Práctica 4
Escalamiento de Impedancia y de Frecuencia

Víctor Manuel Sánchez Esquivel/Antonio Salvá Calleja

Objetivo de aprendizaje

Introducción a los teoremas de escalamiento de *impedancia* y de *frecuencia*.

Familiarizar al estudiante con la aplicación en la práctica de dichos teoremas.

Estimar la importancia de tales teoremas en el diseño y síntesis de los sistemas o filtros eléctricos.

Introducción teórica

Escalamiento de impedancia

Considere una red eléctrica plana, constituida por elementos lineales e invariantes en el tiempo, cuya entrada es el voltaje de la fuente independiente de voltaje $v_s(t)$ y la salida es el voltaje $v_o(t)$, correspondiente a una rama arbitraria de la misma red, como se observa en la figura 1.

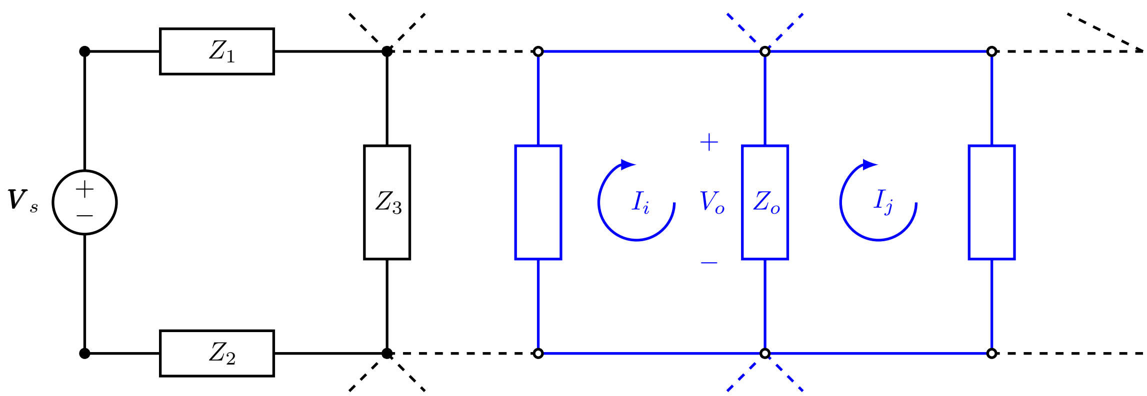

Figura 1. Red eléctrica plana con elementos lineales e invariantes en el tiempo.

El voltaje $\boldsymbol{V}_o$ de la rama eléctrica con impedancia Z_o, está dado por

$$\boldsymbol{V}_o = Z_o \left(\boldsymbol{I}_i - \boldsymbol{I}_j\right) \tag{1}$$

La ecuación de mallas de la red eléctrica es

$$\begin{bmatrix} Z_{11}(j\omega) & Z_{12}(j\omega) & \cdots & Z_{1m}(j\omega) \\ Z_{21}(j\omega) & Z_{22}(j\omega) & \cdots & Z_{2m}(j\omega) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ Z_{m1}(j\omega) & Z_{m2}(j\omega) & \cdots & Z_{mm}(j\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_1 \\ \boldsymbol{I}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{I}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_s \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

resolviendo para $\boldsymbol{I}_i$ e $\boldsymbol{I}_j$

$$\boldsymbol{I}_i = \frac{\begin{vmatrix} Z_{11} & \cdots & Z_{1(i-1)} & \boldsymbol{V}_s & Z_{1(i+1)} & \cdots & Z_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_{m1} & \cdots & Z_{m(i-1)} & 0 & Z_{m(i+1)} & \cdots & Z_{mm} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{11} & \cdots & Z_{1m} \\ \vdots & \vdots & \\ Z_{m1} & \cdots & Z_{mm} \end{vmatrix}} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{I}_j = \frac{\begin{vmatrix} Z_{11} & \cdots & Z_{1(j-1)} & \boldsymbol{V}_s & Z_{1(j+1)} & \cdots & Z_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_{m1} & \cdots & Z_{m(j-1)} & 0 & Z_{m(j+1)} & \cdots & Z_{mm} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{11} & \cdots & Z_{1m} \\ \vdots & \vdots & \\ Z_{m1} & \cdots & Z_{mm} \end{vmatrix}} \tag{4}$$

Si se define

$$\Delta = \begin{vmatrix} Z_{11} & \cdots & Z_{1m} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ Z_{m1} & \cdots & Z_{mm} \end{vmatrix} \tag{5}$$

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} Z_{21} & \cdots & Z_{2(i-1)} & Z_{2(i+1)} & \cdots & Z_{2m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_{m1} & \cdots & Z_{m(i-1)} & Z_{m(i+1)} & \cdots & Z_{mm} \end{vmatrix} \tag{6}$$

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} Z_{21} & \cdots & Z_{2(j-1)} & Z_{2(j+1)} & \cdots & Z_{2m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_{m1} & \cdots & Z_{m(j-1)} & Z_{m(j+1)} & \cdots & Z_{mm} \end{vmatrix} \tag{7}$$

Considerando las ecuaciones (1), (3), (4), (5), (6) y (7) se tiene

$$\boldsymbol{V}_o = Z_o \frac{(\Delta_i - \Delta_j)}{\Delta} \boldsymbol{V}_s \tag{8}$$

por lo que la función de transferencia resulta

$$\frac{\boldsymbol{V}_o}{\boldsymbol{V}_s} = Z_o \frac{(\Delta_i - \Delta_j)}{\Delta} \tag{9}$$

Si todas las impedancias que constituyen la red eléctrica se multiplican por un factor k, de la ecuación (9), se tiene

$$\frac{\boldsymbol{V}_o'}{\boldsymbol{V}_s} = k Z_o \frac{\left(\Delta_i' - \Delta_j'\right)}{\Delta'} \tag{10}$$

donde por álgebra de determinantes

$$\begin{aligned} \Delta_i' &= k^{m-1} \Delta_i \\ \Delta_j' &= k^{m-1} \Delta_j \\ \Delta' &= k^m \Delta \end{aligned} \tag{11}$$

sustituyendo la ecuación (11) en la ecuación (10)

$$\frac{\boldsymbol{V}_o'}{\boldsymbol{V}_s} = k Z_o \frac{k^{m-1}\ (\Delta_i - \Delta_j)}{k^m \Delta} = \frac{\boldsymbol{V}_o}{\boldsymbol{V}_s} \tag{12}$$

de la expresión anterior se concluye lo siguiente:

Si en una red eléctrica se multiplican todas las impedancias por una mismo constante, k, la función de transferencia (si ésta es la razón de un voltaje de salida y un voltaje de entrada) no se altera.

En función de los elementos que conforman la red eléctrica:

Si en una red eléctrica todas las resistencias e inductancias que la constituyen se multiplican por una constante k y las capacitancias de la misma red se dividen por la constante k, la función de transferencia (si ésta es la razón de un voltaje de salida y un voltaje de entrada) no se altera.

Escalamiento de frecuencia

La respuesta de estado sinusoidal permanente de un sistema lineal, invariante en el tiempo y estable debida a una entrada de la forma $x(t) = \operatorname{sen}(\omega\, t)$ está dada por

$$y(t) = |H(j\omega)| \operatorname{sen}(\omega\, t + \measuredangle H(j\omega)) \tag{13}$$

donde $H(j\omega)$ es la función de transferencia de la red eléctrica $H(s)$ evaluada en el eje imaginario del plano complejo, es decir

$$H(s)\Big|_{s=j\omega} = H(j\omega) = |H(j\omega)| \measuredangle H(j\omega))$$

En una red eléctrica dada de b ramas, la función de transferencia depende de la frecuencia angular y de los valores de los componentes eléctricos que la conforman, esto es

$$H(j\omega) = f\left(R_1, \ldots, R_b, j\omega L_1, \ldots, j\omega L_b, j\omega C_1, \ldots, j\omega C_b\right)$$

Para una frecuencia angular ω_1, se tiene

$$H(j\omega_1) = f\left(R_1, \ldots, R_b, j\omega_1 L_1, \ldots, j\omega_1 L_b, j\omega_1 C_1, \ldots, j\omega_1 C_b\right) \tag{14}$$

Para una frecuencia angular ω_2 y suponiendo que las inductancias y las capacitancias de cada rama de la red se pueden modificar

$$H(j\omega_2) = f\left(R_1, \ldots, R_b, j\omega_2 L_1', \ldots, j\omega_2 L_b', j\omega_2 C_1', \ldots, j\omega_2 C_b'\right) \tag{15}$$

Ahora, si se desea que las respuestas en frecuencia, dadas por las ecuaciones (14) y (15), presenten las misma características, se requiere

$$\omega_1\, L_n = \omega_2 L_n' \qquad \text{para} \quad n = 1, \ldots, b \tag{16}$$

y

$$\omega_1\, C_n = \omega_2 C_n' \qquad \text{para} \quad n = 1, \ldots, b \tag{17}$$

por consiguiente, los nuevos valores de los elementos inductivos y capacitivos para que se cumpla lo dicho en el párrafo anterior son

$$L_n' = \frac{\omega_1}{\omega_2}\, L_n \qquad \text{para} \quad n = 1, \ldots, b \tag{18}$$

$$C_n' = \frac{\omega_1}{\omega_2}\, C_n \qquad \text{para} \quad n = 1, \ldots, b \tag{19}$$

por lo que se infiere: si se desea que la respuesta sinusoidal permanente de una red eléctrica a una cierta frecuencia angular ω_2 presente las mismas características de magnitud y fase que se tienen para una frecuencia ω_1, los inductores y los capacitores que constituyen la rede eléctrica deben modificarse de acuerdo a las ecuaciones (18) y (19).

Desarrollo

Experimento 1

Construya el circuito eléctrico que se muestra en la figura 2.

Si $v_s(t) = A_m \operatorname{sen}(1000\, \pi\, t)$ [V]

a) ¿Cuál es la magnitud de $|H(j\, 1000\, \pi)| = \dfrac{|\boldsymbol{V}_o|}{|\boldsymbol{V}_s|}$?

b) Mida el ángulo de desfase entre $\boldsymbol{V}_o$ y $\boldsymbol{V}_s$, es decir $\measuredangle H(j\, 1000\, \pi) = \measuredangle \boldsymbol{V}_o - \measuredangle \boldsymbol{V}_s$.

c) Si se desea que las resistencias del circuito eléctrico de la figura 2 tengan un valor de $10\, k\Omega$. Determine el valor que deben tener las capacitancias para que la función de transferencia no se modifique.
   $C_1 =$ $\qquad\qquad$ $C_2 =$

   Verifique su respuesta experimentalmente.

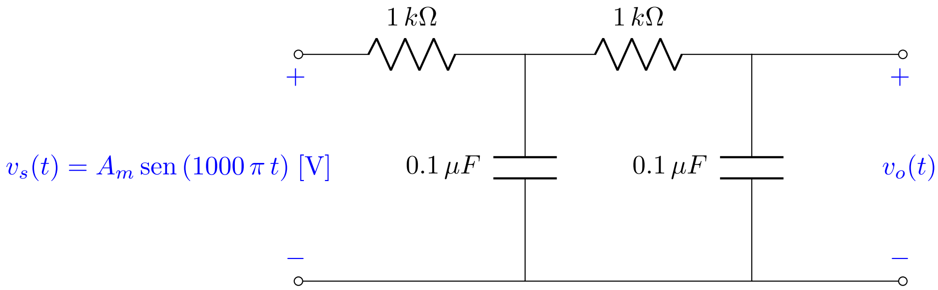

Figura 2. Circuito eléctrico de segundo orden.

Experimento 2

Construya el circuito eléctrico que se muestra en la figura 3.

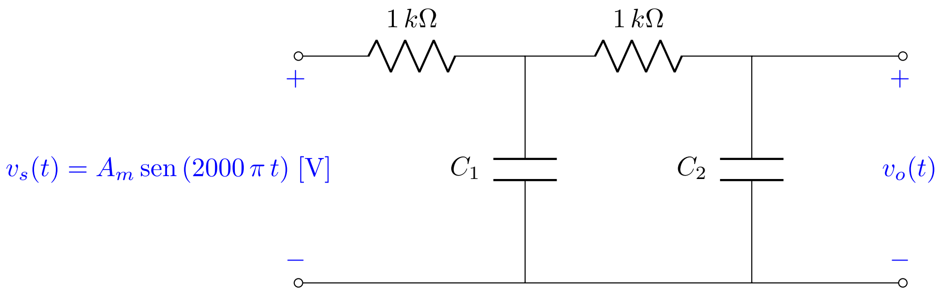

Figura 3. Circuito eléctrico de segundo orden.

a) Determine los valores de las capacitancias de C_1 y C_2 para que cuando $v_s(t) = A_m\,\text{sen}(2000\,\pi\,t)$ [V], la magnitud de $|H(j\,2000\,\pi)| = \dfrac{|\boldsymbol{V}_o|}{|\boldsymbol{V}_s|}$ y el ángulo de desfase $\measuredangle H(j\,2000\,\pi) = \measuredangle \boldsymbol{V}_o - \measuredangle \boldsymbol{V}_s$ sean iguales a los que se tienen en el experimento .

$C_1 =$ $C_2 =$

Verifique su respuesta experimentalmente.

Experimento 3

Construya el circuito eléctrico que se muestra en la figura 4. donde

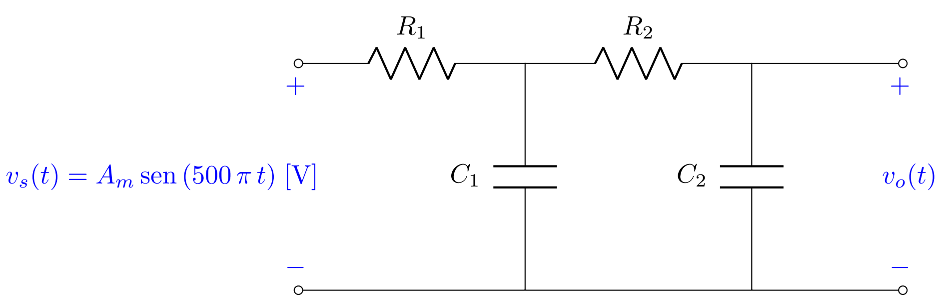

Figura 4. Circuito eléctrico de segundo orden.

$v_o(t) = A_m\,|H(j\,500\,\pi)|\,\text{sen}\,(500\,\pi\,t + \measuredangle H(j\,500\,\pi))$ [V].

a) Si $C_1 = C_2 = 0.02\ \mu F$ ¿Cuáles son los valores de las resistencias R_1 y R_2 para que $|H(j\,500\,\pi)|$ y $\measuredangle H(j\,500\,\pi)$ sean idénticos a los que se tienen en el experimento .

$R_1 =$ $R_2 =$

Verifique su respuesta experimentalmente.

Equipo necesario

1 Generador de funciones
1 Osciloscopio

Material necesario

2 Resistores de $1\,\mathrm{k}\Omega, 0.5$ watt
2 Resistores de $10\,\mathrm{k}\Omega, 0.5$ watt
4 capacitores de $0.01\,\mu F$
4 Capacitores de $0.1\,\mu F$

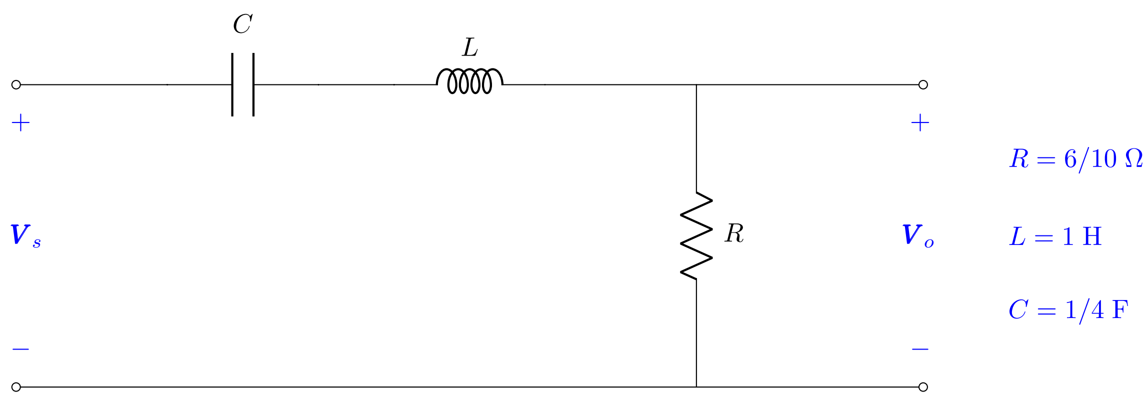

Figura 5. Filtro eléctrico pasa banda.

Cuestionario previo

1. Demuestre la ecuación (13).

2. Demuestre que si la función de transferencia de una red eléctrica es la razón de una corriente de rama y una corriente de una fuente independiente de entrada, al multiplicar todas las resistencias y las inductancias por una constante k y al dividir todas las capacitancias por la misma constante, tal función de transferencia no se modifica.

3. ¿Qué sucede si la salida es una corriente eléctrica y la entrada es un voltaje?

4. En la figura 5, se presenta un filtro eléctrico *pasa banda*, con frecuencia central $f_o = \dfrac{1}{\pi}$ [Hz].

   Si se desea que el filtro eléctrico presente las mismas características de magnitud y fase a la frecuencia central de $f_o = \dfrac{10}{\pi}$ [kHz] y con $C = 10\ \eta F$. Determine los nuevos valores de R y L que se deben emplear.

Bibliografía

Desoer, C. A. and Kuh, E.S. *Basic Circuit Theory.* New York: McGraw-Hill Company, 1969.

Dorf, R. C., Svoboda, J. A. *Circuitos Eléctricos.* México, D. F.: Alfaomega Grupo Editor, S. A. de C. V., 2011.

Hayt, W. H., Kemmerly, J. E. *Análisis de circuitos eléctricos en ingeniería.* México: Mc Graw Hill, 2007.

Sears, F. W. *Fundamentos de Física II. Electricidad y Magnetismo.* Madrid, España: Aguilar, S. A. de Ediciones, 1970.

Johnson, D. E., Hilburn, J. L., Johnson, J. R. *Basic Electric Circuit Analysis.* Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1986.