Sistemas eléctricos de primer y segundo orden

Víctor Manuel Sánchez Esquivel/Antonio Salvá Calleja

Objetivo de aprendizaje

Entrenar al estudiante en la utilización y manipulación del osciloscopio.

Determinar la resistencia interna de una fuente de alimentación o generador.

Llevar a cabo la medición de la constante de tiempo de redes eléctricas de primer orden pasa bajas.

Realizar la medición de los parámetros de diseño de una red eléctrica de segundo orden, a partir de la respuesta al escalón.

Encontrar el valor de los elementos que constituyen una red eléctrica, a partir de las mediciones anteriores.

Introducción teórica

Sistema de primer orden

La función de transferencia de un sistema de primer orden, lineal, invariante en el tiempo y pasa bajas tiene la forma

$$H(s) = \frac{\mathscr{L}\{Salida\}}{\mathscr{L}\{Entrada\}} = \frac{M}{\tau\, s + 1} \tag{1}$$

Respuesta al escalón

Si a un sistema lineal e invariante en el tiempo de primer orden, con una *condición inicial igual a cero*, se le aplica la entrada escalón de amplitud k, la transformada de Laplace de su *respuesta de estado cero* es

$$Y_{zs}(s) = \mathscr{L}\{y_{zs}(t)\} = \frac{M}{\tau\, s + 1}\frac{\mathrm{k}}{s} \tag{2}$$

la transforma inversa de Laplace de la ecuación (2), es

$$y_{zs}(t) = M\,\mathrm{k}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)\, u_{-1}(t) \tag{3}$$

Las gráficas de la entrada escalón y la respuesta de estado cero correspondiente se muestran en la figura 1

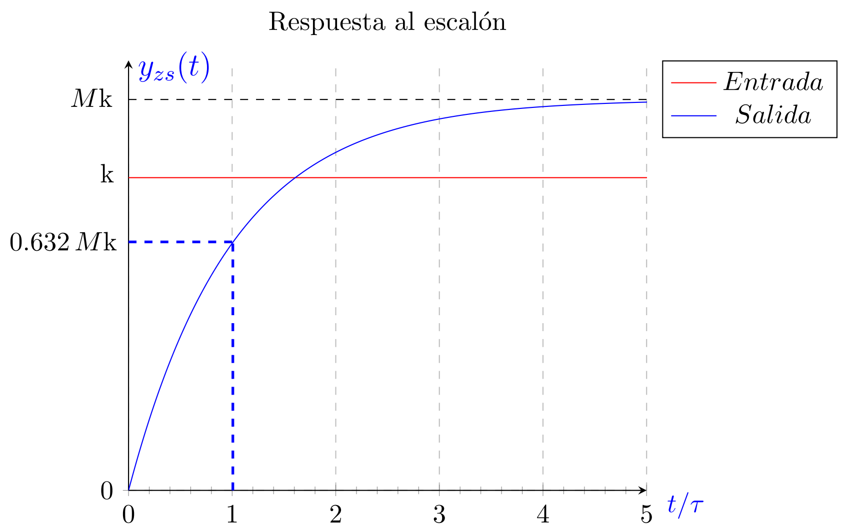

Figura 1. Respuesta al escalón de un sistema de primer orden.

Constante de tiempo

Se define la constante de tiempo de un sistema de primer orden, al tiempo que transcurre para que la respuesta al escalón alcance el 63.2 % de su valor final. En la figura 1, se observa que la respuesta de estado cero alcanza tal valor cuando $t = \tau$.

De la ecuación (3), se advierte que

$$y_{zs}(\tau) = 0.632\, M\mathrm{k}$$

esto es, transcurren τ segundos, a partir de que se aplica la entrada para que la respuesta o salida alcance el 63.2 % de su valor final.

Sistema de segundo orden

La función de transferencia de un sistema de segundo orden lineal e invariante en el tiempo tiene la forma

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\,\zeta\,\omega_s\, s + \omega_n^2} \tag{4}$$

Respuesta al escalón

La transformada de Laplace de la respuesta al escalón de amplitud k, cuando las condiciones iniciales son nulas, es

$$Y_{zs}(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\,\zeta\,\omega_s\, s + \omega_n^2}\,\frac{\mathrm{k}}{s} \tag{5}$$

Dependiendo del valor de ζ en la ecuación (5), se presentan las tres siguientes formas de la respuesta al escalón

1. $0 \leq \zeta < 1$

$$y_{zs}(t) = \mathrm{k}\left[1 - \frac{e^{-\zeta\,\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\ \mathrm{sen}\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t + \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)\right)\right]u_{-1}(t) \tag{6}$$

2. $\zeta = 1$

$$y_{zs}(t) = \mathrm{k}\Big[1 - e^{-\omega_n t}\big(1 + \omega_n\, t\big)\Big]u_{-1}(t) \tag{7}$$

3. $\zeta > 1$

$$y_{zs}(t) = \mathrm{k}\left[1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}}\left(\frac{e^{-S_1\,t}}{S_1} - \frac{e^{-S_2\,t}}{S_2}\right)\right]u_{-1}(t) \tag{8}$$

donde $S_1 = \omega_n\,(\zeta + \sqrt{\zeta^2-1})$ y $S_2 = \omega_n\,(\zeta - \sqrt{\zeta^2-1}$

En la figura 2 se muestran las diversas respuestas de estado cero, cuando la entrada es un escalón unitario, esto es, $\mathrm{k} = 1$.

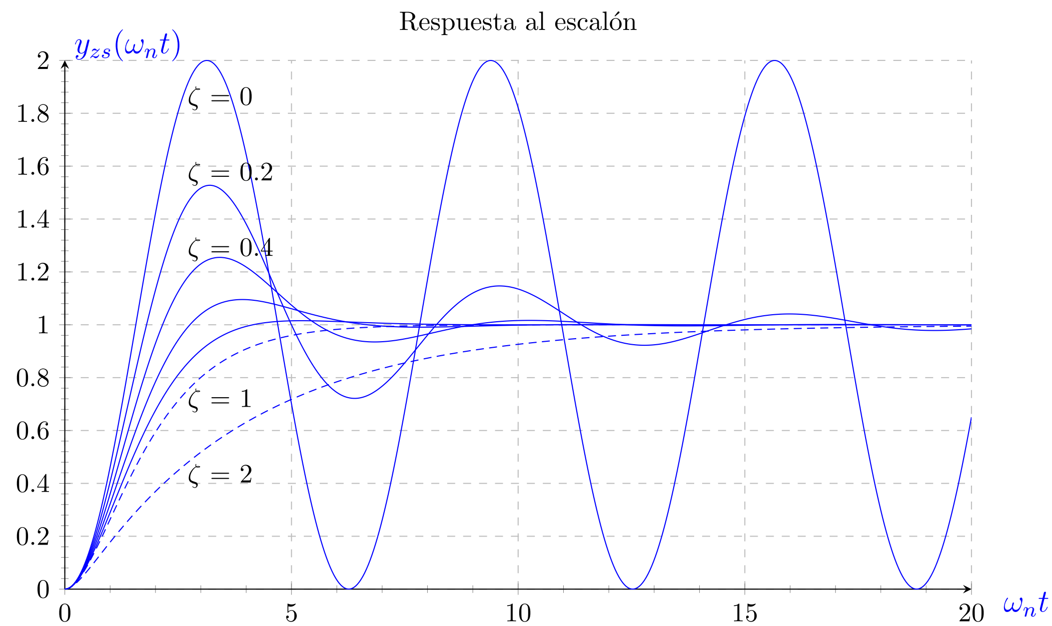

Figura 2. Respuesta al escalón, *normalizada*, de un sistema de segundo orden, para distintos valores de ζ.

Especificaciones de la respuesta transitoria

Considere el caso de $0 < \zeta < 1$. Para un valor de ζ dentro del intervalo anterior, la respuesta de estado cero cuando la entrada es un escalón unitario se presenta en la figura 3. En esta figura, se observan además algunas especificaciones que son de importancia en la caracterización de un *sistema de segundo orden*.

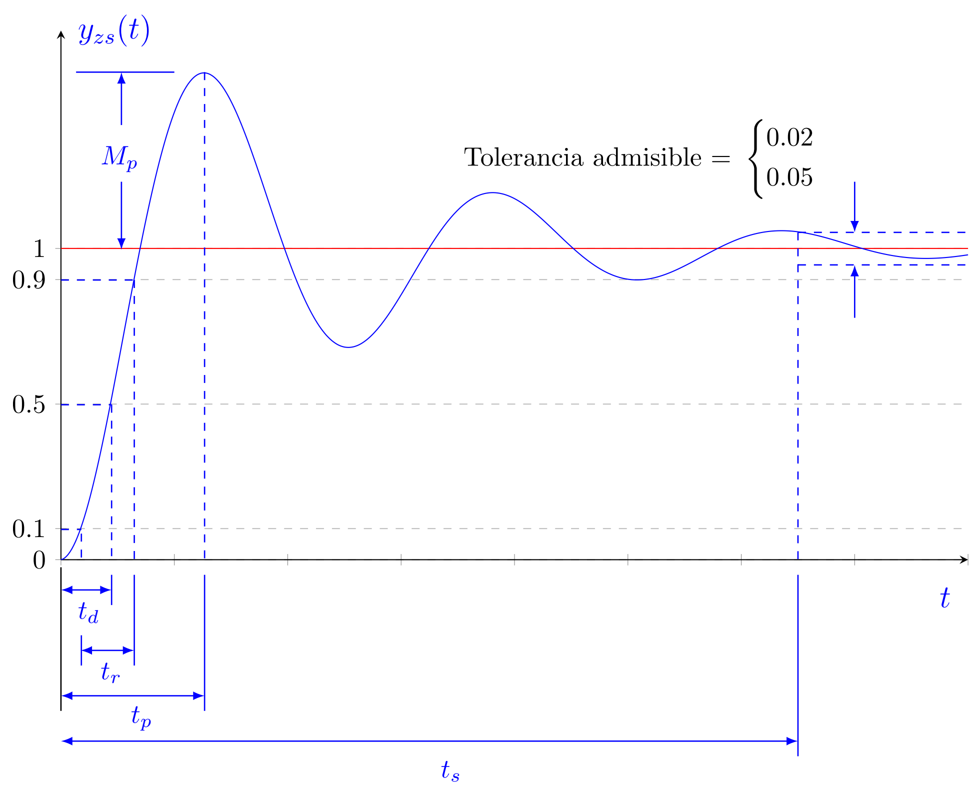

Figura 3. Respuesta al escalón, de un sistema de segundo oredn, cuando $0 < \zeta < 1$.

A continuación se explica el significado de cada una de las especificaciones.

Tiempo de retardo, t_d:

Es el tiempo que transcurre para que la respuesta de estado cero alcance, por primera vez, el 50 % del valor final.

Tiempo de levantamiento, t_r:

Es el tiempo que transcurre para que la respuesta de estado cero pase del 10 al 90 % del valor final. En sistemas subamortiguados, se define como el tiempo necesario para que la respuesta alcance el valor final por primera vez. De la ecuación (6)

$$t_r = \frac{\pi - \phi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \qquad \text{donde} \qquad \phi = \arccos \zeta \tag{9}$$

Tiempo de sobrepaso, t_p:

Es el tiempo que transcurre para que la respuesta de estado cero alcance su valor máximo. De la ecuación (6)

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \tag{10}$$

Sobrepaso o sobretiro, M_p:

Es el valor pico máximo de la respuesta transitoria. Se determina por medio de siguiente expresión

$$M_p = \frac{y(t_p) - y_p}{y_p} \qquad \text{donde} \qquad y_p = \lim_{t\to\infty} y_{zs}(t) \tag{11}$$

Se acostumbra especificar al sobrepaso en términos de porcentaje, así por ejemplo si $M_p = 0.77$, se dice que el sobretiro es del 77 %. De la ecuación (6)

$$M_p = e^{\left(\frac{-\zeta\,\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)} \tag{12}$$

Tiempo de asentamiento, t_s:

Es el tiempo a partir del cual la magnitud de la oscilación en la respuesta de estado cero es menor que un porcentaje especificado del valor permanente. Suponiendo un porcentaje de 5 %

$$t_s = \frac{3}{\zeta\,\omega_n} \tag{13}$$

Desarrollo

Experimento 1

Medición de la resistencia interna del generador, r_g.

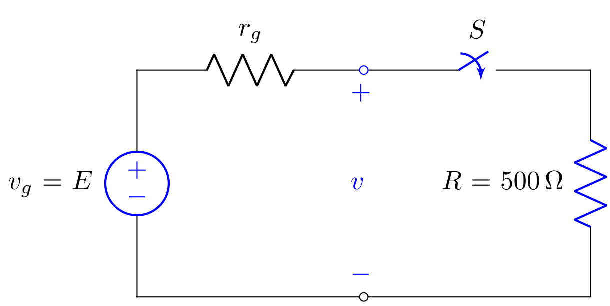

Figura 4. Circuito eléctrico para determinar la resistencia interna del generador, r_g.

Construya el circuito eléctrico de la figura 4. La resistencia interna del generador, r_g se puede determinar por medio de la ecuación (14)

$$\frac{\text{Amplitud de } v \text{ con } S \text{ cerrado}}{\text{Amplitud de } v \text{ con } S \text{ abierto}} = \frac{R}{r_g + R} \tag{14}$$

Experimento 2

Medición de la inductancia del inductor.

Mida la resistencia r_L del inductor. A continuación, construya el circuito eléctrico de la figura 5. Ajuste la amplitud A y la frecuencia f de la señal cuadrada del generador de funciones de tal forma que en el osciloscopio se visualice la respuesta al escalón del circuito RL, semejante a la que se muestra en la figura 1.

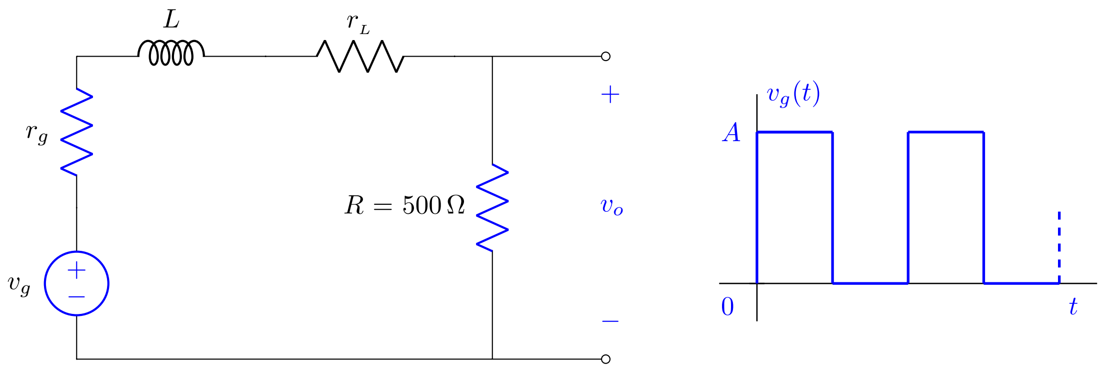

Figura 5. Circuito eléctrico RL.

a) Con el auxilio del osciloscopio, determine experimentalmente el valor de la constante de tiempo τ.

b) Con el valor de τ, encuentre el valor de la inductancia del inductor.

Experimento 3

Medición de la capacitancia del capacitor.

Construya el circuito eléctrico de la figura 6, ajuste la amplitud A y la frecuencia f de la señal cuadrada del generador de funciones de tal forma que en el osciloscopio se visualice la respuesta al escalón del circuito RC, semejante a la que se muestra en la figura 1.

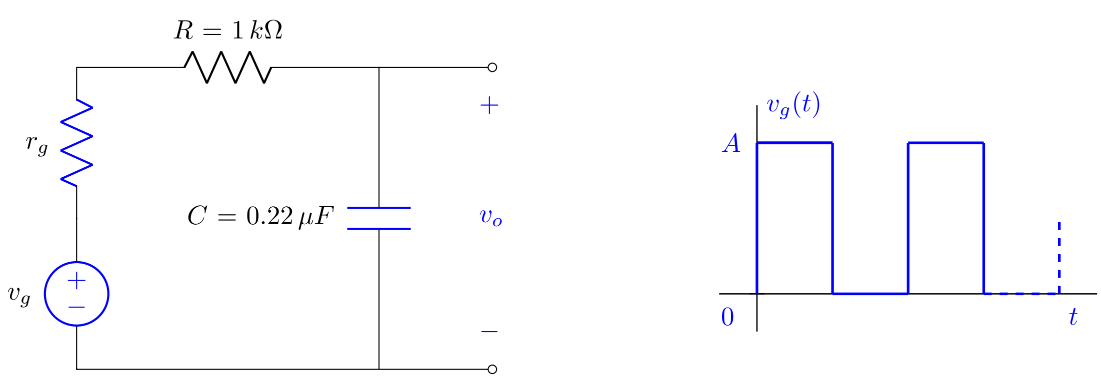

Figura 6. Circuito eléctrico RC.

a) Con el auxilio del osciloscopio, determine experimentalmente el valor de la constante de tiempo τ.

b) Con el valor de τ, encuentre el valor de la capacitancia del capacitor.

Experimento 4

Sistema eléctrico de segundo orden.

Después de construir el circuito eléctrico de la figura 7, ajuste la amplitud A y la frecuencia f de la señal cuadrada del generador de funciones de tal forma que en el osciloscopio se visualice la respuesta al escalón del circuito RLC, semejante a la que se muestra en la figura 3.

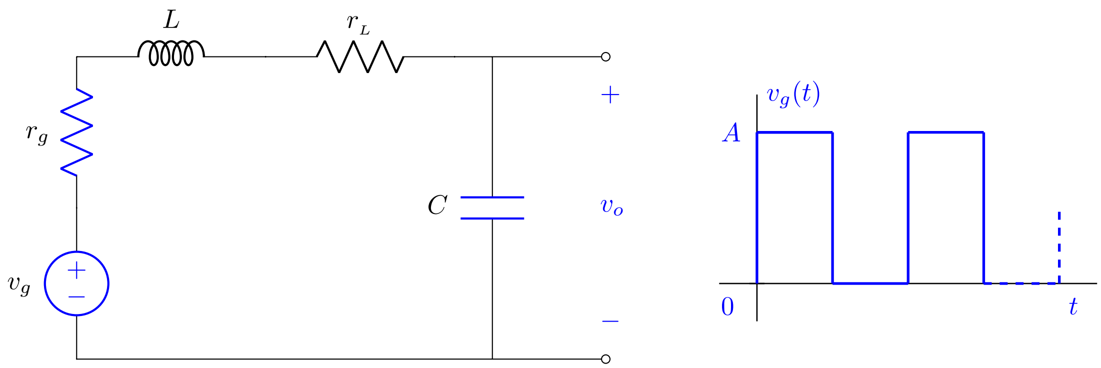

Figura 7. Circuito eléctrico RLC serie.

El inductor y el capacitor son los mismos que se han empleado en los experimentos y .

Calcule teóricamente los parámetros de diseño definidos en las ecuaciones (9), (10), (11), (12) y (13).

Determine experimentalmente con el auxilio del osciloscopio, los parámetros calculados previamente. A continuación escriba sus resultados en la Tabla 1.

——Tabla 1——		
Especificación de diseño	Teórico	Experimental
M_p		
t_p		
t_r		

Si existen discrepancias entre los valores calculados teóricamente y los valores medidos, ¿a qué las atribuye?

Equipo necesario

1 Generador de funciones
1 Osciloscopio
1 Multímetro
1 Solenoide

Material necesario

2 Resistores de 1 kΩ, 0.5 Watt
1 Capacitor de 0.22 μF

Cuestionario previo

1. Demuestre la ecuación (14).
2. Obtenga la ecuación diferencial que modela al circuito RL, de la figura 5.
3. Determine la función de transferencia del circuito RL, de la figura 5.
4. A partir del resultado anterior determine la constante de tiempo.
5. Encuentre la ecuación diferencial que modela al circuito RC, de la figura 6.
6. Determine la función de transferencia del circuito RC, de la figura 6.
7. A partir del resultado anterior determine la constante de tiempo.
8. Deduzca el modelo matemático del circuito CLR, de la figura 7.
9. Determine la función de transferencia del circuito RLC.
10. A partir del resultado anterior exprese ω_n y ζ en función de R, L y C.

Bibliografía

Desoer, C. A. and Kuh, E. S., *Basic Circuit Theory.* New York: McGraw-Hill Company, 1969.
Johnson, D. E., Hilburn, J. L., Johnson, J. R., Scott, P. D., *Basic Electric Circuit Analysis.* Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1999.
Dorf, R. C., Svoboda, J. A., *Circuitos Eléctricos.* México, D. F.: Alfaomega Grupo Editor, S. A. de C. V., 2011.
Hayt, W. H., Kemmerly, J. E., Durbin S. M., *Análisis de circuitos eléctricos en ingeniería.* México: McGraw-Hill, 2012.
Ogata, K., *Systems Dynamics* Pearson New International Edition, 2013.
Ogata, K., *Ingeniería de control Moderna* España: Pearson Educación, S. A., 2003.