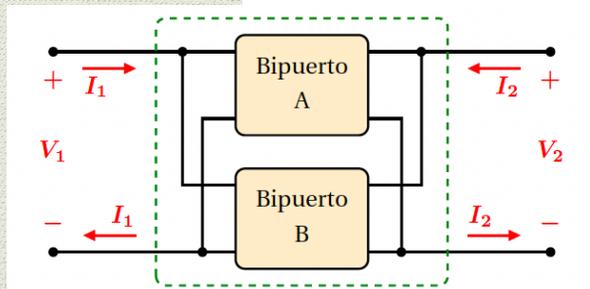
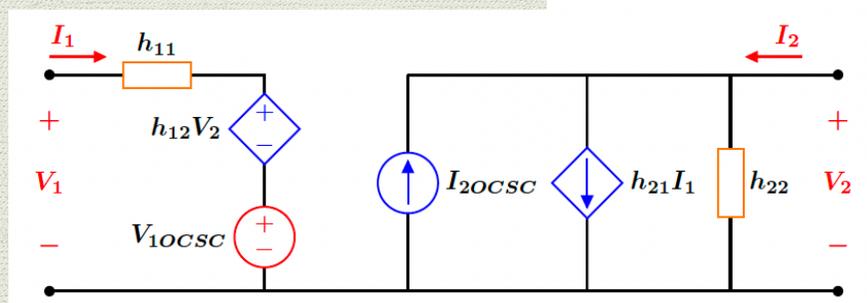
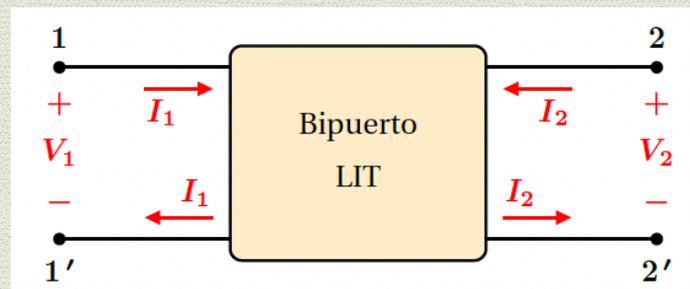




Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ingeniería



Bipuertos

Gloria Mata Hernández

Departamento de Control y Robótica
División de Ingeniería Eléctrica

2024

ÍNDICE GENERAL

1	Bipuertos	5
1.1	Introducción	5
1.2	Redes Eléctricas de dos puertos	6
1.3	Representación matricial de bipuertos	7
1.3.1	Circuito Equivalente con Parámetros de Impedancia (Z)	7
1.4	Circuito Equivalente con Parámetros de Admitancia (Y)	10
1.5	Circuito Equivalente con Parámetros Híbridos (H)	12
1.6	Circuito Equivalente con Parámetros Híbridos Inversos (G)	14
1.7	Circuitos Equivalentes con parámetros de Transmisión y Transmisión inversa (T y T')	14
1.8	Relación entre Parámetros del Bipuerto	15
1.9	Análisis del bipuerto terminado	18
1.10	Conexiones entre Bipuertos	21
1.10.1	Conexión en Cascada	21
1.10.2	Conexión en Serie	22
1.10.3	Conexión en Paralelo	23
1.10.4	Conexión Serie - Paralelo	23
1.10.5	Conexión Paralelo - Serie	24
1.11	Redes Básicas de Bipuertos	25
1.12	Modelo Lineal y Función de Transferencia del Transformador	27
1.13	El Transformador Ideal	29

BIPUERTOS

1.1 Introducción

Las redes de dos puertos, o bipuertos, se caracterizan por tener un circuito con cuatro terminales, o dos pares de terminales: uno de entrada y otro de salida, conocidos como puertos. Estos se encuentran presentes en numerosos sistemas eléctricos y electrónicos de telecomunicaciones, entre otros.

A diferencia del enfoque convencional del análisis mediante métodos de redes eléctricas, que se centra en la determinación de voltajes y corrientes en las diversas ramas del circuito, el concepto de bipuerto permite caracterizar un circuito mediante sus parámetros, generando un modelo matemático que simula y condensa su comportamiento.

En el análisis de bipuertos, se establecen relaciones entre los voltajes y corrientes presentes en los pares de terminales, bajo ciertas condiciones, lo que permite caracterizar completamente el circuito mediante los parámetros del bipuerto.

Un circuito bipuerto puede ser abordado desde dos perspectivas: como un sistema con interconexiones y componentes internos, en cuyo caso se realiza una caracterización teórica; o bien, puede ser tratado como una caja negra, donde la caracterización se lleva a cabo prácticamente mediante la medición de voltajes y corrientes en sus terminales, y su relación.

Los bipuertos, o redes de dos puertos, son fundamentales en una amplia variedad de aplicaciones en ingeniería eléctrica y electrónica debido a su capacidad para representar sistemas complejos de manera simplificada. Algunas de las aplicaciones más comunes de los bipuertos:

En análisis de circuitos eléctricos y electrónicos: Los bipuertos proporcionan una manera eficiente de analizar y comprender el comportamiento de circuitos eléctricos y electrónicos, ya que permiten simplificar la representación de sistemas complejos en términos de sus parámetros característicos.

En el diseño de sistemas de comunicación, como antenas, amplificadores, filtros y transceptores, los bipuertos son utilizados para modelar y analizar el comportamiento de estos dispositivos en términos de su respuesta de entrada y salida, facilitando así el diseño y la optimización de los sistemas.

En el campo de la distribución de energía eléctrica, los bipuertos se utilizan para modelar y estudiar el comportamiento de sistemas de transmisión y distribución, permitiendo predecir el flujo de energía, analizar la estabilidad del sistema y diseñar medidas de protección y control.

En cuanto a aplicaciones de electrónica de potencia, como convertidores de energía, inversores y rectificadores, los bipuertos son empleados para representar y analizar la interacción entre diferentes componentes del sistema, como fuentes de alimentación, cargas y dispositivos de conmutación.

En el diseño de circuitos integrados, los bipuertos son utilizados para modelar y analizar la interconexión entre diferentes bloques funcionales, facilitando la verificación del diseño, la optimización del rendimiento y la reducción de los tiempos de desarrollo.

En sistemas de control y automatización, los bipuertos son empleados para modelar y analizar la interacción entre los sistemas físicos y los controladores, permitiendo diseñar y optimizar algoritmos de control para mejorar la estabilidad, la precisión y la eficiencia del sistema.

Los bipuertos son herramientas fundamentales en una amplia variedad de aplicaciones en ingeniería eléctrica y electrónica, proporcionando una manera eficiente de representar, analizar y diseñar sistemas complejos de manera simplificada. Su versatilidad y capacidad para modelar la interacción entre diferentes componentes hacen que sean indispensables en el desarrollo de tecnologías modernas.

En este contexto, se presenta la metodología para la determinación teórica de los parámetros del bipuerto, que incluyen impedancia (Z), admitancia (Y), híbridos (H), híbridos inversos (G), transmisión (T) y transmisión inversa (T'). Además, se obtienen estos parámetros en diversas configuraciones comunes de bipuertos, lo que facilita su interconexión, ya sea en serie, paralelo o en cascada.

1.2 Redes Eléctricas de dos puertos

Las redes eléctricas con dos terminales especificadas, que incluyen fuentes e impedancias pueden representarse mediante circuitos equivalentes de Thévenin y Norton, los cuales simplifican el análisis de circuitos con respecto a ese par de terminales. El concepto de circuito equivalente puede generalizarse a redes de tres y cuatro terminales, éstas últimas llamadas bipuertos.

El bipuerto es una red eléctrica, la cual tiene dos pares de terminales, uno que representa la entrada y el otro la salida. Es de gran utilidad cuando se requieren conocer las características externas de la red. En caso contrario, los métodos de análisis de redes permiten determinar los voltajes y corrientes en cualquiera de sus elementos.

El análisis de redes mediante la técnica de bipuertos permite caracterizar por completo la red, ya sea con o sin fuentes externas y carga conectada a la red, Esto implica determinar características como funciones de transferencia, impedancias, equivalentes de Thévenin y Norton, entre otros. Además, facilita la determinación de circuitos equivalentes que simplifican enormemente el análisis de una red compleja.

En la [Figura 1.1](#) se muestra el bloque constitutivo de un bipuerto lineal e invariante en el tiempo (LIT) el cual puede incluir impedancias, fuentes dependientes, independientes y/o fuentes debidas a condiciones iniciales de los elementos que integran la red del bipuerto, con terminales $1 - 1'$ y $2 - 2'$ agrupadas en pares. El bipuerto debe cumplir con la propiedad de que la corriente neta que entra a cada par de terminales es cero, es decir, $I_1 = I_1'$ e $I_2 = I_2'$. En esta figura se indican las polaridades de referencia de los voltajes y las direcciones de referencia de las corrientes.

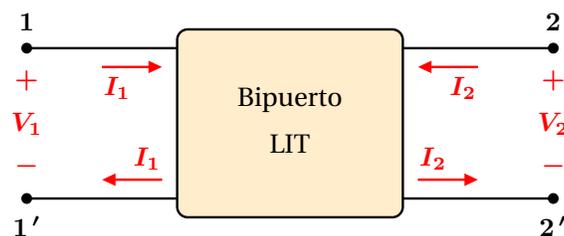


Figura 1.1: Bloque que constituye un bipuerto.

El análisis de circuitos mediante bipuertos puede llevarse a cabo de dos formas: la analítica, calculando los voltajes y corrientes en sus terminales si se conoce el circuito que integra el bipuerto; y a través de la medición de los voltajes y corrientes en sus terminales considerando el bipuerto como una caja negra.

1.3 Representación matricial de bipuertos

En el análisis con bipuertos, las únicas variables de interés son las que definen los puertos I_1 , I_2 , V_1 , y V_2 . La descripción más general del bipuerto se lleva a cabo en a través de la Transformada de Laplace de las variables, mediante el uso de la variable s . Un caso particular es el análisis en estado senoidal permanente en el cual se puede hacer uso de los fasores. En este sentido, las variables del bipuerto se denotarán como $\mathbb{I}_1, \mathbb{I}_2, \mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2$, correspondiendo a la Transformada de Laplace de i_1, i_2, v_1 y v_2 .

De estas cuatro variables dos son dependientes y dos independientes. Las posibles combinaciones se listan en la **Tabla 1.1** junto con los parámetros del circuito equivalente con el cual están asociados. De manera particular, hay seis formas en las que se combinan las cuatro variables, generando seis conjuntos de ecuaciones las cuales pueden considerarse como tres pares de relaciones mutuamente inversas.

El primer conjunto de variables (parámetros Z) relaciona los voltajes de entrada y salida, V_1 y V_2 del bipuerto como funciones de las corrientes de entrada y salida, I_1 e I_2 del mismo, el segundo conjunto (parámetros Y) proporciona las relaciones inversas, esto es, las corrientes de entrada y salida, I_1 e I_2 del bipuerto como funciones de los voltajes de entrada y salida, V_1 y V_2 del mismo. Los pares de variables de los parámetros H y G son relaciones inversas al igual que los parámetros de T y T' , como se observa en la **Tabla 1.1**.

VARIABLES INDEPENDIENTES	VARIABLES DEPENDIENTES	PARÁMETROS DEL CIRCUITO EQUIVALENTE
I_1, I_2	V_1, V_2	Impedancia Z
V_1, V_2	I_1, I_2	Admitancia Y
I_1, V_2	V_1, I_2	Híbrida H
V_1, I_2	I_1, V_2	Híbrida inversa G
$V_2, -I_2$	V_1, I_1	Transmisión T
$V_1, -I_1$	V_2, I_2	Transmisión inversa T'

Tabla 1.1: Variables de Entrada y de Salida de un Bipuerto.

1.3.1 Circuito Equivalente con Parámetros de Impedancia (Z)

El caso general de análisis del bipuerto LIT de la **Figura 1.1**, es el que incluye impedancias, fuentes independientes y dependientes. Para determinar la red equivalente con parámetros de impedancia, consideremos los voltajes V_1 y V_2 como las variables dependientes, y las corrientes I_1 e I_2 , así como las fuentes independientes V_{1CA} y V_{2CA} (si existen), dentro del bipuerto como las variables independientes, obteniendo el par de Ecs. (1.1).

$$\begin{aligned} V_1 &= z_{11} I_1 + z_{12} I_2 + V_{1CA} \\ V_2 &= z_{21} I_1 + z_{22} I_2 + V_{2CA} \end{aligned} \quad (1.1)$$

las cuales se pueden expresar en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{1CA} \\ V_{2CA} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

o bien

$$V = ZI + V_{CA} \quad (1.3)$$

donde la matriz

$$Z = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}$$

es la matriz de impedancias a circuito abierto, z_{ij} son llamados parámetros de impedancia a circuito abierto y V_{CA} es el vector de Voltajes a Circuito Abierto debido a las fuentes independientes dentro del bipuerto. Ya que la red es lineal, se puede aplicar el principio de superposición para obtener los voltajes V_1 y V_2 a través de las contribuciones de cada fuente independiente actuando una a la vez.

Las componentes de V_1 y V_2 causadas por las fuentes independientes dentro de la red se determinan haciendo $I_1 = I_2 = 0$ (terminales 1 y 2 en circuito abierto), como se ilustra en la **Figura 1.2**. Los valores resultantes de V_1 y V_2 se llaman voltajes a circuito abierto, esto es:

$$V_{1CA} = V_1 \left| \begin{array}{l} I_1 = 0 \\ I_2 = 0 \end{array} \right. \quad V_{2CA} = V_2 \left| \begin{array}{l} I_1 = 0 \\ I_2 = 0 \end{array} \right. \quad (1.4)$$

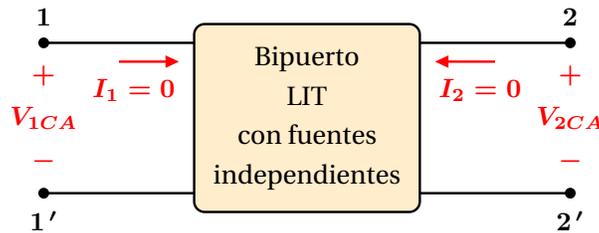


Figura 1.2: V_{1CA} y V_{2CA} se determinan haciendo $I_1 = I_2 = 0$.

La componente de V_1 debida a la corriente I_1 se determina haciendo $I_2 = 0$ (terminal 2 abierta) y todas las fuentes independientes dentro del bipuerto también se fijan a cero en la Ec. (1.1), esta condición se muestra en la **Figura 1.3(a)**. Por lo que, la contribución de V_1 debida a I_1 es

$$V_1 \left| \begin{array}{l} I_1 = 0 \\ FII = 0 \end{array} \right. = z_{11} I_1 \quad (1.5)$$

donde $FII = 0$ denota las Fuentes Independientes Internas fijadas a cero y z_{11} es la impedancia de entrada en el puerto 1 con el puerto 2 a circuito abierto. A partir de la Ec.(1.5) se determina z_{11} y de manera similar se determinan el resto de las constantes de proporcionalidad.

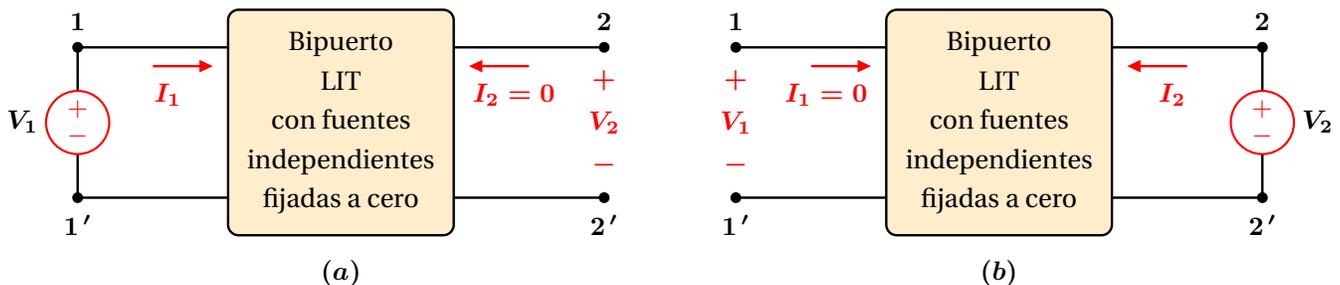


Figura 1.3: (a) Los parámetros z_{11} y z_{21} se determinan haciendo cero I_2 y todas las fuentes independientes internas. (b) Los parámetros z_{12} y z_{22} se determinan haciendo cero I_1 y todas las fuentes independientes internas.

Las constantes z_{11} , z_{21} , z_{12} y z_{22} se llaman parámetros z o de impedancia a circuito abierto del bipuerto y se describen como

$$\begin{aligned}
 z_{11} &= \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{\substack{I_2 = 0 \\ FII = 0}} & z_{12} &= \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{\substack{I_1 = 0 \\ FII = 0}} \\
 z_{21} &= \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{\substack{I_2 = 0 \\ FII = 0}} & z_{22} &= \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{\substack{I_1 = 0 \\ FII = 0}}
 \end{aligned}
 \tag{1.6}$$

donde

z_{11} = Impedancia de entrada vista desde el puerto 1 cuando el puerto 2 está abierto

z_{21} = Impedancia de transferencia cuando el puerto 2 está abierto

z_{12} = Impedancia de transferencia inversa cuando el puerto 1 está abierto

z_{22} = Impedancia de salida vista desde el puerto 2 cuando el puerto 1 está abierto

Por lo tanto, los parámetros de impedancia pueden ser calculados o medidos abriendo primero el puerto 2 y determinando los cocientes V_1/I_1 y V_2/I_1 , como se indica en la **Figura 1.3 (a)**, y luego abriendo el puerto 1 y determinando los cocientes V_1/I_2 y V_2/I_2 , como se muestra en la **Figura 1.3 (b)**.

Las Ecs. (1.4) y (1.6) sintetizadas en la Ec. (1.3), caracterizan por completo al bipuerto de la **Figura 1.1**. Un caso especial de importancia del bipuerto de la **Figura 1.1** es aquel que no contiene fuentes independientes dentro de él. En este caso $V_{CA} = 0$ y la Ec. (1.2) se modifica a

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}
 \tag{1.7}$$

o bien

$$V = ZI$$

de manera que se siguen cumpliendo las mismas condiciones analizadas, quedando ahora los parámetros de impedancia como

$$\begin{aligned}
 z_{11} &= \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} & z_{12} &= \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0} \\
 z_{21} &= \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0} & z_{22} &= \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0}
 \end{aligned}
 \tag{1.8}$$

Existen varios circuitos equivalentes que cumplen con el par de Ecs.(1.1), por lo que el bipuerto de la **Figura 1.1** puede reemplazarse por las redes de la **Figura 1.4**, ya sea que el bipuerto contenga o no fuentes independientes internamente.

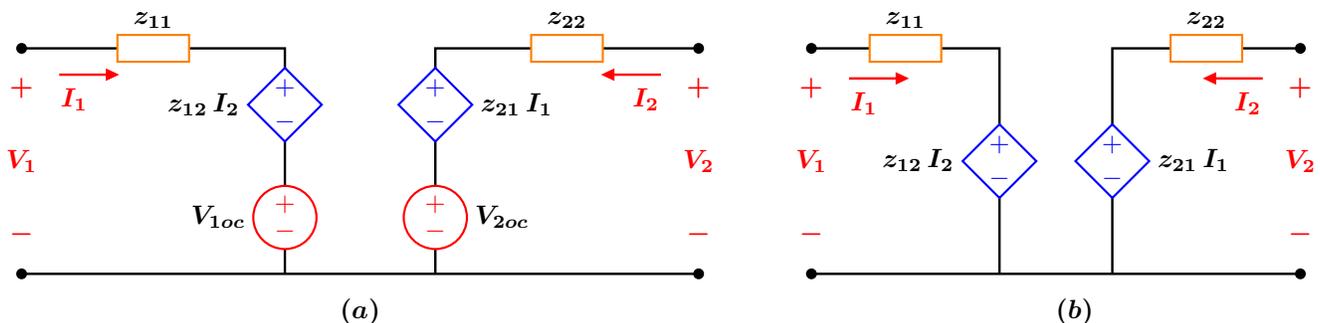


Figura 1.4: Red equivalente del bipuerto con parámetros de impedancia (a) con fuentes independientes (b) sin fuentes independientes.

1.4 Circuito Equivalente con Parámetros de Admitancia (Y)

Otra forma de obtener un equivalente del bipuerto de la **Figura 1.1**, es tomando las corrientes I_1 e I_2 como variables dependientes y los voltaje V_1 , V_2 así como las fuentes independientes (si existen) dentro del bipuerto como las variables independientes. Esta consideración permite plantear el par de ecuaciones de parámetros de admitancia.

$$\begin{aligned} I_1 &= y_{11} V_1 + y_{12} V_2 - I_{1CC} \\ I_2 &= y_{21} V_1 + y_{22} V_2 - I_{2CC} \end{aligned} \quad (1.9)$$

que en forma matricial quedan como

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I_{1CC} \\ I_{2CC} \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

o bien

$$I = YV - I_{CC} \quad (1.11)$$

donde

$$Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$$

es la matriz de admitancias de corto circuito con parámetros y_{ij} , I_{CC} es el vector de corrientes de corto circuito y representa las contribuciones de las corrientes que salen del bipuerto debidas a las fuentes independientes y condiciones iniciales (si existen) de los elementos dentro del bipuerto.

De nuevo, se aplica el principio de superposición para plantear las ecuaciones para I_1 e I_2 como una combinación lineal de las componentes de corriente causadas por las fuentes de voltaje externas y las fuentes independientes dentro del bipuerto. Esto es, las componentes I_{1CC} e I_{2CC} se determinan haciendo $V_1 = V_2 = 0$ (poniendo en corto las terminales $1 - 1'$ y $2 - 2'$), como se ilustra en la **Figura 1.5**.



Figura 1.5: Las corrientes I_{1CC} e I_{2CC} se determinan haciendo $V_1 = V_2 = 0$.

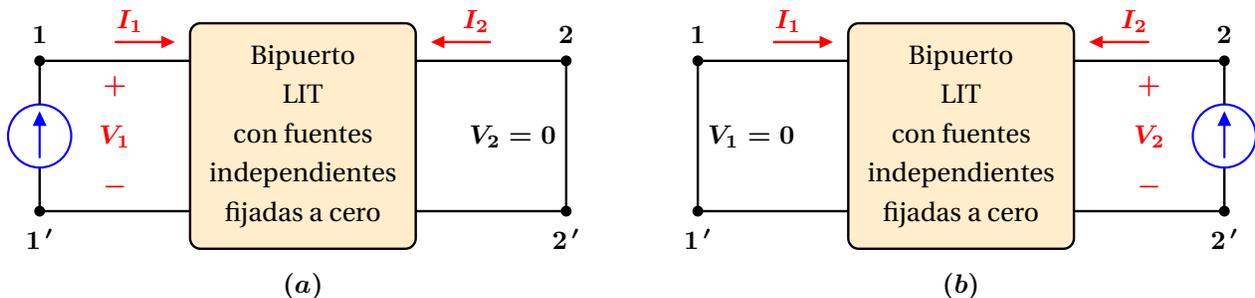


Figura 1.6: Conexiones para determinar los parámetros y_{ij} . (a) y_{11} y y_{21} , (b) y_{12} y y_{22} .

Las corrientes resultantes de I_{1CC} e I_{2CC} se llaman corrientes de corto circuito, esto es:

$$I_{1CC} = -I_1 \left| \begin{array}{l} V_1 = 0 \\ V_2 = 0 \end{array} \right. \quad I_{2CC} = -I_2 \left| \begin{array}{l} V_1 = 0 \\ V_2 = 0 \end{array} \right. \quad (1.12)$$

A partir de las Ecs.(1.9), la componente de I_1 debida al voltaje V_1 se determinan haciendo cero tanto V_2 (corto circuito en las terminales 2 – 2') como todas las fuentes independientes dentro del bipuerto, esto también se muestra en la **Figura 1.6 (a)**, por lo que, la contribución de I_1 debida a V_1 es

$$I_1 \left| \begin{array}{l} V_2 = 0 \\ FII = 0 \end{array} \right. = y_{11} V_1 \quad (1.13)$$

donde $FII = 0$ denota las fuentes independientes internas fijadas a cero y y_{11} es la admitancia de entrada en el puerto 1 con el puerto 2 en corto circuito. A partir de la Ec.(1.13) y las conexiones de la **Figura 1.6** se determina y_{11} y de manera similar se calculan el resto de las constantes de proporcionalidad, obteniendo:

$$\begin{aligned} y_{11} &= \frac{I_1}{V_1} \left| \begin{array}{l} V_2 = 0 \\ FII = 0 \end{array} \right. & y_{12} &= \frac{I_1}{V_2} \left| \begin{array}{l} V_1 = 0 \\ FII = 0 \end{array} \right. \\ y_{21} &= \frac{V_2}{I_1} \left| \begin{array}{l} V_1 = 0 \\ FII = 0 \end{array} \right. & y_{22} &= \frac{I_2}{V_2} \left| \begin{array}{l} V_1 = 0 \\ FII = 0 \end{array} \right. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Las constantes y_{11} , y_{21} , y_{12} y y_{22} se llaman parámetros y o de admitancia en corto circuito del bipuerto y se describen como

y_{11} = Admitancia de entrada vista desde el puerto 1 cuando el puerto 2 está en corto circuito

y_{21} = Admitancia de transferencia cuando el puerto 2 está en corto circuito

y_{12} = Admitancia de transferencia inversa cuando el puerto 1 está en corto circuito

y_{22} = Admitancia de salida vista desde el puerto 2 cuando el puerto 1 está en corto circuito

De lo anterior, los parámetros de admitancia pueden ser calculados o medidos poniendo en corto circuito el puerto 2 y determinado los cocientes I_1/V_1 e I_2/V_1 y luego poniendo en corto el puerto 1 y determinando los cocientes I_1/V_2 e I_2/V_2 . Las Ecs.(1.12) y (1.14) sintetizadas en la Ec. (1.11), también caracterizan por completo al bipuerto de la **Figura 1.1**, desde el punto de vista de admitancias. Además se verifica que

$$Y = Z^{-1}$$

De manera similar al análisis de impedancias, si el bipuerto de la **Figura 1.1** no contiene fuentes independientes dentro de él, entonces $I_{CC} = 0$, de manera que se siguen cumpliendo las mismas condiciones analizadas para los parámetros de admitancia, quedando ahora como

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

o bien

$$I = YV \quad (1.16)$$

en cuyo caso los parámetros cambian a

$$\begin{aligned} y_{11} &= \frac{I_1}{V_1} \left| \begin{array}{l} V_2=0 \end{array} \right. & y_{12} &= \frac{I_1}{V_2} \left| \begin{array}{l} V_1=0 \end{array} \right. \\ y_{21} &= \frac{I_2}{V_1} \left| \begin{array}{l} V_2=0 \end{array} \right. & y_{22} &= \frac{I_2}{V_2} \left| \begin{array}{l} V_1=0 \end{array} \right. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Al igual que con los parámetros de impedancias, existen varios circuitos equivalentes que obedecen las Ecs. (1.9) o las Ecs. (1.15), por lo que el bipuerto de la Figura 1.1 puede también representarse mediante la red equivalente de la Figura 1.7(a) si el bipuerto contiene fuentes independientes o por el de la Figura 1.7(b) si no las incluye.

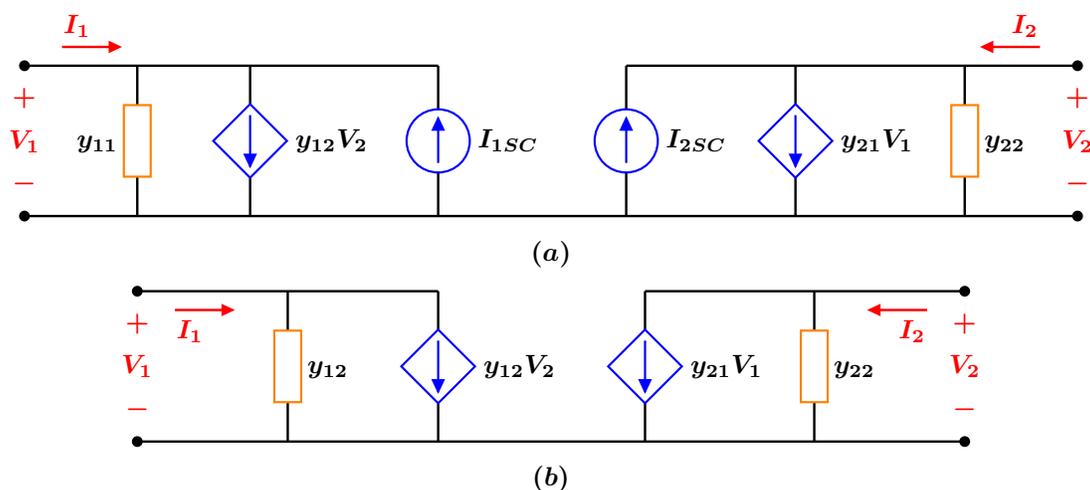


Figura 1.7: Circuitos equivalentes del bipuerto: (a) con fuentes independientes (b) sin fuentes independientes.

1.5 Circuito Equivalente con Parámetros Híbridos (H)

Se puede obtener un tercer circuito equivalente del bipuerto de la Figura 1.1 si se consideran como variables independientes a I_1 y V_2 y como variables dependientes a V_1 , I_2 y las contribuciones de voltaje y corriente debidos a las fuentes dentro del bipuerto. El par de ecuaciones en forma matricial queda como

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{1CACC} \\ -I_{2CACC} \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

o bien

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

para el caso en el que el bipuerto no contenga fuentes independientes internamente. En ambos pares de ecuaciones, Ecs. (1.18) y (1.19), la matriz híbrida H es

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$$

Las cantidades h_{11} , h_{21} , h_{12} y h_{22} son los parámetros híbridos del bipuerto de la Figura 1.1 y se determinan a partir de las Ecs. (1.18), de manera similar a los parámetros descritos anteriormente, como

$$\begin{aligned} h_{11} &= \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{V_2=0, FII=0} & h_{12} &= \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_1=0, FII=0} \\ h_{21} &= \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{V_2=0, FII=0} & h_{22} &= \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{I_1=0, FII=0} \end{aligned}$$

Al aplicar la superposición a V_1 e I_2 , éstos pueden expresarse como la combinación lineal de I_1 , V_2 así como de V_{2CACC} e I_{1CACC} , el voltaje y la corriente debidos a las fuentes independientes dentro del bipuerto. Al igual que en los parámetros de impedancia y admitancia, $FII = 0$ denota que todas las fuentes independientes internas se fijan a cero. Las unidades de h_{11} y h_{22} son ohms y siemens, respectivamente, mientras que h_{12} y h_{21} son adimensionales. El hecho de que los cuatro parámetros no tengan las mismas unidades es la razón por la que estos parámetros se llaman híbridos. A partir de la Ecs. (1.18) se determina que V_{1CACC} e I_{2CACC} están dados por

$$V_{1CACC} = V_1 \left| \begin{array}{l} I_1 = 0 \\ V_2 = 0 \end{array} \right. \quad I_{2CACC} = -I_2 \left| \begin{array}{l} I_1 = 0 \\ V_2 = 0 \end{array} \right.$$

V_{1CACC} e I_{2CACC} se interpretan como el voltaje V_1 y la corriente I_2 , respectivamente, medidos o calculados cuando la corriente $I_1 = 0$ (circuito abierto) y el voltaje $V_2 = 0$ (corto circuito). La expresión de los parámetros híbridos cambia ligeramente si no existen fuentes independientes dentro del bipuerto, es decir, se elimina la condición de fuentes internas y los parámetros se calculan mediante

$$h_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{V_2=0} \quad h_{12} = \frac{V_1}{V_2} \Big|_{I_1=0}$$

$$h_{21} = \frac{I_2}{I_1} \Big|_{V_2=0} \quad h_{22} = \frac{I_2}{V_2} \Big|_{I_1=0}$$

Los circuitos equivalentes asociados con el par de Ecs. (1.18) se muestran en la Figura 1.8. En estos parámetros están asociados a una impedancia de entrada h_{11} , una admitancia de salida h_{22} , una ganancia de voltaje h_{12} y una ganancia de corriente h_{21} . El circuito equivalente del bipuerto con fuentes independientes se muestra en la Figura 1.8(a), mientras que en la Figura 1.8(b) se presenta el modelo que no incluye fuentes independientes dentro del bipuerto.

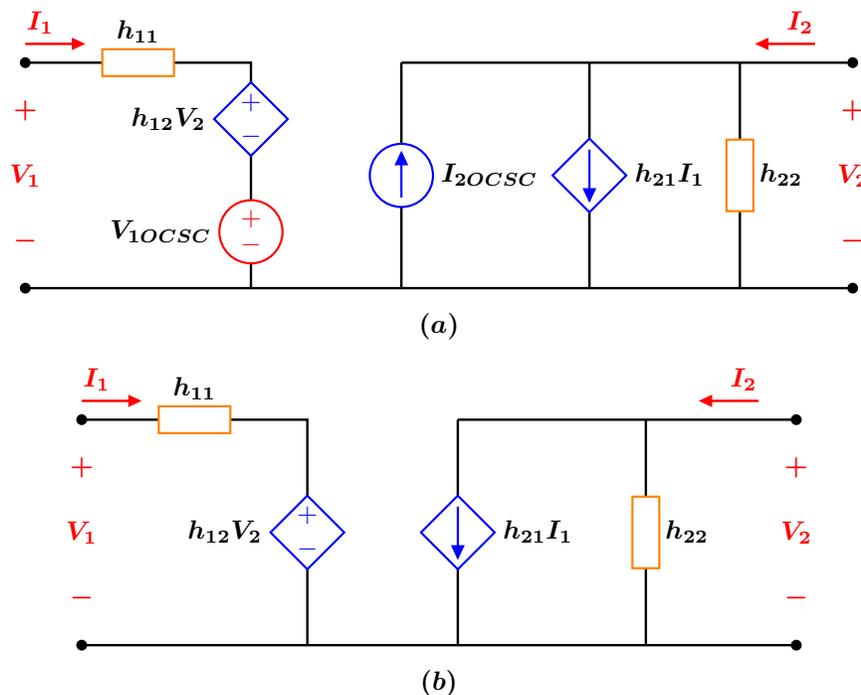


Figura 1.8: Circuitos equivalentes del bipuerto con parámetros h : (a) con fuentes independientes (b) sin fuentes independientes.

1.6 Circuito Equivalente con Parámetros Híbridos Inversos (G)

La segunda matriz híbrida es la de los parámetros Híbridos Inversos G , la forma matricial está dada por

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -I_{1CACCC} \\ V_{2CACCC} \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

si el bipuerto contiene fuentes independientes, o bien

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

para el caso en el que el bipuerto no contenga fuentes independientes dentro de él. En ambos casos

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$$

es la matriz Híbrida Inversa G cuyos elementos son los parámetros g_{ij} , I_{1CACCC} y V_{2CACCC} se interpretan como la corriente I_1 y el voltaje V_2 , respectivamente, medidos o calculados al hacer $V_1 = 0$ (terminales 1 – 1' en corto circuito) e $I_2 = 0$ (terminal 2 – 2' abiertas). También puede verificarse que

$$G = H^{-1}$$

Los parámetros G del bipuerto que contiene fuentes independientes internas se determinan mediante:

$$g_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{\substack{I_2 = 0 \\ IIS = 0}} \quad g_{12} = \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{\substack{V_1 = 0 \\ IIS = 0}}$$

$$g_{21} = \left. \frac{V_2}{V_1} \right|_{\substack{I_2 = 0 \\ IIS = 0}} \quad g_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{\substack{V_1 = 0 \\ IIS = 0}}$$

mientras que los parámetros G del bipuerto sin fuentes independientes internas están dados por

$$g_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{I_2=0} \quad g_{12} = \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{V_1=0}$$

$$g_{21} = \left. \frac{V_2}{V_1} \right|_{I_2=0} \quad g_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{V_1=0}$$

1.7 Circuitos Equivalentes con parámetros de Transmisión y Transmisión inversa (T y T')

Los dos últimos parámetros equivalentes del bipuerto de la **Figura 1.1** son los de Transmisión T y Transmisión inversa T' , la forma matricial del primero relaciona las variables de entrada V_1 e I_1 con las variables de salida V_2 y $-I_2$. En este caso la variable de salida es $-I_2$ en lugar de I_2 (más adelante, en la conexión en cascada, se justifica el cambio de signo).

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

Definiendo la matriz de transmisión T , también llamada matriz de parámetros $ABCD$, como

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

De nuevo, aplicando superposición se determinan los parámetros de transmisión, quedando como

$$t_{11} = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{-I_2=0} \quad t_{12} = \left. \frac{V_1}{-I_2} \right|_{V_2=0}$$

$$t_{21} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{-I_2=0} \quad t_{22} = \left. \frac{I_1}{-I_2} \right|_{V_2=0}$$

Finalmente, si tomamos las variables de entrada V_1 y $-I_1$ como dependientes y las variables de salida V_2 e I_2 como independientes, se tiene en forma matricial las ecuaciones de los parámetros de transmisión inversa

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t'_{11} & t'_{12} \\ t'_{21} & t'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ -I_1 \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

definiendo la matriz de transmisión inversa T' , también llamada matriz de parámetros $A'B'C'D'$, como

$$T' = \begin{bmatrix} t'_{11} & t'_{12} \\ t'_{21} & t'_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix}$$

determinando en este caso los parámetros de transmisión inversos bajo las siguientes restricciones:

$$t'_{11} = \left. \frac{V_2}{V_1} \right|_{-I_1=0} \quad t'_{12} = \left. \frac{V_2}{-I_1} \right|_{V_1=0}$$

$$t'_{21} = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{-I_1=0} \quad t'_{22} = \left. \frac{I_2}{-I_1} \right|_{V_1=0}$$

De manera similar al procedimiento descrito para los parámetros de impedancia, admitancia, se han obtenido el resto de los parámetros, los cuales pueden determinarse mediante cálculo o medición. Como se ha visto, los parámetros de puerto se obtiene ya sea abriendo o poniendo en corto circuito un puerto y corresponden a una impedancia, a una admitancia o a un cociente adimensional de voltajes o corrientes.

1.8 Relación entre Parámetros del Bipuerto

Ya que los seis conjuntos de ecuaciones derivados de las variables de la **Tabla 1.1**, Ecs. (1.7), (1.15), (1.19), (1.21), (1.22) y (1.23), relacionan las mismas variables, los parámetros asociados con cualquier par de ecuaciones deben relacionarse con los parámetros de los demás pares. Esto es, si se conoce una matriz de parámetros se puede determinar las matrices restantes. Cabe destacar que no todos los bipuertos tienen las seis representaciones. De hecho, dependiendo de la configuración de la red que forma el bipuerto, éste puede tener al menos una de las seis representaciones. Debido a la manipulación algebraica que implica relacionar estos parámetros, se llevará a cabo la deducción entre los parámetros z y y , así como entre los parámetros z y t , tomando los conjuntos de ecuaciones del bipuerto que no contiene fuentes independientes internas. El proceso descrito es similar para el resto de las deducciones.

Para determinar los parámetros z en función de los parámetros y se resuelven las Ecs. (1.15) para V_1 y V_2 y se comparan los coeficientes de I_1 e I_2 del resultado obtenido con los coeficientes de las Ecs. (1.7). Esto es, a partir de las Ecs. (1.15) se obtiene

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} I_1 & y_{12} \\ I_2 & y_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix}} = \frac{y_{22}}{\Delta Y} I_1 - \frac{y_{12}}{\Delta Y} I_2 \quad (1.24)$$

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_{11} & I_1 \\ y_{21} & I_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix}} = -\frac{y_{21}}{\Delta Y} I_1 + \frac{y_{11}}{\Delta Y} I_2 \quad (1.25)$$

Al comparar las Ecs. (1.24) y (1.25) con el par de Ecs. (1.7) se obtienen los parámetros z en términos de los parámetros y .

$$z_{11} = \frac{y_{22}}{\Delta Y} \quad z_{12} = -\frac{y_{12}}{\Delta Y} \quad z_{21} = -\frac{y_{21}}{\Delta Y} \quad z_{22} = \frac{y_{11}}{\Delta Y}$$

Para determinar los parámetros z en función de los parámetros t , se modifica el par de Ecs. (1.22) en la forma de el par de Ecs. (1.7) y se comparan los coeficientes. Esto es, a partir de la segunda ecuación del par de Ecs. (1.22) se obtiene

$$V_2 = \frac{1}{t_{21}} I_1 + \frac{t_{22}}{t_{21}} I_2 \quad (1.26)$$

sustituyendo en la primera ecuación del par de Ecs. (1.22) se obtiene ahora

$$V_1 = \frac{t_{11}}{t_{21}} I_1 + \left(\frac{t_{11} t_{22}}{t_{21}} - t_{12} \right) I_2 \quad (1.27)$$

Comparando las Ecs. (1.26) y (1.27) con el par de Ecs. (1.7) se determinan las equivalencias

$$z_{11} = \frac{t_{11}}{t_{21}} \quad z_{12} = \frac{\Delta T}{t_{21}} \quad z_{21} = \frac{1}{t_{21}} \quad z_{22} = \frac{t_{22}}{t_{21}}$$

La [Tabla 1.2](#) resume la conversión de todos los parámetros.

	Z	Y	T	T'	H	G
Z	$z_{11} \quad z_{12}$ $z_{21} \quad z_{22}$	$\frac{y_{22}}{\Delta Y} \quad -\frac{y_{12}}{\Delta Y}$ $-\frac{y_{21}}{\Delta Y} \quad \frac{y_{11}}{\Delta Y}$	$\frac{t_{11}}{t_{21}} \quad \frac{\Delta T}{t_{21}}$ $\frac{1}{t_{21}} \quad \frac{t_{22}}{t_{21}}$	$\frac{t'_{22}}{t'_{21}} \quad \frac{1}{t'_{21}}$ $\frac{\Delta T'}{t'_{21}} \quad \frac{t'_{11}}{t'_{21}}$	$\frac{\Delta H}{h_{22}} \quad \frac{h_{12}}{h_{22}}$ $-\frac{h_{21}}{h_{22}} \quad \frac{1}{h_{22}}$	$\frac{1}{g_{11}} \quad -\frac{g_{12}}{g_{11}}$ $\frac{g_{21}}{g_{11}} \quad \frac{\Delta G}{g_{11}}$
Y	$\frac{z_{22}}{\Delta Z} \quad -\frac{z_{12}}{\Delta Z}$ $-\frac{z_{21}}{\Delta Z} \quad \frac{z_{11}}{\Delta Z}$	$y_{11} \quad y_{12}$ $y_{21} \quad y_{22}$	$\frac{t_{21}}{t_{12}} \quad -\frac{\Delta T}{t_{12}}$ $-\frac{1}{t_{12}} \quad \frac{t_{11}}{t_{12}}$	$\frac{t'_{11}}{t'_{12}} \quad -\frac{1}{t'_{12}}$ $-\frac{\Delta T'}{t'_{12}} \quad \frac{t'_{22}}{t'_{12}}$	$\frac{1}{h_{11}} \quad -\frac{h_{21}}{h_{11}}$ $\frac{h_{12}}{h_{11}} \quad \frac{\Delta H}{h_{11}}$	$\frac{\Delta G}{g_{22}} \quad -\frac{g_{12}}{g_{22}}$ $-\frac{g_{21}}{g_{22}} \quad \frac{1}{g_{22}}$
T	$\frac{z_{11}}{z_{21}} \quad \frac{\Delta Z}{z_{21}}$ $-\frac{1}{z_{21}} \quad \frac{z_{22}}{z_{21}}$	$-\frac{y_{22}}{y_{21}} \quad \frac{1}{y_{21}}$ $-\frac{\Delta Y}{y_{21}} \quad -\frac{y_{11}}{y_{21}}$	$t_{11} \quad t_{12}$ $t_{21} \quad t_{22}$	$\frac{t'_{22}}{\Delta T'} \quad \frac{t'_{12}}{\Delta T'}$ $\frac{t'_{21}}{\Delta T'} \quad \frac{t'_{11}}{\Delta T'}$	$-\frac{\Delta H}{h_{21}} \quad \frac{h_{11}}{h_{21}}$ $-\frac{h_{22}}{h_{21}} \quad -\frac{1}{h_{21}}$	$\frac{1}{g_{21}} \quad \frac{g_{22}}{g_{21}}$ $\frac{g_{11}}{g_{21}} \quad \frac{\Delta G}{g_{21}}$
T'	$\frac{z_{22}}{z_{12}} \quad \frac{\Delta Z}{z_{12}}$ $\frac{1}{z_{12}} \quad \frac{z_{11}}{z_{12}}$	$-\frac{y_{11}}{y_{12}} \quad -\frac{1}{y_{12}}$ $-\frac{\Delta Y}{y_{12}} \quad -\frac{y_{22}}{y_{12}}$	$\frac{t_{22}}{\Delta T} \quad \frac{t_{12}}{\Delta T}$ $\frac{t_{21}}{\Delta T} \quad \frac{t_{11}}{\Delta T}$	$t'_{11} \quad t'_{12}$ $t'_{21} \quad t'_{22}$	$\frac{1}{h_{12}} \quad \frac{h_{11}}{h_{12}}$ $\frac{h_{22}}{h_{12}} \quad \frac{\Delta H}{h_{12}}$	$-\frac{\Delta G}{g_{12}} \quad -\frac{g_{22}}{g_{12}}$ $-\frac{g_{11}}{g_{12}} \quad -\frac{1}{g_{12}}$
H	$\frac{\Delta Z}{z_{22}} \quad \frac{z_{12}}{z_{22}}$ $-\frac{z_{21}}{z_{22}} \quad \frac{1}{z_{22}}$	$\frac{1}{y_{11}} \quad -\frac{y_{12}}{y_{11}}$ $\frac{y_{21}}{y_{11}} \quad \frac{\Delta Y}{y_{11}}$	$\frac{t_{12}}{t_{22}} \quad \frac{\Delta T}{t_{22}}$ $-\frac{1}{t_{22}} \quad \frac{t_{21}}{t_{22}}$	$\frac{t'_{12}}{t'_{11}} \quad \frac{1}{t'_{11}}$ $-\frac{\Delta T'}{t'_{11}} \quad \frac{t'_{21}}{t'_{11}}$	$h_{11} \quad h_{12}$ $h_{21} \quad h_{22}$	$\frac{g_{22}}{\Delta G} \quad -\frac{g_{12}}{\Delta G}$ $-\frac{g_{21}}{\Delta G} \quad \frac{g_{11}}{\Delta G}$
G	$\frac{1}{z_{11}} \quad -\frac{z_{12}}{z_{11}}$ $\frac{z_{21}}{z_{11}} \quad \frac{\Delta Z}{z_{11}}$	$\frac{\Delta Y}{y_{22}} \quad \frac{y_{12}}{y_{22}}$ $-\frac{y_{21}}{y_{22}} \quad \frac{1}{y_{22}}$	$\frac{t_{21}}{t_{11}} \quad -\frac{\Delta T}{t_{11}}$ $\frac{1}{t_{11}} \quad \frac{t_{12}}{t_{11}}$	$\frac{t'_{21}}{t'_{22}} \quad -\frac{1}{t'_{22}}$ $\frac{\Delta T'}{t'_{22}} \quad \frac{t'_{12}}{t'_{22}}$	$\frac{h_{22}}{\Delta H} \quad -\frac{h_{12}}{\Delta H}$ $-\frac{h_{21}}{\Delta H} \quad \frac{h_{11}}{\Delta H}$	$g_{11} \quad g_{12}$ $g_{21} \quad g_{22}$

Tabla 1.2: Conversión de parámetros de bipuertos.

	Z	Y	T	T'	H	G
El bipuerto es recíproco si	$z_{12} = z_{21}$	$y_{12} = y_{21}$	$\Delta T = 1$	$\Delta T' = 1$	$h_{12} = -h_{21}$	$g_{12} = -g_{21}$
El bipuerto es recíproco y simétrico si	$z_{11} = z_{22}$	$y_{11} = y_{22}$	$t_{11} = t_{22}$	$t'_{11} = t'_{22}$	$\Delta H = 1$	$\Delta G = 1$

1.9 Análisis del bipuerto terminado

El bipuerto terminado corresponde a las conexiones que se realizan externamente, es decir, de excitación por el puerto 1 y de carga en el puerto 2, como se muestra en la **Figura 1.9**. En este caso Z_L es la impedancia de la carga, V_s representa el voltaje de la fuente y Z_s su impedancia interna. El análisis del circuito terminado implica expresar las corrientes y los voltajes de las terminales del bipuerto en función tanto de los parámetros, como de V_s , Z_s y Z_L .

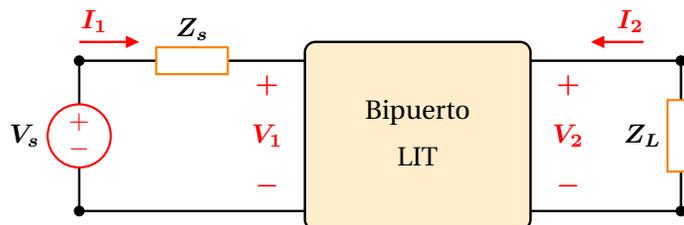


Figura 1.9: Bipuerto terminado.

Existen seis características del bipuerto terminado que definen su comportamiento:

- $Z_{en} = V_1/I_1$ Impedancia de entrada o la admitancia de entrada $Y_{en} = I_1/V_1$
- I_2 Corriente de salida
- V_{Th}, Z_{Th} Voltaje e impedancia de Thévenin en las terminales del puerto 2
- I_2/I_1 Ganancia de corriente
- V_2/V_1 Ganancia de voltaje del bipuerto
- V_2/V_s Ganancia de voltaje con respecto a la excitación

La deducción de estas expresiones implica la manipulación algebraica de las dos ecuaciones del bipuerto, según los parámetros seleccionados, y las dos ecuaciones de restricción impuestas por las terminaciones. Para fines de ejemplificar este análisis, se obtendrán las seis características utilizando los parámetros z . En este caso, las cuatro ecuaciones son

$$V_1 = z_{11} I_1 + z_{12} I_2 \quad (1.28)$$

$$V_2 = z_{21} I_1 + z_{22} I_2 \quad (1.29)$$

$$V_1 = V_s - Z_s I_1 \quad (1.30)$$

$$V_1 = -Z_L I_2 \quad (1.31)$$

Las Ecs.(1.28) y (1.29) es el par de Ecs. (1.7), y las Ecs. (1.30) y (1.31) se obtienen aplicando LVK (Ley de voltajes de Kirchhoff) en las terminales del bipuerto las cuales describen las restricciones en sus terminales.

Impedancia de entrada

Para determinar esta impedancia se igualan las Ecs. (1.29) y (1.31) y se despeja I_2 , obteniendo

$$I_2 = \frac{-z_{21} I_1}{Z_L + z_{22}} \quad (1.32)$$

Se sustituye la Ec. (1.32) en la Ec. (1.28) y se obtiene $Z_{en} = V_1/I_1$:

$$Z_{en} = z_{11} - \frac{z_{12} z_{21}}{Z_L + z_{22}} \quad (1.33)$$

Corriente de salida I_2

En este caso se igualan las Ecs. (1.28) y (1.30) y se despeja I_1 , obteniendo

$$I_1 = \frac{V_s - z_{12} I_2}{Z_s + z_{11}} \quad (1.34)$$

Se sustituye la Ec. (1.34) en la (1.32) y se resuelve para I_2 :

$$I_2 = \frac{-z_{21} V_s}{(Z_s + z_{11})(Z_L + z_{22}) - z_{12} z_{21}} \quad (1.35)$$

Voltaje V_{Th} e impedancia Z_{Th} de Thévenin en las terminales del puerto 2

De acuerdo con el Teorema de Thévenin, V_{Th} es el voltaje a circuito abierto en un par de terminales definidas, en este caso las terminales 2 – 2', que es igual a V_2 cuando $I_2 = 0$. A partir de la Ec. (1.29) se obtiene

$$V_2 \Big|_{I_2=0} = z_{21} I_1 \quad (1.36)$$

Igualando las Ecs. (1.28) y (1.30), despejando I_1 con la condición $I_2 = 0$ y sustituyendo I_1 en la Ec. (1.36) se tiene

$$V_2 \Big|_{I_2=0} = V_{Th} = V_s \left(\frac{z_{21}}{Z_s + z_{11}} \right)$$

La impedancia de Thévenin se puede obtener como la relación V_2/I_2 cuando todas las fuentes independientes son cero, en este caso $V_s = 0$. Para ello, se igualan las Ecs. (1.28) y (1.30) con la condición $V_s = 0$.

$$-Z_s I_1 = z_{11} I_1 + z_{12} I_2$$

se despeja I_1

$$I_1 = \frac{-z_{12} I_2}{Z_s + z_{11}}$$

y se sustituye en la Ec. (1.29), esto es

$$V_2 = z_{21} \left(\frac{-z_{12} I_2}{Z_s + z_{11}} \right) + z_{22} I_2$$

o bien

$$\frac{V_2}{I_2} \Big|_{V_s=0} = Z_{Th} = \frac{-z_{12} z_{21}}{Z_s + z_{11}} + z_{22} \quad (1.37)$$

Ganancia de corriente I_2/I_1

Esta ganancia se obtiene de manera directa a partir de la Ec. (1.32)

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{-z_{21}}{Z_L + z_{22}} \quad (1.38)$$

Ganancia de voltaje V_2/V_1

Para obtener esta ganancia, se despeja I_2 de la Ec. (1.31) y se sustituye en la Ec. (1.29)

$$V_2 = z_{21} I_1 - z_{22} \left(\frac{V_2}{Z_L} \right) \quad (1.39)$$

Se despeja I_2 de la Ec. (1.31), se sustituye en la Ec. (1.28) y se despeja I_1

$$I_1 = \frac{V_1}{z_{11}} + \frac{z_{12} V_2}{z_{11} Z_L} \quad (1.40)$$

Se sustituye la Ec. (1.40) en la (1.39) y se resuelve para V_2/V_1

$$V_2 = z_{21} \left(\frac{V_1}{z_{11}} + \frac{z_{12} V_2}{z_{11} Z_L} \right) + z_{22} \left(\frac{-V_2}{Z_L} \right)$$

o bien

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{z_{21} Z_L}{z_{11} Z_L + z_{11} z_{22} - z_{12} z_{21}} = \frac{z_{21} Z_L}{z_{11} Z_L + \Delta Z} \quad (1.41)$$

Ganancia de voltaje V_2/V_s

Finalmente, para obtener la ganancia de voltaje V_2/V_s se igualan las Ecs. (1.28) y (1.30) y se despeja I_1 :

$$I_1 = \frac{z_{12} V_2}{Z_L (z_{11} + Z_s)} + \frac{V_s}{z_{11} + Z_s} \quad (1.42)$$

a partir de la Ec. (1.31) se despeja I_2 :

$$I_2 = -\frac{V_2}{Z_L} \quad (1.43)$$

y se sustituyen las Ecs. (1.42) y (1.43) en la (1.29) y se resuelve para V_2/V_s obteniendo

$$\frac{V_2}{V_s} = \frac{z_{21} Z_L}{(z_{11} + Z_s)(z_{22} + Z_L) - z_{12} z_{21}} \quad (1.44)$$

La **Tabla 1.3** lista las expresiones correspondientes en términos de los parámetros del bipuerto.

Parámetros Z	Parámetros Y	Parámetros T
$Z_{en} = z_{11} - \frac{z_{12} z_{21}}{Z_L + z_{22}}$	$Y_{en} = \frac{y_{12} y_{21}}{1 + y_{22} Z_L}$	$Z_{en} = \frac{t_{11} Z_L + t_{12}}{t_{21} Z_L + t_{22}}$
$I_2 = \frac{-z_{21} V_s}{(Z_s + z_{11})(Z_L + z_{22}) - z_{12} z_{21}}$	$I_2 = \frac{y_{21} V_s}{1 + y_{22} Z_L + y_{11} Z_s + \Delta Y Z_s Z_L}$	$I_2 = \frac{-V_s}{t_{11} Z_L + t_{12} + t_{21} Z_s Z_L + t_{22} Z_s}$
$V_{Th} = V_s \left(\frac{z_{21}}{Z_s + Z_{11}} \right)$	$V_{Th} = \frac{-y_{21} V_s}{y_{22} + \Delta Y Z_s}$	$V_{Th} = \frac{V_s}{t_{11} + t_{21} Z_s}$
$Z_{Th} = \frac{-z_{12} z_{21}}{Z_s + z_{11}} + z_{22}$	$Z_{Th} = \frac{1 + y_{11} Z_s}{y_{22} + \Delta Y Z_s}$	$Z_{Th} = \frac{t_{12} + t_{22} Z_s}{t_{11} + t_{21} Z_s}$
$\frac{I_2}{I_1} = \frac{-z_{21}}{Z_L + z_{22}}$	$\frac{I_2}{I_1} = \frac{y_{21}}{y_{11} + \Delta Y Z_L}$	$\frac{I_2}{I_1} = \frac{-1}{t_{21} Z_L + t_{22}}$
$\frac{V_2}{V_1} = \frac{z_{21} Z_L}{z_{11} Z_L + \Delta Z}$	$\frac{V_2}{V_1} = \frac{-y_{21} Z_L}{1 + z_{22} Z_L}$	$\frac{V_2}{V_1} = \frac{Z_L}{t_{11} Z_L + t_{12}}$
$\frac{V_2}{V_s} = \frac{z_{21} Z_L}{(z_{11} + Z_s)(z_{22} + Z_L) - z_{12} z_{21}}$	$\frac{V_2}{V_s} = \frac{y_{21} Z_L}{y_{12} y_{21} Z_s Z_L - (1 + y_{11} Z_s)(1 + y_{22} Z_L)}$	$\frac{V_2}{V_s} = \frac{Z_L}{Z_L (t_{11} + t_{21} Z_s) + t_{12} + t_{22} Z_s}$

Tabla 1.3: Características del bipuerto terminado.

La **Tabla 1.4** lista las expresiones correspondientes para los parámetros T' , H y G .

Parámetros T'	Parámetros H	Parámetros G
$Z_{\text{en}} = \frac{t'_{22} Z_L + t'_{12}}{t'_{21} Z_L + t'_{11}}$	$Z_{\text{en}} = h_{11} - \frac{h_{12} h_{21} Z_L}{1 + h_{22} Z_L}$	$Y_{\text{en}} = g_{11} - \frac{g_{12} g_{21}}{Z_L + g_{22}}$
$I_2 = \frac{-V_s \Delta T'}{t'_{11} Z_L + t'_{21} Z_s Z_L + t'_{22} Z_L + t'_{12}}$	$I_2 = \frac{h_{21} V_s}{(1 + h_{22} Z_L)(Z_s + h_{11}) - h_{12} h_{21} Z_L}$	$I_2 = \frac{-g_{21} V_s}{(1 + g_{11} Z_s)(Z_L + g_{22}) - g_{12} g_{21} Z_s}$
$V_{Th} = \frac{V_s \Delta T'}{t'_{22} + t'_{21} Z_s}$	$V_{Th} = \frac{-h_{21} V_s}{h_{22} Z_s + \Delta H}$	$V_{Th} = \frac{g_{21} V_s}{1 + g_{11} Z_s}$
$Z_{Th} = \frac{t'_{11} Z_s + t'_{12}}{t'_{21} Z_s + t'_{22}}$	$Z_{Th} = \frac{Z_s + h_{11}}{z_{22} Z_s + \Delta H}$	$Z_{Th} = \frac{g_{12} g_{21} Z_s}{1 + g_{11} Z_s}$
$\frac{I_2}{I_1} = \frac{-\Delta T'}{t'_{21} Z_L + t'_{11}}$	$\frac{I_2}{I_1} = \frac{h_{21}}{1 + h_{22} Z_L}$	$\frac{I_2}{I_1} = \frac{-g_{21}}{g_{11} Z_L + \Delta G}$
$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\Delta T' Z_L}{t'_{22} Z_L + t'_{12}}$	$\frac{V_2}{V_1} = \frac{-h_{21} Z_L}{\Delta H Z_L + h_{11}}$	$\frac{V_2}{V_1} = \frac{g_{21} Z_L}{g_{22} + Z_L}$
$\frac{V_2}{V_s} = \frac{\Delta T' Z_L}{t'_{12} + t'_{11} Z_s + t'_{22} Z_L + t'_{21} Z_s Z_L}$	$\frac{V_2}{V_s} = \frac{-h_{21} Z_L}{(h_{11} + Z_s)(1 + h_{22} Z_L) - h_{12} h_{21} Z_L}$	$\frac{V_2}{V_s} = \frac{g_{21} Z_L}{(1 + g_{11} Z_s)(g_{22} + Z_L) - g_{12} g_{21} Z_s}$

Tabla 1.4: Características del bipuerto terminado.

1.10 Conexiones entre Bipuertos

El diseño y análisis de una red compleja puede facilitarse al seccionar la red. Si dichas secciones se modelan mediante bipuertos, la síntesis de la red completa se puede llevar a cabo a través de la interconexión de secciones más sencillas o de menor complejidad. En este sentido, los bipuertos se pueden interconectar en cinco formas diferentes:

- En cascada, descrita por los parámetros de transmisión t
- En serie a través de los parámetros z
- En paralelo mediante los parámetros y
- En serie-paralelo con los parámetros h
- En paralelo-serie mediante los parámetros g

1.10.1 Conexión en Cascada

La conexión en cascada es una de las más utilizadas en el análisis de redes complejas ya que se aplica cuando la salida de una red se conecta al puerto de entrada de otra red, como se indica en la **Figura 1.10**, para ello se utilizan los parámetros de transmisión.

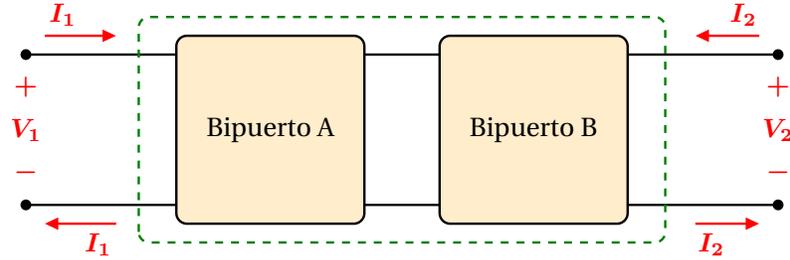


Figura 1.10: Conexión en cascada de 2 Bipuerros.

Para el bipuerto A se cumple, de acuerdo con la Ec. (1.22)

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix}^A = T^A \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}^A \quad (1.45)$$

y para el bipuerto B se tiene

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix}^B = T^B \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}^B \quad (1.46)$$

y en la conexión intermedia se cumple

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}^A = \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix}^B \quad (1.47)$$

Se observa además en la Figura 1.10 que en la entrada y en la salida del bipuerto se cumple

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix}^A \quad (1.48)$$

Por lo tanto, sustituyendo la Ec. (1.45), (1.46) y (1.47) en la Ec. (1.48) se obtiene

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

en donde

$$T = T^A T^B$$

siendo T la matriz de transmisión equivalente. Esto es, la matriz de transmisión de una conexión de bipuerros en cascada se deriva de la multiplicación de las matrices de transmisión de cada bipuerto individual, tomando en cuenta el orden apropiado.

1.10.2 Conexión en Serie

La conexión en serie de dos bipuerros se muestra en la Figura 1.11(a). En este caso se emplean los parámetros z para representar cada red y se combinan en serie. Los dos bipuerros se describen a partir de la Ec.(6a) como

$$V^A = Z^A I^A$$

$$V^B = Z^B I^B$$

Sabemos que en una conexión en serie se cumple con $I = I_A = I_B$ y dado que $V = V^A + V^B$ se tiene

$$V = Z^A I^A + Z^B I^B = I (Z^A + Z^B)$$

de manera que

$$Z = Z^A + Z^B$$

Por lo tanto, los parámetros z de la red total son iguales a la suma de los parámetros z de los bipuertos individuales.

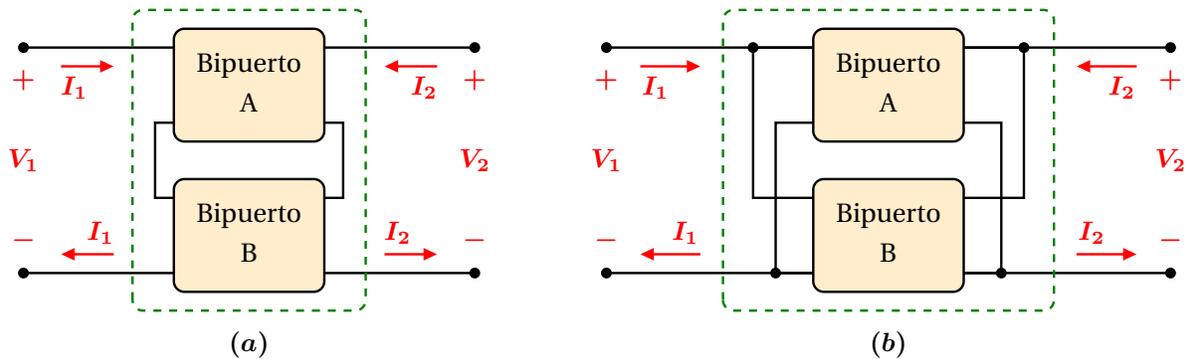


Figura 1.11: Conexiones de Bipuertos (a) Serie, (b) Paralelo.

1.10.3 Conexión en Paralelo

La conexión en paralelo de dos bipuertos exige que V_1 sea igual para los dos puertos entrada y de igual forma para V_2 en los puertos de salida, como se muestra en la Figura 1.11(b). Las matrices que define esta conexión son las correspondientes a la de admitancia Y , la Ec. (1.16) por lo que se tiene para cada bipuerto

$$I^A = Y^A V^A$$

$$I^B = Y^B V^B$$

Así mismo, ya que se cumple con $V = V^A = V^B$ y dado que $I = I^A + I^B$ se tiene

$$I = Y^A V^A + Y^B V^B = V (Y^A + Y^B)$$

de donde

$$Y = Y^A + Y^B$$

Por lo tanto, para determinar los parámetros de una conexión en paralelo se suman los parámetros y de cada bipuerto individual para obtener los parámetros y equivalentes de la red total.

1.10.4 Conexión Serie - Paralelo

La conexión serie-paralelo de dos bipuertos es la que se muestra en la Figura 1.12(a).

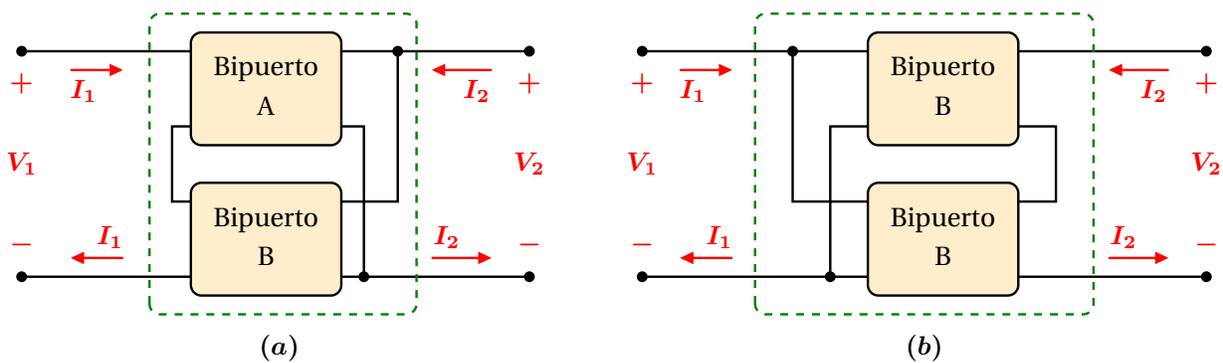


Figura 1.12: Conexiones de Bipuertos (a) Serie - Paralelo , (b) Paralelo - Serie.

Los parámetros que permiten analizar esta conexión son los parámetros h . En este caso los bipuertos deben cumplir con las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} V_1 &= V_1^A + V_1^B \\ I_1 &= I_1^A = I_1^B \end{aligned} \quad (1.49)$$

$$\begin{aligned} V_2 &= V_2^A = V_2^B \\ I_2 &= I_2^A + I_2^B \end{aligned} \quad (1.50)$$

de manera que aplicando el par de Ecs. (1.19) a las condiciones de las Ecs. (1.49) y (1.50) se obtiene

$$\begin{aligned} V_1 &= h_{11}^A I_1^A + h_{12}^A V_2^A + h_{11}^B I_1^B + h_{12}^B V_2^B \\ I_2 &= h_{21}^A I_1^A + h_{22}^A V_2^A + h_{21}^B I_1^B + h_{22}^B V_2^B \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} V_1 &= (h_{11}^A + h_{11}^B) I_1 + (h_{12}^A + h_{12}^B) V_2 \\ I_1 &= (h_{21}^A + h_{21}^B) I_1 + (h_{22}^A + h_{22}^B) V_2 \end{aligned}$$

en donde

$$H = H^A + H^B$$

es la matriz equivalente de una conexión serie-paralelo, la cual se obtiene sumando los parámetros h de los bipueros individuales.

1.10.5 Conexión Paralelo - Serie

Esta conexión se muestra en la **Figura 1.12(b)** y se describe mediante los parámetros g . El procedimiento para encontrar la matriz equivalente es similar al de la conexión serie-paralelo. En este caso las restricciones de los bipueros son las siguientes:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_1^A + I_1^B \\ V_2 &= V_2^A + V_2^B \end{aligned} \quad (1.51)$$

$$\begin{aligned} V_1 &= V_1^A = V_1^B \\ I_2 &= I_2^A = I_2^B \end{aligned} \quad (1.52)$$

de manera que aplicando el par de Ecs. (1.21) a las condiciones de las Ecs. (1.51) y (1.52) se obtiene

$$\begin{aligned} I_1 &= g_{11}^A V_1^A + g_{12}^A I_2^A + g_{11}^B V_1^B + g_{12}^B I_2^B \\ V_2 &= g_{21}^A V_1^A + g_{22}^A I_2^A + g_{21}^B V_1^B + g_{22}^B I_2^B \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} I_1 &= (g_{11}^A + g_{11}^B) V_1 + (g_{12}^A + g_{12}^B) I_2 \\ V_2 &= (g_{21}^A + g_{21}^B) V_1 + (g_{22}^A + g_{22}^B) I_2 \end{aligned}$$

y en forma matricial queda expresada como

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

en donde

$$G = G^A + G^B$$

es la matriz equivalente de una conexión paralelo-serie, la cual se obtiene sumando los parámetros g de los bipueros individuales.

1.11 Redes Básicas de Bipuertos

Existen estructuras básicas de bipuertos, con las cuales se pueden construir redes más complejas. Si se conoce algún parámetro de una red básica de bipuerto, es posible determinar los parámetros de una red más compleja, mediante la aplicación las conexiones adecuadas, lo cual simplifica su análisis.

Las estructuras básicas de bipuertos se presentan en la [Tabla 1.5](#).

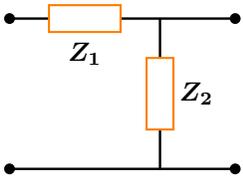
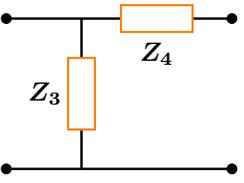
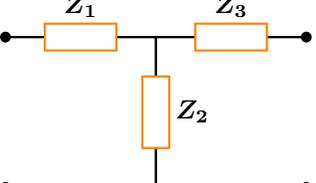
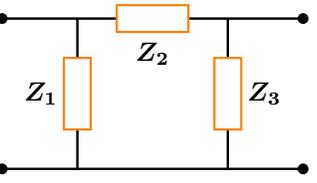
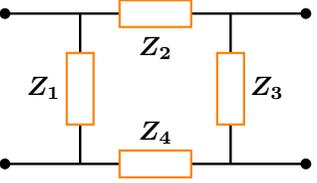
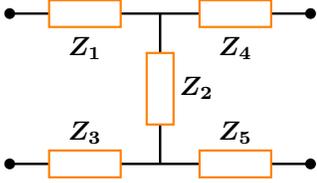
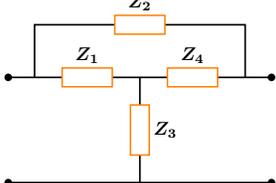
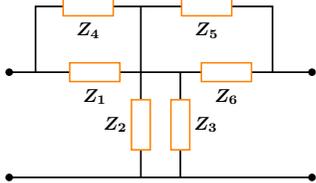
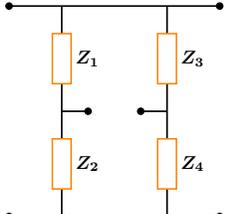
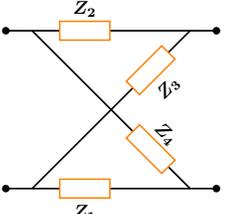
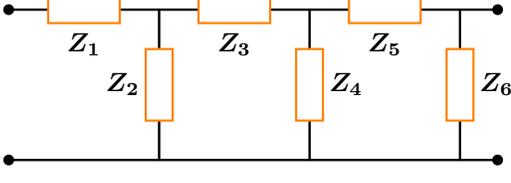
 <p>Red L</p>	 <p>Red L</p>	 <p>T o estrella</p>	 <p>π o delta</p>
 <p>En cuadro</p>	 <p>H</p>	 <p>T derivada</p>	 <p>TT o doble T</p>
 <p>Puente o Celosia</p>	 <p>Puente o Celosia</p>	 <p>Red en escalera</p>	

Tabla 1.5: Redes Básicas de Bipuerto.

Ejemplo: Determine los parámetros Z de la red T que se muestra en la [Figura 1.13](#)

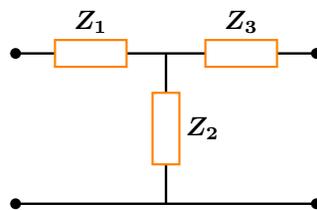


Figura 1.13: Configuración estrella.

Solución

Los parámetros Z se obtienen con las expresiones siguientes:

$$z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} \quad z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0}$$

$$z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0} \quad z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0}$$

cuyas conexiones de muestran en la [Figura 1.14](#)

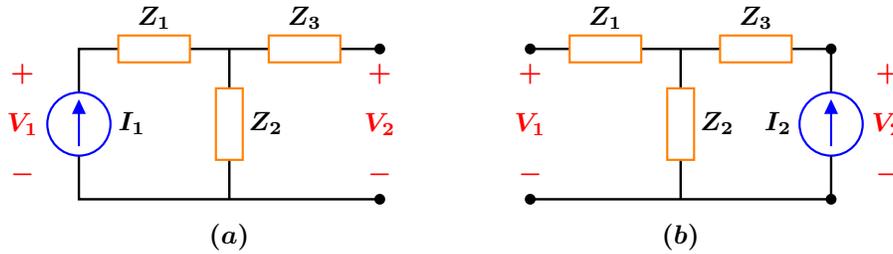


Figura 1.14: Conexiones para determinar los parámetros de impedancia.

de donde las impedancias son

$$z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = Z_1 + Z_2 \quad z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0} = Z_2$$

$$z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0} = Z_2 \quad z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0} = Z_2 + Z_3$$

Ejemplo: Determinar la función de transferencia V_2/V_1 a circuito abierto de la red en escalera que se muestra en la [Figura 1.15](#)

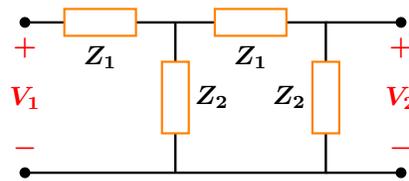


Figura 1.15: Red en escalera.

Solución

En la [Figura 1.16](#) se observa que hay dos configuraciones L en cascada

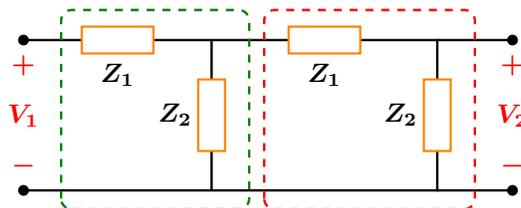


Figura 1.16: Conexión en cascada de dos bipueros.

Se obtienen los parámetros T a partir de los Z del Ejercicio anterior.

$$T = \begin{bmatrix} \frac{z_{11}}{z_{21}} & \frac{\Delta Z}{z_{21}} \\ 1 & \frac{z_{22}}{z_{21}} \end{bmatrix} \Rightarrow T = \begin{bmatrix} \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2} & Z_1 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 \end{bmatrix}$$

Y como se explicó, para una conexión en cascada se cumple:

$$T = T^A T^B$$

o bien

$$T = \begin{bmatrix} \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2} & Z_1 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2} & Z_1 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{Z_1 + Z_2}{Z_2}\right)^2 + \frac{Z_1}{Z_2} & Z_1^2 + Z_1 \\ \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2^2} + \frac{1}{Z_2} & Z_1 + 1 \end{bmatrix}$$

Por lo que, la función de transferencia a circuito abierto es

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{z_{21}}{z_{11}}$$

y se observa que a partir de t_{11}

$$t_{11} = \frac{z_{11}}{z_{21}} = \left(\frac{Z_1 + Z_2}{Z_2}\right)^2 + \frac{Z_1}{Z_2}$$

de manera que la función de transferencia de voltajes para cualquier red en escalera de este tipo es:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{Z_2^2}{3Z_1Z_2 + Z_1^2 + Z_2^2}$$

1.12 Modelo Lineal y Función de Transferencia del Transformador

El transformador es un dispositivo que se basa en el acoplamiento magnético de dos inductores. Se utiliza tanto en circuitos electrónicos como de potencia. En el primer caso su uso es para transformar la impedancia de la carga en un nuevo valor y acoplar la impedancia de la fuente para máxima transferencia de potencia; para proporcionar un aislamiento de voltajes de cd entre la fuente y la carga, y como circuitos de filtrado en conjunto con impedancias. En los circuitos de potencia se recurre a los transformadores para establecer niveles de voltaje de ca que faciliten la transmisión, la distribución y consumo de potencia eléctrica. Su principal análisis se enfoca en el estado senoidal permanente.

El transformador simple se forma cuando dos inductores lineales e invariantes en el tiempo se devanan en un solo núcleo para asegurar el acoplamiento magnético. La [Figura 1.17](#) muestra el modelo del circuito, en el cual se observa que el transformador se puede analizar como un bipuerto.

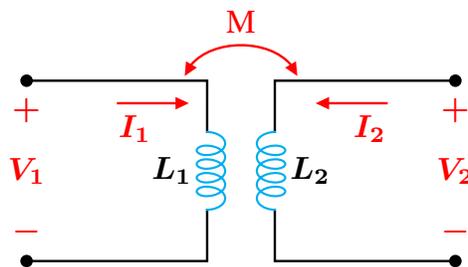


Figura 1.17: El transformador analizado como un bipuerto.

Ya que los inductores son lineales e invariantes en el tiempo, cada flujo magnético es una función lineal de las corrientes con coeficientes constantes. Esto es

$$\begin{aligned}\phi_1(t) &= L_1 i_1(t) + M_{12} i_2(t) \\ \phi_2(t) &= M_{21} i_1(t) + L_2 i_2(t)\end{aligned}\quad (1.53)$$

donde las constantes están definidas como L_1 la autoinductancia del devanado primario, L_2 la autoinductancia del devanado secundario y $M = M_{12} = M_{21}$ son las inductancias mutuas, las cuales a su vez están relacionadas con las autoinductancias mediante $M = k \sqrt{L_1 L_2}$, siendo k el coeficiente de acoplamiento magnético.

Al aplicar la ley de Faraday a las Ecs. (1.53) se obtiene

$$\begin{aligned}v_1(t) &= L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M_{12} \frac{di_2(t)}{dt} \\ v_2(t) &= M_{21} \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \frac{di_2(t)}{dt}\end{aligned}\quad (1.54)$$

o bien representando las Ecs. (1.54) en forma fasorial e impedancias quedan como

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_1 &= j\omega L_1 \mathbb{I}_1 + j\omega M \mathbb{I}_2 \\ \mathbb{V}_2 &= j\omega M \mathbb{I}_1 + j\omega L_2 \mathbb{I}_2\end{aligned}\quad (1.55)$$

donde ω es la frecuencia angular, $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2, \mathbb{I}_1, \mathbb{I}_2$ son los fasores de voltaje y corriente respectivamente.

El par de Ecs. (1.55) corresponde al par de ecuaciones de los parámetros de impedancias, Ecs. (1.7).

Si se considera ahora un transformador lineal práctico, con resistencias R_1 y R_2 de los inductores del primario y secundario, con un circuito de excitación en las terminales del primario y una carga en las terminales del secundario, como en la Figura 1.18.

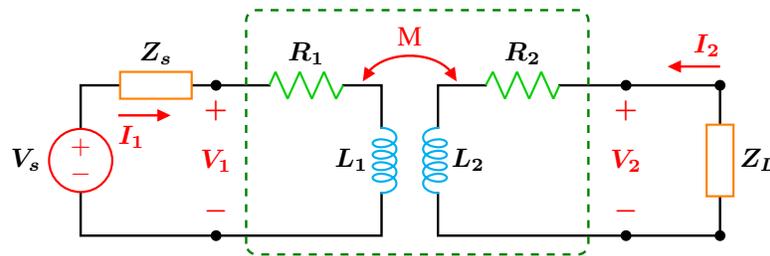


Figura 1.18: Transformador analizado como un bipuerto.

Entonces la correspondiente matriz del par de Ecs. (1.55) cambia a

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + j\omega L_1 & j\omega M \\ j\omega M & R_2 + j\omega L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

en donde la matriz de impedancias es

$$Z = \begin{bmatrix} R_1 + j\omega L_1 & j\omega M \\ j\omega M & R_2 + j\omega L_2 \end{bmatrix}$$

A partir de la matriz de impedancias Z , se determinarán cuatro características del transformador terminado de la Figura 1.18, las cuales se pueden obtener aplicando las Ecs. (1.33), (1.38), (1.41) y (1.44).

Impedancia de Entrada Z_{en}

$$Z_{en} = z_{11} - \frac{z_{12} z_{21}}{Z_L + z_{22}} = R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{Z_L + R_2 + j\omega L_2} \quad (1.56)$$

Ganancia de Corriente o Función de Transferencia de Corriente I_2/I_1

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{-z_{21}}{Z_L + z_{22}} = \frac{-j\omega M}{Z_L + R_2 + j\omega L_2} \quad (1.57)$$

Ganancia de Voltaje o Función de Transferencia de Voltaje V_2/V_1

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{z_{21} Z_L}{z_{11} Z_L + z_{11} z_{22} - z_{12} z_{21}} = \frac{j\omega M Z_L}{(R_1 + j\omega L_1)(Z_L + R_2 + j\omega L_2) + \omega^2 M^2} \quad (1.58)$$

Ganancia de Voltaje o Función de Transferencia de Voltaje V_2/V_s

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{z_{21} Z_L}{(z_{11} + Z_s)(z_{22} + Z_L) - z_{12} z_{21}} = \frac{j\omega M Z_L}{(R_1 + j\omega L_1 + Z_s)(R_2 + j\omega L_2 + Z_L) + \omega^2 M^2}$$

1.13 El Transformador Ideal

El transformador ideal es un transformador sin pérdidas ($R_1 = R_2 = 0$), con acoplamiento unitario ($k = 1$) y las autoinductancias son infinitas ($L_1 = L_2 = \infty$), aunque su cociente es finito, relacionadas con la inductancia mutua mediante $M = \sqrt{L_1 L_2}$. Un parámetro característico que describe al transformador ideal es la relación de vueltas n definido como

$$n = \frac{N_1}{N_2}$$

donde N_1 y N_2 son los números de vueltas del primario y secundario respectivamente. A su vez, n está relacionada con las autoinductancias L_1 y L_2 mediante

$$\frac{L_2}{L_1} = \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 = n^2$$

Bajo estas consideraciones, a continuación se determinarán las cuatro características del transformador con base en las que se obtuvieron para el transformador lineal práctico. Aplicando la Ec. (1.56) la impedancia queda como

$$\begin{aligned} Z_{en} &= \lim_{L_1, L_2 \rightarrow \infty} j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{Z_L + j\omega L_2} \\ &= \lim_{L_1, L_2 \rightarrow \infty} \frac{j\omega L_1 Z_L + j\omega L_1 (j\omega L_2) + \omega^2 M^2}{Z_L + j\omega L_2} \\ &= \lim_{L_1, L_2 \rightarrow \infty} \frac{j\omega L_1 Z_L}{Z_L + j\omega L_2} = \lim_{L_1, L_2 \rightarrow \infty} Z_s + \frac{j\omega L_1 Z_L / L_2}{Z_L / L_2 + j\omega} = \frac{Z_L}{n^2} \end{aligned}$$

La función de transferencia de corriente I_2/I_1 se determina a partir de la Ec. (1.57), tomando en cuenta la relación de vueltas n .

$$\begin{aligned} \frac{I_2}{I_1} &= \lim_{L_1, L_2 \rightarrow \infty} \frac{-j\omega M}{Z_L + j\omega L_2} = \frac{-j\omega M / L_2}{Z_L / L_2 + j\omega} \\ \frac{I_2}{I_1} &= \lim_{L_1, L_2 \rightarrow \infty} \frac{-M}{L_2} = \frac{-\sqrt{L_1 L_2}}{L_2} = -\frac{N_1}{N_2} = -\frac{1}{n} \end{aligned}$$

La función de transferencia de voltaje V_2/V_1 se obtiene de la Ec. (1.58) quedando como

$$\begin{aligned}\frac{V_2}{V_1} &= \lim_{L_1, L_2 \rightarrow \infty} \frac{j\omega M Z_L}{j\omega L_1 Z_L - \omega^2 L_1 L_2 + \omega^2 M^2} \\ &= \lim_{L_1, L_2 \rightarrow \infty} \frac{j\omega M Z_L / L_1}{j\omega} = \lim_{L_1, L_2 \rightarrow \infty} \frac{M}{L_1} \\ \frac{V_2}{V_1} &= \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = n \\ \frac{V_2}{V_1} &= \frac{N_2}{N_1}\end{aligned}$$

Se observa que, una vez definidos los parámetros de un bipuerto se puede obtener de manera prácticamente directa las características externas que definen una red configurada como bipuerto.

CONCLUSIONES

El análisis de circuitos y redes eléctricas mediante el método de bipuertos proporciona una herramienta fundamental para comprender y diseñar sistemas complejos. Los bipuertos permiten caracterizar una red eléctrica a través de sus parámetros, lo que simplifica enormemente el análisis de circuitos. Este enfoque se basa en la representación matricial de los bipuertos, que incluyen circuitos equivalentes con parámetros de impedancia (Z), admitancia (Y), híbridos (H), híbridos inversos (G), transmisión (T) y transmisión inversa (T'). Además, se exploran diversas conexiones entre bipuertos, como la conexión en cascada, en serie, serie-paralelo y paralelo-serie, lo que amplía las posibilidades de análisis y diseño.

La versatilidad de los bipuertos se refleja en una amplia gama de aplicaciones en ingeniería eléctrica y electrónica. Entre ellas, se destacan el análisis y diseño de transformadores, filtros, circuitos resonantes, líneas de transmisión y otros sistemas específicos. Estas aplicaciones demuestran la importancia y la utilidad de la técnica de bipuertos en el desarrollo de tecnologías modernas y en la resolución de problemas complejos en el campo de la ingeniería eléctrica y electrónica. En resumen, el análisis de bipuertos proporciona una herramienta poderosa y flexible para abordar una amplia variedad de desafíos en el diseño y la optimización de sistemas eléctricos y electrónicos.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] J. Atuller D. Cunningham. *Basic Circuit Analysis*. Internacional Student Edition., (1991).
- [2] Ch. Desoer. *Basic Circuit Theory*. Internacional Student Edition., (1969).
- [3] R. Dorf. *The Electrical Engineering Handbook*. CRC Press - IEEE Press., (1997).
- [4] J. Bordogna H. Ruston. *Electric Networks: functions, filters, analysis*. McGraw-Hill Book Company, (1966).
- [5] S. Riedel J. Nilsson. *Circuitos Eléctricos*. Pearson Educación., (2001).
- [6] J. Svoboda R. Dorf. *Circuitos Eléctricos: Introducción al Análisis y Diseño*. Alfa Omega Grupo Editor, (2011).