

Análisis del estado sinusoidal permanente de redes eléctricas lineales e invariantes en el tiempo

Víctor Manuel Sánchez Esquivel/Antonio Salvá Calleja

Objetivo de aprendizaje

Realizar una introducción en el estudio de *la respuesta en frecuencia* de un sistema lineal e invariante en el tiempo.

Verificar la forma de la respuesta permanente de una red eléctrica lineal e invariante en el tiempo, cuando la forma de la onda de la señal de entrada es sinusoidal de frecuencia angular ω .

Determinar el valor de variables eléctricas que constituyen una red eléctrica, a partir de la respuesta sinusoidal permanente.

Inferir el desfase entre el voltaje y la corriente eléctrica en un resistor, en un inductor y en un capacitor.

Introducción teórica

En un sistema continuo, lineal, invariante en el tiempo y estable (SCLIE), cuando la entrada es una señal sinusoidal de amplitud A_m y frecuencia (angular) ω , su salida presenta, después que ha transcurrido el tiempo suficiente para que la componente transitoria se haya extinguido, una señal de la misma frecuencia ω , pero con distintas magnitud y fase con respecto a la señal de entrada, esta respuesta recibe el nombre de *respuesta sinusoidal en estado permanente*. En la figura 1 se ilustra el concepto anterior para un SCLIE con función de transferencia $H(s)$, denotándose a la entrada $x(t)$, a la salida permanente $y_p(t)$, a la frecuencia de la señal sinusoidal implicada ω y a la amplitud de la señal de entrada A_m . En la figura 1 se aprecia que la amplitud de la señal de salida permanente es el producto de la amplitud de la señal de entrada multiplicada por la magnitud del complejo $H(j\omega)$, y que el corrimiento de la fase presente en la salida es el argumento del complejo de $H(j\omega)$.

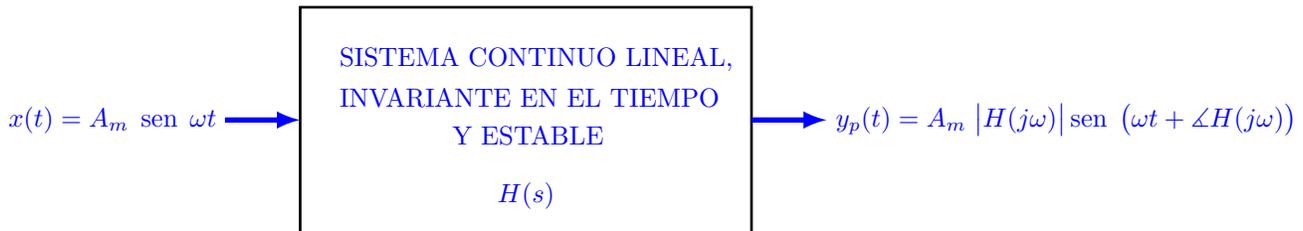


Figura 1. Relación de la entrada sinusoidal y la salida permanente de un SCLIE.

La respuesta permanente de un circuito eléctrico pasivo, lineal e invariante en el tiempo debida a una entrada sinusoidal, como la que se muestra en la figura 1, se puede expresar como

$$y_p(t) = A_m |H(j\omega)| \text{ sen } (\omega t + \angle H(j\omega)) \quad (1)$$

Ejemplo. Suponga que en el circuito eléctrico RC de primer orden, que se muestra en la figura 2, la señal de entrada es

$$v_e(t) = 10 \text{ sen}(3000\pi t) [V] \quad (2)$$

con los valores de la capacitancia y la resistencia $C = 0.1 \mu F$ y $R = 1000 \Omega$, respectivamente.

Determine la señal $v_o(t)$ en estado permanente, denotada como $v_p(t)$.

Solución.

En la ecuación (2), se observa que la amplitud de la señal sinusoidal de la entrada es: $A_m = 10 [V]$ y $\omega = 3000 \pi \left[\frac{\text{rad}}{s} \right]$

Recordando que la función de transferencia de un SCLI denotada como $H(s)$, está dada por

$$H(s) = \frac{\mathcal{L}\{y_{zs}(t)\}}{\mathcal{L}\{x(t)\}} = \frac{Y_{zs}(s)}{X(s)} \quad (3)$$

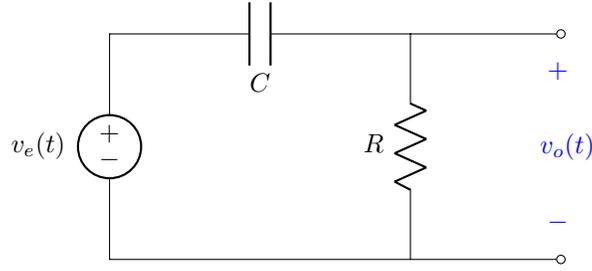


Figura 2. Circuito de primer orden excitado por una señal sinusoidal.

lo que implica que las condiciones iniciales son nulas tanto para $y(t)$ como para $x(t)$.

La función de transferencia del circuito eléctrico de la figura 2 es

$$H(s) = \frac{s}{s + \frac{1}{RC}} \quad (4)$$

Considerando los valores de la capacitancia y la resistencia, se tiene

$$H(j\omega) = \frac{j\omega}{j\omega + 10000} \quad (5)$$

Como $\omega = 3000\pi \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$, con la ecuación (1) y aplicando conceptos elementales de aritmética de números complejos, se observa que la respuesta permanente $v_p(t)$ del circuito de la figura 2 es

$$v_p(t) = 6.8587 \text{ sen}(3000\pi t + 46.70^\circ) \text{ [V]}$$

A continuación, aplicando la transformada de Laplace, se presenta una forma (entre otras) de determinar las expresiones de la figura 1 empleadas para la obtención de la respuesta sinusoidal de estado permanente de un SCLIE.

Respuesta sinusoidal permanente

En general, un SCLIE de orden N , puede modelarse mediante una ecuación diferencial lineal, ordinaria y de coeficientes constantes. Si la entrada al sistema es una señal que se denota por $x(t)$ y la salida como $y(t)$, la ecuación diferencial que representa o modela al sistema es

$$a_N \frac{d^N y(t)}{dt^N} + a_{N-1} \frac{d^{N-1} y(t)}{dt^{N-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_M \frac{d^M x(t)}{dt^M} + b_{M-1} \frac{d^{M-1} x(t)}{dt^{M-1}} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t) \quad (6)$$

donde los coeficientes a_i para $i = 0, 1, \dots, N$ y b_i para $i = 0, 1, \dots, M$, dependen de valores asociados con los elementos físicos que constituyen el sistema. Para un sistema realizable (*en el que la variable independiente es el tiempo*), M siempre es menor o igual a N .

Recordando que la transformada de Laplace de la derivada n -ésima de una función $f(t)$ está dada por

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{d^n y}{dt^n} \right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - s^{n-2} f^{(1)}(0^-) - \dots - f^{(n-1)}(0^-) \quad (7)$$

donde $F(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$ y $f^{(k-1)}(0^-)$ es la $(k-1)$ -ésima derivada de $f(t)$ evaluada en $t = 0^-$.

Aplicando la transformada de Laplace a ambos miembros de la ecuación (6) y considerando la ecuación (7), la transformada de Laplace de la función de la salida $y(t)$ es ¹

¹Es una práctica común, normalizar el denominador de la función de transferencia de tal forma que el coeficiente a_N sea igual a uno.

$$Y(s) = \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \dots + a_1 s + a_0} X(s) + \frac{P_{N-1}(s)}{a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (8)$$

donde P_{N-1} es un polinomio de grado $N - 1$, cuyos coeficientes dependen de los que están presentes en la ecuación (6) y de los valores iniciales de las funciones $y(t)$ y $x(t)$ y sus derivadas de hasta orden $N - 1$ y $M - 1$ respectivamente.

Ahora bien, considerando la ecuación (3), se reconoce en la ecuación (8) que el factor que multiplica a $X(s)$ es la función de transferencia del sistema, que aquí se denota como $H(s)$, y además, teniendo en cuenta que la entrada es una señal sinusoidal de amplitud A_m y frecuencia ω , $Y(s)$ puede expresarse de la siguiente manera

$$Y(s) = H(s) A_m \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} + \frac{P_{N-1}(s)}{a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (9)$$

El primer sumando del miembro derecho de la ecuación (9), se puede expresar como

$$H(s) A_m \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{C}{s - j\omega} + \frac{C^*}{s + j\omega} + G(s) \quad (10)$$

donde $G(s)$ está conformado por la suma de las fracciones parciales del desarrollo del primer elemento del miembro derecho de la ecuación (9), debidas al denominador de $H(s)$. Los valores de C y su complejo conjugado C^* son

$$\begin{aligned} C &= \frac{A_m H(j\omega)}{2j} \\ C^* &= \frac{A_m H(-j\omega)}{-2j} \end{aligned} \quad (11)$$

En el mismo orden de ideas, de la ecuación (8) es evidente que ²

$$y(t) = y_{zs}(t) + y_{zi}(t) \quad (12)$$

Considerando la ecuación (11) y la identidad de Euler se puede visualizar que la respuesta permanente, es

$$y_p(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = A_m M(\omega) \text{sen}(\omega t + \phi(\omega)) \quad (13)$$

donde $M(\omega) = |H(j\omega)|$ y $\phi(\omega) = \angle H(j\omega)$

Los términos de los sumandos de la ecuación (9) presentan en su denominador el polinomio que define los polos de la función de transferencia de $H(s)$. Si el sistema es estable, la función $y_{zi}(t)$ tenderá a cero en un tiempo que depende de los valores explícitos asociados con los elementos que integran el sistema; por lo que en este caso se dice que es un componente transitorio de la salida del sistema y que una vez que declina, prevalece como salida únicamente $y_p(t)$ que se denomina *respuesta sinusoidal permanente*.

De esta forma, para una red eléctrica estable, lineal e invariante en el tiempo, su respuesta permanente cuando la entrada $x(t)$ es una sinusoidal de la forma

$$x(t) = A_m \text{sen}(\omega t) \quad (14)$$

presenta en el estado permanente una salida descrita por la ecuación (13).

La respuesta en frecuencia de un circuito RL pasa bajas de primer orden

La ecuación diferencial que modela el circuito eléctrico RL de la figura ?? es

$$\frac{L}{R} \frac{dv_o(t)}{dt} + \frac{r_L + R}{R} v_o(t) = v_i(t) \quad (15)$$

aplicando la transformada de Laplace y considerando las condiciones iniciales nulas, la función de transferencia resulta

²zero state, zs y zero input, zi por sus siglas en inglés; literalmente *estado cero* y *entrada cero*.

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{\frac{L}{R}s + \frac{r_L + R}{R}} \quad (16)$$

de acuerdo a lo que se explicó en párrafos anteriores, cuando la entrada al circuito eléctrico de la figura ??, es la descrita por la ecuación (17), la respuesta permanente $v_p(t)$ tiene la forma representada por la ecuación (18)

$$v_i(t) = V_m \text{sen}(\omega t) \quad (17)$$

$$v_p(t) = \frac{(R/L) V_m}{\sqrt{\left(\frac{r_L + R}{L}\right)^2 + \omega^2}} \text{sen}(\omega t + \phi) \quad (18)$$

donde

$$\phi = -\arctan\left(\frac{\omega L}{r_L + R}\right) \quad (19)$$

La respuesta en frecuencia de un circuito RC pasa altas de primer orden

La ecuación diferencial que modela el circuito eléctrico RC de la figura ?? es

$$\frac{dv_o(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v_o(t) = \frac{dv_i(t)}{dt} \quad (20)$$

aplicando la transformada de Laplace y considerando las condiciones iniciales nulas, la función de transferencia resulta

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{s}{s + \frac{1}{RC}} \quad (21)$$

de acuerdo a lo que se explicó en párrafos anteriores, cuando la entrada al circuito eléctrico de la figura ??, es la descrita por la ecuación (17), la respuesta permanente $v_p(t)$ tiene la forma representada por la ecuación (22)

$$v_p(t) = \frac{\omega V_m}{\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2 + \omega^2}} \text{sen}(\omega t + \phi) \quad (22)$$

donde

$$\phi = 90^\circ - \arctan(\omega RC) \quad (23)$$

La respuesta en frecuencia de un circuito RLC serie, pasa banda de segundo orden

El circuito eléctrico de la figura ??, tiene la siguiente ecuación diferencial como un modelo que lo describe

$$\frac{d^2v_o(t)}{dt^2} + \frac{r_L + R}{L} \frac{dv_o(t)}{dt} + \frac{1}{LC}v_o(t) = \frac{R}{L} \frac{dv_i(t)}{dt} \quad (24)$$

la función de transferencia se encuentra con la transformada de Laplace de la ecuación diferencial anterior y considerando las condiciones iniciales nulas, así

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{(R/L)s}{s^2 + \frac{r_L + R}{L}s + \frac{1}{LC}} \quad (25)$$

la respuesta permanente debida a la entrada sinusoidal $v_i(t) = V_m \text{sen}(\omega t)$ está dada por la siguiente expresión

$$v_p(t) = \frac{(R\omega/L) V_m}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{r_L + R}{L}\omega\right)^2}} \text{sen}(\omega t + \phi) \quad (26)$$

donde

$$\phi = 90^\circ - \arctan \left(\frac{(r_L + R)\omega}{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)L} \right) \quad (27)$$

En la ecuación (26), se advierte que cuando $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, valor de la frecuencia que se denota $\omega = \omega_o$ y recibe el nombre de *frecuencia de resonancia*, la amplitud de $v_p(t)$ es máxima y corresponde al valor de

$$v_p(t) \Big|_{\text{máxima}} = v_p(t) \Big|_{\omega=\omega_o} = \frac{R V_m}{r_L + R} \quad (28)$$

Asimismo, para valores de la frecuencia $\omega < \omega_o$ y $\omega > \omega_o$, la amplitud de $v_p(t)$ es menor que $v_p(t) \Big|_{\text{máxima}}$. En la figura 3, se presenta la respuesta en frecuencia del circuito eléctrico RLC que se estudia, vista en un osciloscopio, donde se puede verificar la aseveración anterior.

Igualmente, de la ecuación (27) se puede concluir que para $\omega < \omega_o$, el ángulo ϕ es positivo lo que implica que la señal de salida adelanta a la señal de entrada y para $\omega > \omega_o$ el ángulo ϕ es negativo lo que conlleva a establecer que la señal de salida está atrasada con respecto a la señal de entrada. En el límite, estos adelanto y atraso corresponden a $90^\circ (\pi/2$ radianes) cuando $\omega \rightarrow 0$ y $-90^\circ (-\pi/2$ radianes) cuando $\omega \rightarrow \infty$, respectivamente.

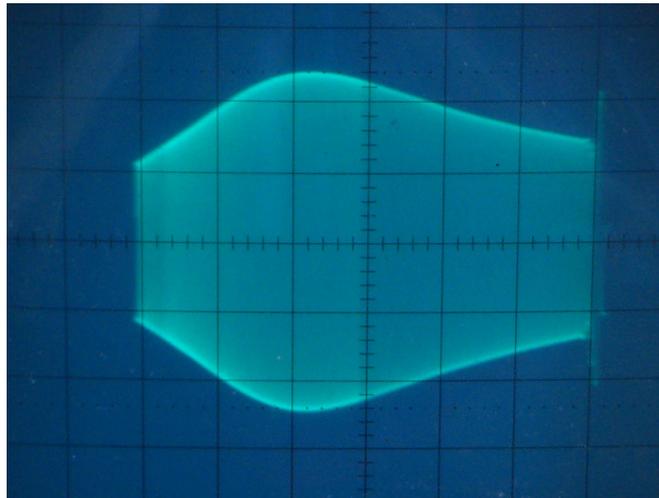


Figura 3. Respuesta en frecuencia del circuito eléctrico de la figura ??

Equipo necesario

- 1 Generador de funciones
- 1 Osciloscopio
- 1 Solenoide

Material necesario

- 1 Resistor de 470Ω , 0.5 watt
- 1 Resistor de $1 \text{ k}\Omega$, 0.5 watt
- 1 Capacitor de $0.1 \mu F$
- 1 Capacitor de $0.01 \mu F$

Cuestionario previo

1. Demuestre la ecuación (15).
2. Demuestre la ecuación (16).
3. Demuestre las ecuaciones (18) y (19).
4. Demuestre la ecuación (20).
5. Demuestre la ecuación (21).
6. Demuestre las ecuaciones (22) y (23).
7. Demuestre la ecuación (24).
8. Demuestre la ecuación (25).
9. Demuestre las ecuaciones (26) y (27).
10. Determine el valor de la frecuencia ω para la cual la amplitud de $v_p(t)$, ecuación (26), del circuito eléctrico RLC serie de la figura ?? es máxima.

Bibliografía

- Desoer, C. A. and Kuh, E.S. *Basic Circuit Theory*. New York: McGraw-Hill Company, 1969.
- Dorf, R. C., Svoboda, J. A. *Circuitos Eléctricos*. México, D. F.: Alfaomega Grupo Editor, S. A. de C. V., 2011.
- Hayt, W. H., Kemmerly, J. E. *Análisis de circuitos eléctricos en ingeniería*. México: Mc Graw Hill, 2007.
- Johnson, D. E., Hilburn, J. L., Johnson, J. R. *Basic Electric Circuit Analysis*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1986.