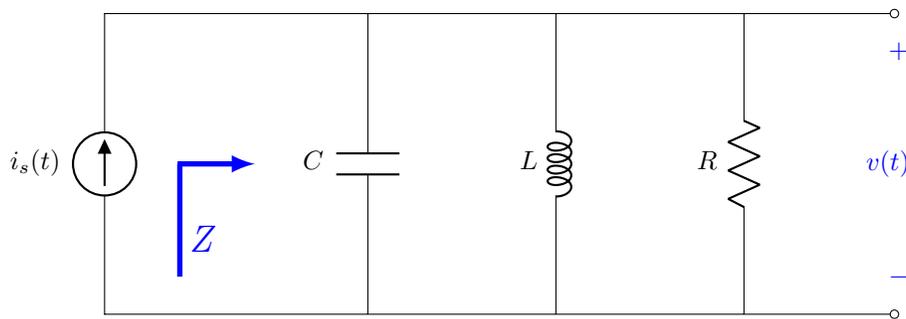


Figura 3. Circuito eléctrico RLC paralelo resonante básico.

Si la fuente independiente de corriente  $i(t)$  es sinusoidal de frecuencia angular  $\omega$ , se puede determinar  $v(t)$  en estado sinusoidal permanente empleando fasores. Por tanto

$$\mathbf{V} = Z(j\omega)\mathbf{I}_s = \frac{\mathbf{I}_s}{Y(j\omega)} = \frac{\mathbf{I}_s}{\frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}} = \frac{\mathbf{I}_s}{G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}$$

reacomodando términos

$$\mathbf{V} = \frac{\frac{\mathbf{I}_s}{G}}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega}\right)} \quad (12)$$

donde

$$Q = \omega_o RC$$

y

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Se debe observar la similitud de la ecuación (12) con la ecuación (3).

Debe ser obvio que en este circuito a la frecuencia de resonancia se maximiza el módulo de voltaje y el desfase entre al corriente  $i_s(t)$  y el voltaje  $v(t)$  es cero.

Si se define la función de transferencia como la razón de los fasores asociados a las corrientes eléctricas en la resistencia y la fuente independiente de corriente, la magnitud y la fase o argumento están dadas, respectivamente, por

$$|H(j\omega)| = \frac{|\mathbf{I}_R|}{|\mathbf{I}_s|} = \frac{|\mathbf{V}|}{|\mathbf{I}_s|} = \frac{1}{\left|1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega}\right)\right|} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega}\right)^2}} \quad (13)$$

$$\angle H(j\omega) = \angle \mathbf{I}_R - \angle \mathbf{I}_s = \angle \frac{\mathbf{V}}{R} - \angle \mathbf{I}_s = -\arctan Q\left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega}\right) \quad (14)$$

### Circuito resonante real

En la práctica, toda inductor presenta pérdidas, por lo que un circuito resonante paralelo real tiene la forma que se observa en la figura 4.

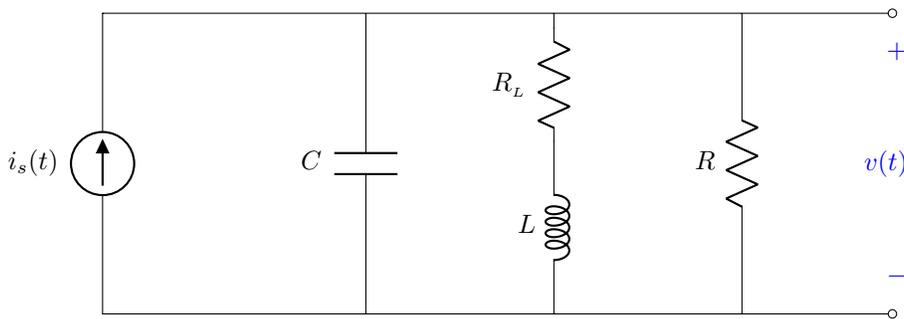


Figura 4. Circuito eléctrico RLC paralelo resonante real.

La admitancia vista desde las terminales de la fuente independiente de corriente es

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{V}} = \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{R_L + j\omega L} \\ &= \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{R_L - j\omega L}{R_L^2 + \omega^2 L^2} \\ &= \frac{1}{R} + \frac{R_L}{R_L^2 + \omega^2 L^2} + j\left(\omega C - \frac{\omega L}{R_L^2 + \omega^2 L^2}\right) \end{aligned}$$

la parte imaginaria se cancela cuando  $\omega = \omega_o$ , esto es

$$\omega C - \frac{\omega L}{R_L^2 + \omega^2 L^2} = 0$$

de donde

$$\omega_o^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R_L^2}{L^2}$$

o

$$\omega_o = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R_L^2}{L^2}}$$

Para finalizar, es importante enfatizar que cualquier red eléctrica cuya función de transferencia contenga un cero y dos polos, podrá, desde el punto de vista de la respuesta en frecuencia, tener una representación semejante a la que se muestra en las ecuaciones (4) y (5)

---

---

## Bibliografía

- Desoer, C. A. and Kuh, E.S. *Basic Circuit Theory*. New York: McGraw-Hill Company, 1969.
- Dorf, R. C., Svoboda, J. A. *Circuitos Eléctricos*. México, D. F.: Alfaomega Grupo Editor, S. A. de C. V., 2011.
- Hayt, W. H., Kemmerly, J. E. *Análisis de circuitos eléctricos en ingeniería*. México: Mc Graw Hill, 2007.
- Sears, F. W. *Fundamentos de Física II. Electricidad y Magnetismo*. Madrid, España: Aguilar, S. A. de Ediciones, 1970.
- Johnson, D. E., Hilburn, J. L., Johnson, J. R. *Basic Electric Circuit Analysis*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1986.