

## INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA

### Ley de Faraday

En este capítulo se estudian campos magnéticos que varían en el tiempo, estos campos variantes inducen o producen campos eléctricos los cuales a diferencia de los que se han estudiado hasta ahora no se originan y terminan en cargas eléctricas positivas y negativas respectivamente, sino que se cierran sobre sí mismos.

En 1831, Michel Faraday observó que cuando se *perturba* un flujo magnético concatenado a una trayectoria conductora cerrada, un voltaje o una *fuerza electromotriz (fem)*, se induce y se produce una corriente eléctrica en la trayectoria conductora cerrada. La forma matemática de *la ley de Faraday* es

$$fem = -\frac{d\phi}{dt} \quad [V] = \left[ \frac{wb}{s} \right] \quad (5.1)$$

donde  $\phi$  es el flujo magnético que pasa a través de cualquier superficie abierta limitada por una trayectoria cerrada. Las situaciones para las cuales la variación del flujo magnético con respecto a tiempo es diferente de cero, son:

Que haya un movimiento relativo entre un flujo magnético que no cambia con el tiempo y una trayectoria conductora cerrada. Véase la figura 5.1.

Un flujo magnético que varía en el tiempo y que enlaza una trayectoria conductora cerrada estacionaria. Véase la figura 5.2.

Una combinación de las situaciones anteriores.

Se debe enfatizar que el flujo magnético producido por la corriente eléctrica inducida *se opone a que el flujo magnético original varíe*. Esta aseveración se conoce como *la ley de Lenz* y es la razón por la que aparece el signo negativo en la ecuación (5.1). (Heinrich Friedrich Emil Lenz (1804 – 1865)).

Si la trayectoria cerrada considerada en esta ecuación incluye  $N$  vueltas coincidentes, el flujo que pasa a través de cada una de ellas es el mismo y la ley de Faraday se expresa como

$$fem = -N \frac{d\phi}{dt} \quad (5.2)$$

En la figura 5.1, se muestra un conductor recto y una espira que se mueve a una velocidad  $v$ . Cuando la espira se mueve hacia la derecha, la inducción magnética del conductor recto aminora por lo que el flujo eléctrico a través de la espira también se reduce, esta variación del flujo induce una corriente en la espira con una dirección en sentido horario para inducir otro campo magnético que *se opone a que cambie el flujo magnético inicial*. Si la espira se abre ninguna corriente circula a través de ella, y la fem aparece como un voltaje en los extremos. Cuando la espira se mueve hacia la izquierda el flujo magnético a través de ella aumenta, nuevamente esta variación del flujo

induce una corriente cuyo sentido es tal que tratará de que el flujo original *aumente*. Esta forma de producir una fem con un campo magnético estacionario en una trayectoria o circuito que cambia con el tiempo se denomina *acción del generador* o *fem de movimiento*.

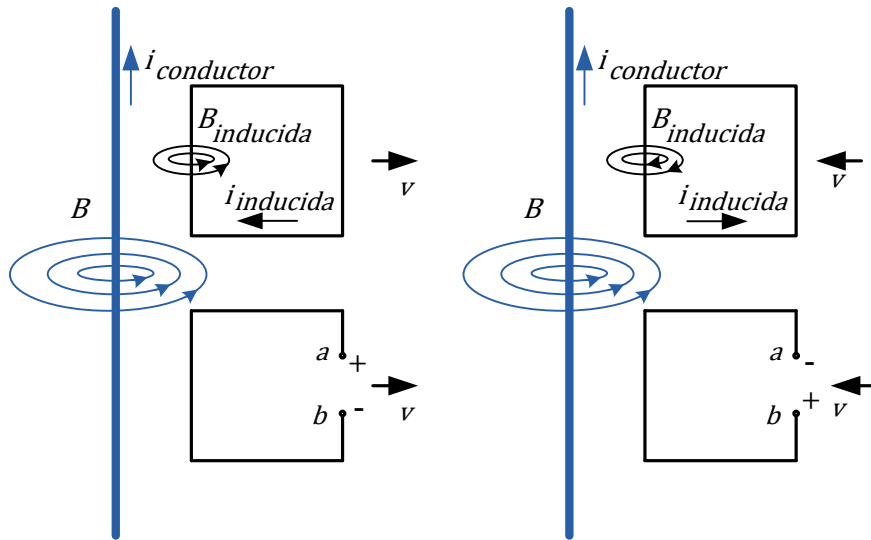


Figura 5.1 La ley de Faraday, acción de generador o fem de movimiento.

En la figura 5.2, se presenta una densidad de flujo magnético que varía en el tiempo y enlaza una trayectoria cerrada conductora estacionaria. ¿Podría usted dar una explicación detallada de lo que sucede?

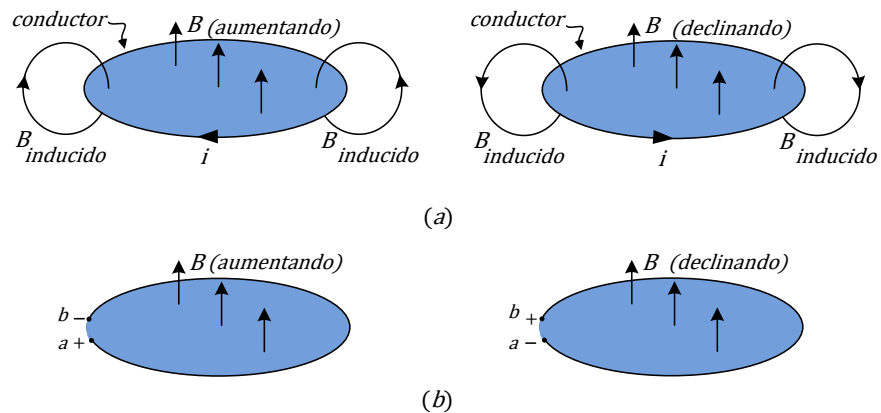


Figura 5.2. La ley de Faraday, acción de transformador.

Cuando la fem se genera por medio de un flujo magnético que cambia en el tiempo en una trayectoria cerrada estacionaria, este modo recibe el nombre de *acción de transformador*.

## Fuerza electromotriz producido por movimiento

En la figura 5.3 se presenta la sección de una espira rectangular conductora estática de resistencia despreciable con un voltímetro insertado en uno de sus extremos y un conductor que se desliza sobre ella con una velocidad  $\vec{v} = v\mathbf{a}_y$  [ $m/s$ ]. Determine la lectura  $V_{ab}$  que registra el voltímetro. Recordando que una carga eléctrica  $q$  que se mueve a una velocidad  $\vec{v}$  en una región donde existe un campo de inducción magnética  $\vec{B} = B\mathbf{a}_x$ , experimenta una fuerza  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ . Con este hecho en mente, en el conductor que se desplaza, las cargas positivas son forzadas hacia el extremo inferior del conductor y en el extremo superior se tiene un exceso de cargas negativas.

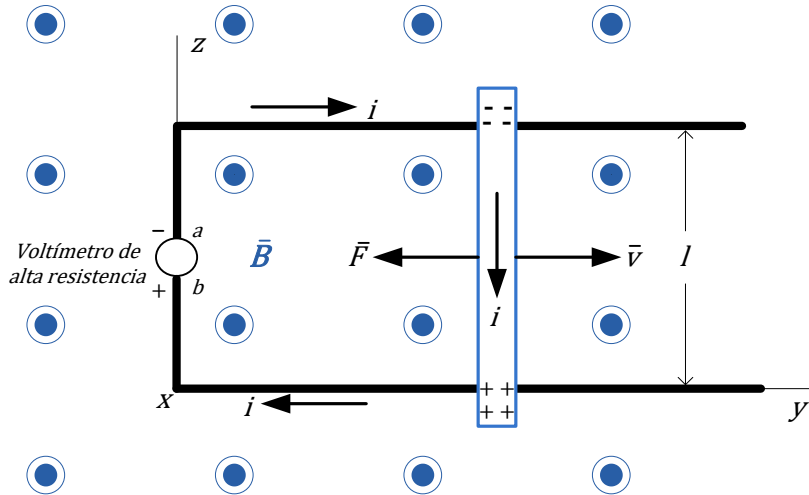


Figura 5.3. Fem inducida por movimiento.

Por consiguiente hay un campo eléctrico  $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$  dentro del alambre conductor móvil. En el punto de equilibrio, la fuerza de origen eléctrico dirigida desde la parte inferior a la superior del alambre estará en equilibrio con la fuerza de origen magnético dirigida desde la parte superior a la inferior. Así

$$\frac{\vec{F}}{q} = \vec{v} \times \vec{B} = \vec{E} \quad (5.3)$$

Se puede concluir ahora, que un conductor que se mueve con una velocidad constante  $\vec{v}$  perpendicular a un campo magnético  $\vec{B}$ , desarrolla dentro de él un campo eléctrico  $\vec{E}$  dado por la expresión anterior. Este campo eléctrico establece una diferencia de potencial entre los dos extremos del alambre que se mueve. Y dado que el gradiente de potencial tiene dirección opuesta al campo eléctrico, se tiene que el voltaje leído por el voltímetro es

$$fem = V_{ab} = -El = -vBl \quad (5.4)$$

Una alternativa para deducir este resultado consiste en considerar que el campo eléctrico dentro del conductor móvil establece una corriente eléctrica que circula por el conductor fijo en sentido de las manecillas del reloj. Esta corriente eléctrica también circula a lo largo del conductor móvil por lo que se ejerce sobre dicho conductor una fuerza dirigida hacia la izquierda (como se muestra

en la figura) de valor  $F = ilB$ . En consecuencia, se requiere una fuerza exterior, de valor idéntico a la fuerza anterior pero de sentido opuesto (esto es  $F_{exterior} = -F$ ), que realice el trabajo para mantener el movimiento original dirigido hacia  $\mathbf{a}_y$ . El diferencial de trabajo que se realiza en el tiempo  $dt$ , está dado por el producto de la fuerza por el diferencial de la distancia, esto es

$$dW = -Fds = -Fvdt$$

Sustituyendo el valor de la fuerza magnética y recordando que  $i = \frac{dq}{dt}$

$$dW = -ilBvdt = -vBldq$$

$$\varepsilon = \frac{dW}{dq} = -vBl$$

nuevamente.

Si se recurre a la ecuación (5.1), el flujo magnético a través de la superficie formada por los brazos de la espira y el conductor en movimiento

$$fem = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint \bar{B} \cdot \bar{dA} = -\frac{d}{dt} \int_{y=0}^y \int_{z=0}^l B \mathbf{a}_x \cdot dydz \mathbf{a}_x$$

$$fem = -\frac{d}{dt} Byl = -Bvl$$

otra vez.

La fuerza por unidad de carga dada por la ecuación (5.3) recibe el nombre de intensidad del *campo eléctrico del movimiento*, esto es

$$\bar{E}_m = \bar{v} \times \bar{B}$$

Y recordando que la fem también se definió como  $fem = \oint \bar{E} \cdot \bar{dl}$ ; en términos de la ley de Faraday se tiene

$$fem = \oint \bar{E}_m \cdot \bar{dl} = \oint (\bar{v} \times \bar{B}) \cdot \bar{dl} \quad (5.5)$$

Integrando en sentido contrario al movimiento de las manecillas de reloj alrededor del contorno formado por los brazos de la espira y el conductor en movimiento (de tal forma que *los vectores correspondientes al campo magnético y la superficie encerrada por el contorno tengan la misma la dirección y sentido*)

$$fem = \int_0^l (v \mathbf{a}_y \times B \mathbf{a}_x) \cdot dl \mathbf{a}_z = \int_0^l -vB \mathbf{a}_z \cdot dl \mathbf{a}_z = -vBl$$

el valor de la fem, que así se determina, tiene el mismo resultado obtenido de antemano.

Con *la regla de la mano derecha*, la cual se muestra en la figura 5.4, se obtienen los sentidos relativos de la fem, del campo magnético y del movimiento. Con los dedos pulgar, índice y medio o del corazón de la mano derecha, de manera tal que sean perpendiculares entre sí. Si el pulgar

señala el sentido del movimiento, el dedo índice el del campo magnético, el dedo del corazón indicará el de la corriente inducida en un circuito cerrado.



Figura 5.4 Regla de la mano derecha.

### Fuerza electromotriz producido por un flujo magnético que cambia en el tiempo

Nuevamente, de la ley de Faraday

$$fem \equiv \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi}{dt} \quad (5.6)$$

Si la trayectoria cerrada, que es atravesada por la inducción magnética  $\vec{B}$ , es fija o estacionaria, entonces se puede diferenciar a  $\vec{B}$  dentro del signo de la integral parcialmente con el tiempo. Esto es

$$fem = -\frac{d}{dt} \iint \vec{B} \cdot d\vec{A} = -\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A} \quad (5.7)$$

Del teorema de Stokes, el cual establece para un vector arbitrario  $\vec{V}$

$$\oint \vec{V} \cdot d\vec{l} = \iint \nabla \times \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad (5.8)$$

De las ecuaciones (5.6), (5.7) y (5.8) se tiene

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (5.9)$$

Nótese particularmente que si hay variaciones en tiempo,  $\vec{E}$  no es conservativo ( $\nabla \times \vec{E} \neq 0$ ). Esta ecuación se denomina *forma puntual de la ley de Faraday*.

#### Ejemplo 1

Suponga que la densidad de flujo magnético

$$\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \mathbf{a}_z \quad [T]$$

en coordenadas cilíndricas, atraviesa la superficie encerrada por la trayectoria circular de radio  $a$  localizada en el plano  $z = 0$ , que se muestra en la figura 5.5. Encuentre  $E_\phi$  en el conductor circular

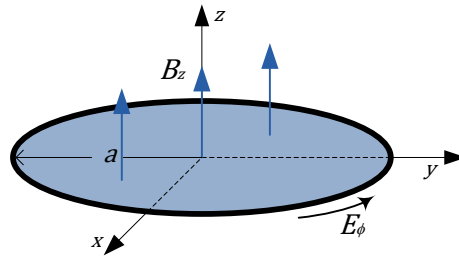


Figura 5.5 Trayectoria y superficie circulares.

$$fem = \int_0^{2\pi} E_\phi \mathbf{a}_\phi \cdot a d\phi \mathbf{a}_\phi = -\frac{d}{dt} \int_0^a \int_0^{2\pi} B_o \cos(\omega t) \mathbf{a}_z \cdot d\mathbf{r} r d\phi \mathbf{a}_z$$

$$fem = 2\pi a E_\phi = -\frac{d}{dt} B_o \pi a^2 \cos(\omega t) = B_o \pi a^2 \omega \text{sen}(\omega t) \quad [V]$$

$$E_\phi = \frac{B_o a \omega}{2} \text{sen}(\omega t) \quad \left[ \frac{V}{m} \right]$$

Este resultado, también se puede obtener a partir de la ecuación (5.9) y recordando que el rotacional en coordenadas cilíndricas está dado por

$$\nabla \times \bar{H} = \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z} \right) \mathbf{a}_\rho + \left( \frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{a}_\phi + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi} \right) \mathbf{a}_z$$

$$(\nabla \times \bar{E})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(r E_\phi)}{\partial r} = -\frac{\partial(B_o \cos(\omega t))}{\partial t} = B_o \omega \text{sen}(\omega t)$$

$$\frac{\partial(r E_\phi)}{\partial r} = r B_o \omega \text{sen}(\omega t)$$

Integrando con respecto a  $r$

$$E_\phi = \frac{B_o r \omega}{2} \text{sen}(\omega t) + C$$

El valor de  $C$  se puede determinar notando que si  $\bar{B}$  no cambia en el tiempo o si  $\omega = 0$  entonces  $E_\phi = 0$ ; por lo que  $C$  debe ser igual a cero. Así

$$E_\phi|_{r=a} = \frac{B_o a \omega}{2} \text{sen}(\omega t) \quad \left[ \frac{V}{m} \right]$$

nuevamente.

Si consideramos ahora las dos acciones (del generador y del transformador) en forma simultánea, y recordando la definición de flujo magnético, resulta

$$fem = -\frac{d}{dt}\phi(t) = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot \vec{dA} = -\int \frac{\partial}{\partial t} (\vec{B} \cdot \vec{dA})$$

$$fem = -\int \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{dA} + \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{dA}}{\partial t} \right)$$

$$fem = \varepsilon = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{dA} + \oint (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl} \quad (5.10)$$

El segundo término del lado derecho de la ecuación anterior corresponde a la ecuación (5.5), recibe el nombre de fem del movimiento, se relaciona con la producida por máquinas eléctricas rotatorias.

El primer término del lado derecho corresponde a la ecuación (5.7), se denomina fem del transformador, ya que se tiene el mismo resultado en los devanados de un transformador cuando un flujo magnético cambia con el tiempo.

Aquí es oportuno recordar (*repasar*) la regla de la integral de Leibniz (Gottfried Wilhelm Leibniz, (1646- 1716)), la cual ésta está dada por

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, u) du = \int \frac{\partial}{\partial x} f(x, u) du + f(x, b) \frac{db}{dx} - f(x, a) \frac{da}{dx}$$

¿Encuentra alguna relación entre ella y la ecuación (5.10)?

### Fem inducida por una bobina cuadrada en rotación

Considere un conjunto de  $N$  espiras conductoras que giran alrededor del eje  $x$  con una velocidad angular  $\omega$  en una región donde está presente una inducción magnética  $\vec{B} = B\mathbf{a}_y$ .

El flujo magnético que atraviesa el área  $A = ab$  de cada una de las espiras está dado por

$$\phi = BA \cos \alpha$$

La fem inducida se determina a partir de la ley de Faraday

$$\varepsilon = -N \frac{d\phi}{dt} = NBA \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt}$$

donde  $\alpha = \omega t$  y  $d\alpha = \omega dt$ . Así

$$\varepsilon = -N \frac{d\phi}{dt} = NBA\omega \sin \omega t \quad [V]$$

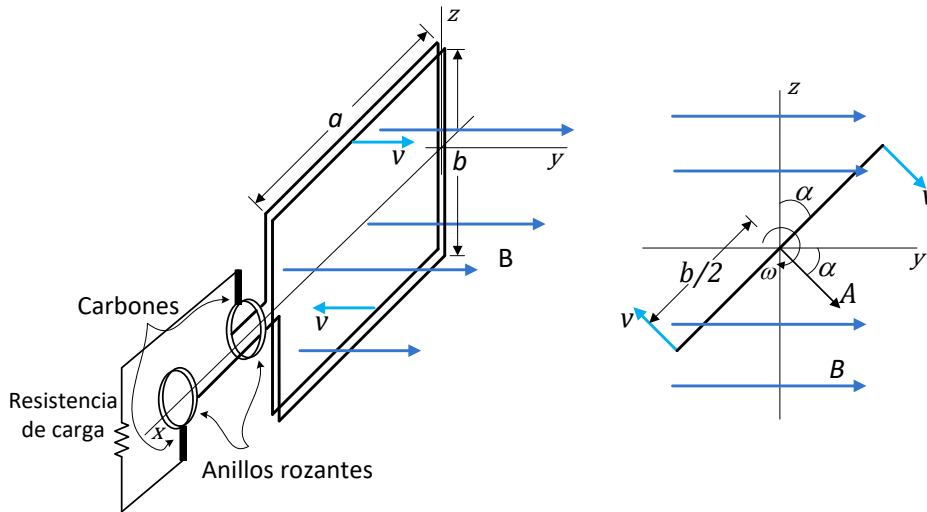


Figura 5.6. Fundamento de un generador de ca.

De manera similar, empleando la ecuación (5:10), dado que la inducción magnética  $\vec{B}$  es constante y que  $\vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l}$  es cero para los lados de la bobina perpendiculares al eje de rotación. ¿Por qué?

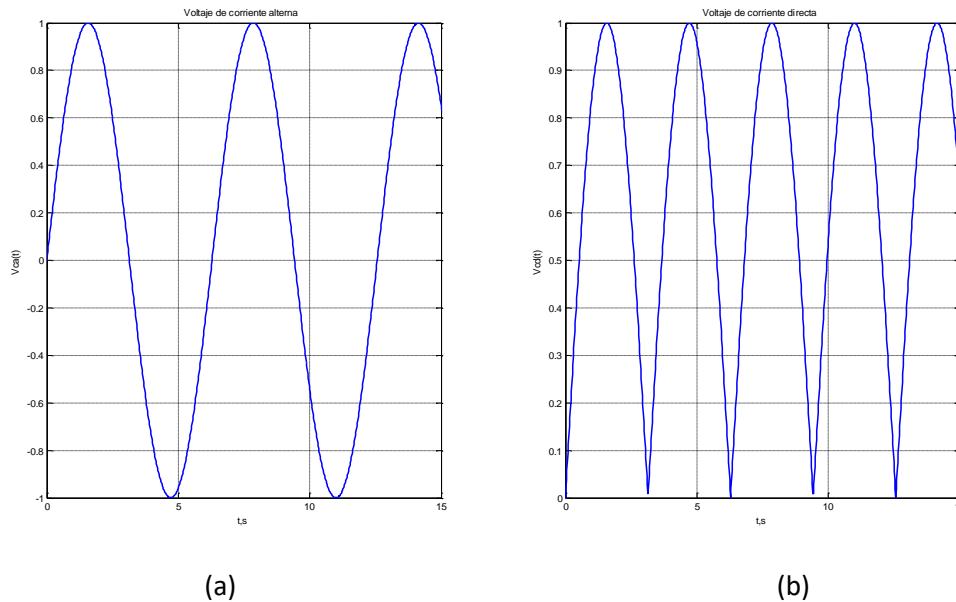


Figura 5.7. (a) Fem alterna inducida por una bobina rectangular en rotación. (b) Fem en un solo sentido provocado por el conmutador.

Para una espira

$$\varepsilon = \int_0^a vB \text{sen } \alpha (+\mathbf{a}_x) \cdot dx \mathbf{a}_x + \int_a^0 vB \text{sen } \alpha (-\mathbf{a}_x) \cdot dx \mathbf{a}_x$$



y notando que la velocidad tangencial es  $v = \omega b/2$

$$\varepsilon = \omega \frac{b}{2} B \sin \omega t a + \omega \frac{b}{2} B \sin \omega t a = Bab\omega \sin \omega t$$

Al considerar las  $N$  espiras se tiene el mismo resultado obtenido antes.

Cuando este voltaje ca (*de corriente alterna*) se conecta a una resistencia de carga por medio de unos anillos rozantes o deslizantes. En la figura 5.7(a) se muestra la forma de onda en la resistencia.

Un voltaje cd (*de corriente directa*) se puede obtener si se cambian los anillos deslizantes por un anillo seccionado denominado *colector o conmutador*, como se muestra en la figura 5.8. El conmutador es un anillo de cobre segmentado con un par de carbones que hacen contacto con las terminales de la carga. En la figura 5.7(b) se observa el voltaje presente en las terminales de la resistencia de carga.

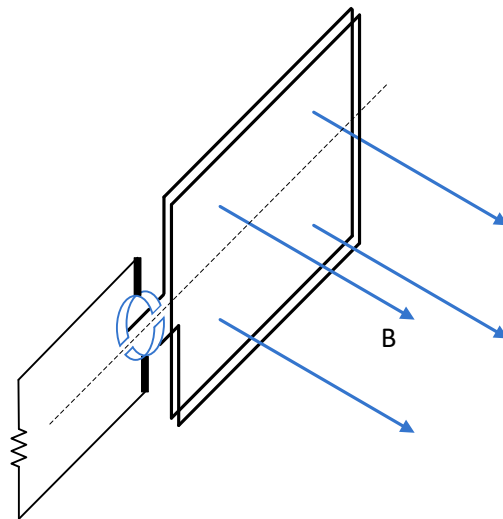


Figura 5.8. Colector o conmutador para obtener una fem de cd.

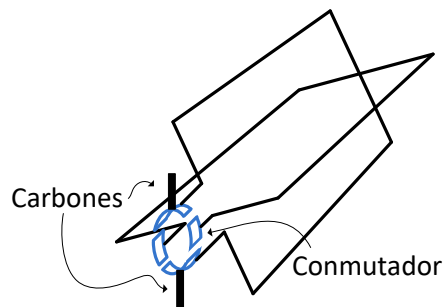


Figura 5.9. Fundamento de un generador de cd.

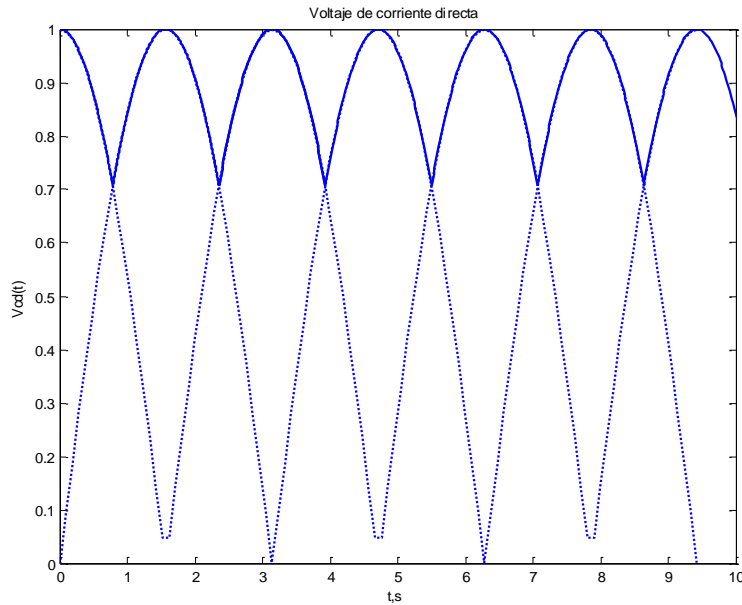


Figura 5.10. Fem inducida por dos bobinas normales entre sí.

Este voltaje pulsante en la resistencia de carga se puede hacer más uniforme si se conectan a ella diversos cuadros de bobinas cuyos planos estén desplazados uno de otro un mismo ángulo. Como ejemplo en la figura 5.9 se pueden apreciar dos cuadros perpendiculares entre sí y el conmutador correspondiente. El voltaje resultante, línea continua, en la resistencia de carga se ve en la figura 5.10, donde los voltajes de cada bobina están desfasados  $90^\circ$ .

### Concepto de inductancia

Como se ha visto, una corriente eléctrica  $i$  establece una inducción magnética  $\bar{B}$ . Cuando la corriente eléctrica varía con el tiempo, la densidad de flujo magnético también y por consiguiente el flujo magnético proporcional a la intensidad de la corriente igualmente cambia. En forma matemática lo anterior se puede escribir como

$$\phi(t) = Ki(t) \quad (5.11)$$

donde  $K$  es un factor que depende entre otros de la forma y la dimensión del circuito. Véase la figura 5.11. Por consiguiente, como consecuencia de la ley de Faraday, cuando en un circuito varía la corriente eléctrica, se induce una fem ocasionada por la variación de su propio flujo magnético. Esta fem recibe el nombre de *fuerza electromotriz autoinducida*.

Si el circuito eléctrico consta de  $N$  espiras y cada una de ellas es atravesada por el flujo magnético, entonces

$$\varepsilon = -N \frac{d\phi(t)}{dt} = -NK \frac{di(t)}{dt} = -L \frac{di(t)}{dt} \quad (5.12)$$

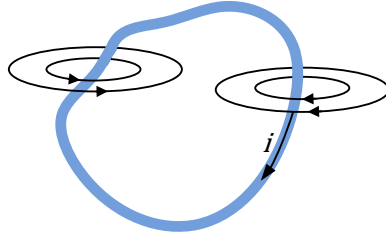


Figura 5.11. Espira con una corriente eléctrica y su inducción magnética.

La constante  $L$  se denomina *inductancia propia* o simplemente *inductancia*. Sus unidades son henrios  $[H]$ . A partir de la ecuación (5.12), se puede encontrar la definición de la inductancia

$$N \frac{d\phi(t)}{dt} = L \frac{di(t)}{dt}$$

Integrando

$$N\phi(t) = Li(t) + C_1$$

Pero dado que el flujo magnético es proporcional a la corriente eléctrica; cuando  $i(t) = 0$  también  $\phi(t) = 0$ . Así la constante  $C_1 = 0$  y la inductancia se define como

$$L = \frac{N\phi}{i} \tag{5.13}$$

En la figura 5.12 se muestra el símbolo del inductor cuya propiedad eléctrica es la inductancia. El inductor, es un elemento que almacena energía en forma de campo magnético, se opone a las variaciones abruptas de la corriente eléctrica y se emplea en la síntesis de filtros eléctricos al combinarse con resistores y condensadores.



Figura 5.12. (a) Inductor ideal. (b) Inductor real.

Como se recordará, la diferencia de potencial en un circuito eléctrico, en general, está dado por

$$V_{ab} = \sum Ri - \sum \varepsilon$$

por lo que para el inductor (*ideal*), figura 5.12(a), el voltaje en el inductor es

$$V = L \frac{di(t)}{dt} \quad (5.14)$$

Un arquetipo que aproxima de manera más adecuada el comportamiento del inductor se muestra en la figura 5.12(b). Esto es porque el inductor en su forma más simple se construye mediante un devanado o arrollamiento de un conductor y como se sabe todo conductor tiene una resistencia, por lo que existe una resistencia inmanente del inductor. Así el voltaje en este modelo es

$$V = L \frac{di(t)}{dt} + ri(t) \quad (5.14)$$

### Inductancia mutua

En esta sección se estudia el efecto de un flujo magnético que varía con el tiempo y que es común a dos o más devanados o bobinas. Los devanados colindantes que comparten un mismo flujo magnético se dice que están *mutuamente acoplados*. Así, cuando la corriente eléctrica en uno de los devanados cambia, se ocasiona o induce un voltaje en el otro devanado.

Considere la figura 5.13, en la que se muestra el esquema de dos bobinas (circuitos) acopladas magnéticamente.

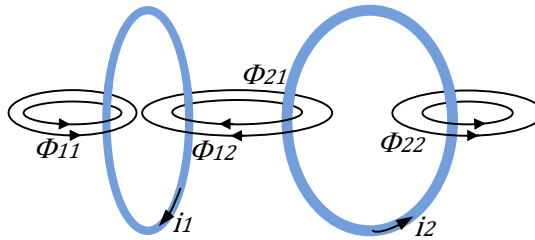


Figura 5.13. Circuitos eléctricos magnéticamente acoplados.

Las líneas del flujo eléctrico  $\phi_{11}$  causadas por la corriente eléctrica  $i_1$ , en el circuito 1 dan lugar a una inductancia propia  $L_{11}$ . Asimismo las líneas de flujo eléctrico  $\phi_{22}$  debidas a la corriente eléctrica  $i_2$  en el otro circuito son responsables de la inductancia propia  $L_{22}$ .

Por otro lado, las líneas del flujo magnético  $\phi_{12}$  producidas por  $i_2$  están concatenadas con el circuito 1, dando lugar a la inductancia mutua  $L_{12}$ . Lo mismo puede decirse de  $\phi_{21}$ , esto es: el flujo ligado al circuito 2 es proporcional a la corriente en el circuito 1 y de aquí se tiene  $L_{21}$ . Así

$$\left. \begin{aligned} L_{12} &= \frac{N_1 \phi_{12}}{i_2} \\ L_{21} &= \frac{N_2 \phi_{21}}{i_1} \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

Estas inductancias reciben el nombre de *inductancias mutuas*. Se dice que son simétricas, lo que implica que

$$L_{12} = L_{21} \quad (5.16)$$

## Ejemplo 2

Encuentre la inductancia de: a) un cable coaxial de longitud  $l$ , con un dieléctrico de permeabilidad  $\mu$ , mostrado en la figura 5.14. b) un toroide de  $N$  vueltas devanadas sobre un molde de madera, que tiene una sección transversal de radio  $a$  y radio medio  $r$ , como se observa en la figura 5.14. c) un solenoide de  $N$  vueltas devanadas sobre un molde, con núcleo de aire, que tiene una sección transversal cuadrada  $ab$  con una longitud  $l$ .

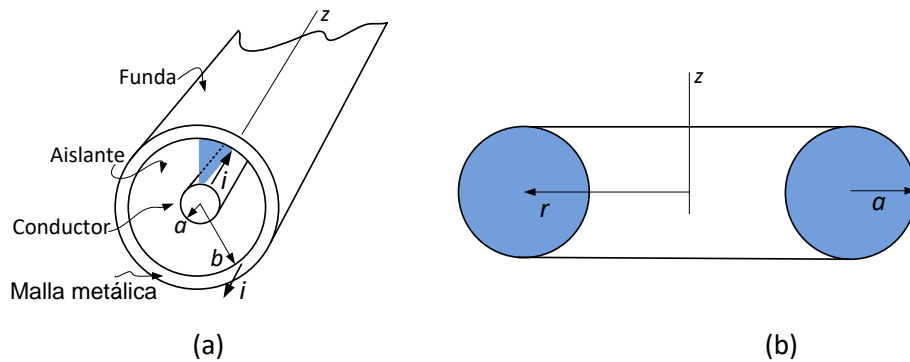


Figura 5.14. (a) Cable coaxial. (b) Bobina toroidal (toroide).

a) Antes de obtener la inductancia del cable coaxial, con el propósito de familiarizarnos con la *ley circuital de Ampère*, por medio de ella se determina el campo magnético en diversas regiones del cable.

También con la finalidad de simplificar lo más posible, se define la *excitación magnética* o *intensidad del campo magnético*  $\vec{H}$ , cuyas unidades son amperes por metro  $\left[\frac{A}{m}\right]$ , como

$$\vec{B} \equiv \mu_0 \vec{H} \quad (5.17)$$

para el espacio libre. En términos de  $\vec{H}$ , la ley de Ampère se puede escribir entonces como

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = i = \iint \vec{J} \cdot d\vec{A} \quad (5.18)$$

Es conveniente establecer una analogía entre los campos eléctrico y magnético. En términos de similitud de sus unidades existe una dualidad entre  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  y entre  $\vec{D}$  y  $\vec{B}$ . En medios materiales diferentes del espacio libre la relación entre  $\vec{B}$  y  $\vec{H}$  se escribe como

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (5.19)$$

donde  $\mu$  recibe el nombre de *permeabilidad del material*.

Regresemos a nuestro ejercicio del cálculo de la inductancia.

Considerando que tanto la corriente eléctrica  $i$  en el conductor central de radio  $a$  como la corriente de regreso en el conductor exterior (conductor blindado de trenza) de radio interior  $b$  y radio exterior  $c$  están uniformemente distribuidas y que el cable es de una longitud muy grande por lo que las perturbaciones del campo magnético en los extremos se ignoran. De la ley de Ampère, para  $a < r < b$

$$\int \vec{H} \cdot \vec{dl} = \oint_0^{2\pi} H_\phi r d\phi = H_\phi r \int_0^{2\pi} d\phi = H_\phi r 2\pi = i$$

$$H_\phi = \frac{i}{2\pi r} = \frac{B_\phi}{\mu_0} \quad \left[ \frac{A}{m} \right]$$

Para  $r < a$ , se selecciona como trayectoria de integración un círculo de radio  $r$ . La corriente encerrada por tal trayectoria es

$$i_{enc} = \frac{r^2 i}{a^2}$$

por consiguiente

$$H_\phi = \frac{ri}{2\pi a^2}$$

Para  $b < r < c$ , de la ley de Ampère

$$2\pi r H_\phi = i - \frac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2} i$$

por lo que

$$H_\phi = \frac{i}{2\pi r} \left( \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2} \right)$$

Finalmente, para  $r > c$ ,  $H_\phi = 0$

Para  $a < r < b$ , se tiene

$$\vec{B} = \frac{\mu i}{2\pi r} \mathbf{a}_\phi$$

Una forma de determinar el flujo magnético, en el interior del cable, es la siguiente

$$\Phi = \int_{r=a}^b \int_{z=0}^l \frac{\mu i}{2\pi r} \mathbf{a}_\phi \cdot dr dz \mathbf{a}_\phi = \frac{\mu i}{2\pi} l \ln \left( \frac{b}{a} \right)$$

así

$$L = \frac{\Phi}{i} = \frac{\mu l}{2\pi} \ln \left( \frac{b}{a} \right) \quad (5.17)$$

b) Para el toroide la densidad de flujo magnético o inducción magnética es

$$\bar{B} = \frac{N\mu_0 i}{2\pi r} \mathbf{a}_\phi$$

Por lo que el flujo magnético es

$$\Phi = BA = \frac{N\mu_0 i}{2\pi r} \pi a^2$$

entonces

$$L = \frac{N\Phi}{i} = \frac{N^2\mu_0}{2\pi r} A \quad (5.18)$$

- c) Un solenoide con un eje paralelo al eje  $z$  y que consta de  $N$  espiras estrechamente enrolladas que transportan una corriente eléctrica  $i$ , y suponiendo que su longitud es grande comparada con las dimensiones de su área, tiene una inducción magnética aproximadamente uniforme y paralela al eje en su interior

$$\bar{B} = \frac{N\mu_0 i}{l} \mathbf{a}_\phi$$

por lo que el flujo magnético total a través del solenoide se obtiene multiplicando la densidad de flujo magnético por el área de la sección transversal, de esta manera la inductancia del solenoide es

$$L = \frac{N\Phi}{i} = \frac{N^2\mu_0}{l} ab = \frac{N^2\mu_0}{l} A \quad (5.19)$$

### Ejemplo 3

Encuentre la inductancia mutua entre dos solenoides ideales coaxiales con núcleo de aire, de la misma longitud  $l_1 = l_2 = l$ , de secciones transversales  $A_1 < A_2$  y con  $N_1$  y  $N_2$  vueltas respectivamente.

La densidad de flujo magnético o inducción magnética en el solenoide 2 es

$$B_2 = \frac{N_2\mu_0 i_2}{l}$$

El flujo magnético *ligado* al solenoide 1, debido a la inducción magnética del solenoide 2 es

$$\Phi_{12} = B_2 A_1 = \frac{N_2\mu_0 i_2}{l} A_1$$

De la ecuación (5.15)

$$L_{12} = \frac{N_1\Phi_{12}}{i_2} = \frac{N_1 N_2 \mu_0 A_1}{l} \quad [H] \quad (5.20)$$

De manera similar, la densidad de flujo o inducción magnéticos en el solenoide 1 es

$$B_1 = \frac{N_1\mu_0 i_1}{l}$$

y el flujo magnético *ligado* al solenoide 2 debido a la inducción magnética del solenoide 1 es

$$\Phi_{21} = \frac{N_1 \mu_0 i_1}{l} A_1$$

por lo que

$$L_{21} = \frac{N_2 \Phi_{12}}{i_1} = \frac{N_1 N_2 \mu_0 A_1}{l} \quad [H]$$

así

$$L_{12} = L_{21} = M$$

A continuación, se define un *coeficiente de acoplamiento magnético* como

$$k_m = \frac{L_{12}}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{L_{21}}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad (5.21)$$

este coeficiente nos proporciona una medida de la dispersión del flujo magnético entre inductores acoplados magnéticamente. Para nuestro ejemplo, como se puede demostrar

$$k_m = \sqrt{\frac{A_1}{A_2}} \quad (5.22)$$

y nos dice que porcentaje del flujo magnético producido por un solenoide está ligado al otro.

En general

$$0 \leq k_m \leq 1$$

dependiendo de la geometría de las bobinas y de su posición relativa.

### Conexión en serie y paralelo de inductores (bobinas) acoplados

En esta sección se determina la inductancia equivalente de dos inductores lineales conectados en serie como se muestra en la figura 5.15.

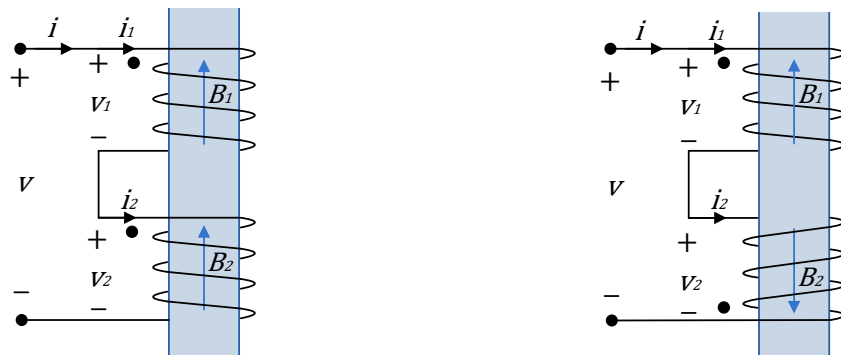


Figura 5.15. Inductores acoplados conectados en serie.



En la figura 5.15(a), dadas las direcciones de las corrientes eléctricas  $i_1$  e  $i_2$  mostradas, se observa que las densidades de flujo magnético  $\bar{B}_1$  y  $\bar{B}_2$  debidas a  $i_1$  e  $i_2$ , respectivamente, están en la misma dirección, por lo que los flujos magnéticos se suman y se dice que la inductancia mutua  $L_{12} = L_{21} = M$  es positiva. Así

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= L_{11}i_1 + L_{12}i_2 \\ \Phi_2 &= L_{21}i_1 + L_{22}i_2\end{aligned}\quad (5.21)$$

Como los dos inductores están conectados en serie, de la ley de corrientes de Kirchhoff (LCK) se tiene

$$i_1 = i_2 = i \quad (5.22)$$

y de la ley de voltajes de Kirchhoff (LVK) se requiere que

$$v = v_1 + v_2$$

Por otra parte, la ley de Faraday nos dice que  $v_1 = \frac{d\Phi_1}{dt}$  y  $v_2 = \frac{d\Phi_2}{dt}$ . Entonces, si  $\phi$  es tal que  $v = \frac{d\Phi}{dt}$ , se tiene

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi_1}{dt} + \frac{d\Phi_2}{dt}$$

integrando

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + C \quad (5.23)$$

Notando que  $\Phi = 0$  cuando  $i = 0$ , entonces  $C = 0$ . Sustituyendo (5.21) en la ecuación anterior

$$\Phi = L_{11}i_1 + L_{12}i_2 + L_{21}i_1 + L_{22}i_2$$

considerando (5.22)

$$\Phi = (L_{11} + L_{12} + L_{21} + L_{22})i$$

Finalmente, la inductancia equivalente de la conexión en serie anterior es

$$L = \frac{\Phi}{i} = L_{11} + L_{12} + L_{21} + L_{22}$$

o simplemente

$$L = L_1 + L_2 + 2M \quad (5.24)$$

Es importante hacer hincapié que en la figura 5.15(a), es clara y evidente la dirección de la inducción magnética (y por ende la del flujo magnético) en cada uno de los devanados y de aquí concluir que la inductancia mutua  $M$  es positiva. Lo anterior no sucede en los diagramas de circuitos eléctricos, por lo que se recurre al uso de puntos como una convención para conocer el signo de la inductancia mutua.

Esta *convención de puntos* consiste al considerar direcciones de referencia asociadas (la corriente eléctrica circula desde un punto de mayor potencia a otro de menor potencia) en cada inductor. Se asigna un punto a las terminales de cada inductor por las que debería *entrar* (o *salir*) tanto  $i_1$  como  $i_2$  para que la inductancia mutua sea  $M$  positiva. En la figura 5.15 se puede apreciar esto.

Considere ahora la conexión de inductores que se muestra en la figura 5.15(b). Aquí, los flujos magnéticos tienen direcciones opuestas, por lo que

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= +L_{11}i_1 - L_{12}i_2 \\ \Phi_2 &= -L_{21}i_1 + L_{22}i_2\end{aligned}\quad (5.25)$$

Realizando un análisis semejante al que se ha realizado, se tiene

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = (L_{11} - L_{12} - L_{21} + L_{22})i$$

y la inductancia equivalente es ahora

$$L = \frac{\Phi}{i} = L_{11} - L_{12} - L_{21} + L_{22}$$

o simplemente

$$L = L_1 + L_2 - 2M \quad (5.26)$$

Supóngase ahora que los inductores se conectan como se observa en la figura 5.16.

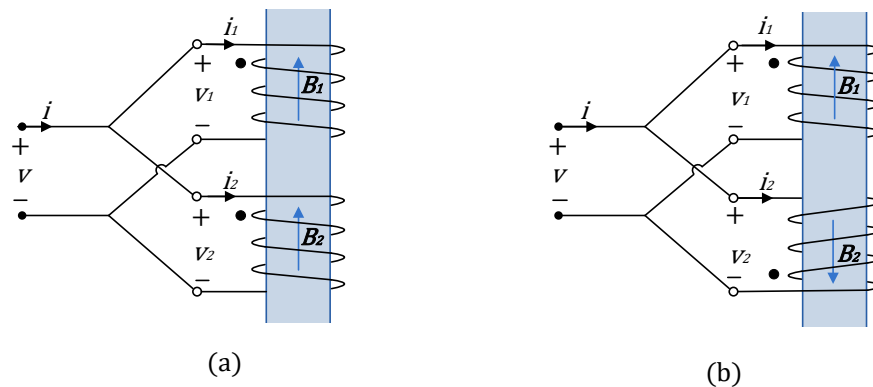


Figura 5.16. Inductores acoplados conectados en paralelo.

Como se puede reconocer, estos inductores están conectados en paralelo. Determinemos su inductancia equivalente.

Con base en lo que se estudiado, para la conexión que se muestra en la figura 5.16(a), nuevamente la ecuación (5.21) describe los flujos magnéticos en cada inductor. Con el fin de simplificar lo más posible el álgebra, se recurre a uso de matrices.

La ecuación (5.21) se puede describir como

$$\begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

por lo que

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} L_{22} & -L_{12} \\ -L_{21} & L_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix}}{L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}} \quad (5.27)$$

De la ley de voltajes de Kirchhoff (LVK), se requiere que

$$v_1 = v_2 = v \quad (5.28)$$

por consiguiente

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi \quad (5.29)$$

De la ley de corrientes de Kirchhoff (LCK), se tiene

$$i = i_1 + i_2$$

con las ecuaciones (5.27) y (5.29)

$$i = \frac{(L_{11} + L_{22} - L_{12} - L_{21})\Phi}{L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}}$$

De la definición de inductancia, su equivalente es

$$L = \frac{\Phi}{i} = \frac{L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}}{L_{11} + L_{22} - L_{12} - L_{21}}$$

o simplemente

$$L = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} \quad (5.30)$$

Para la conexión de inductores que se muestra en la figura 5.16(b), donde los flujos magnéticos se restan, siguiendo un proceso semejante al que se ha llevado a cabo se puede mostrar que la inductancia equivalente es

$$L = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M} \quad (5.31)$$

### Energía almacenada en un inductor

Encontrar una expresión para la energía electromagnética de manera similar a lo que se hizo para la energía electrostática, no es sencillo, ya que no existen cargas magnéticas puntuales moviéndose a través de un campo magnético. No obstante, dado que se ha inferido una dualidad en términos de similitud de unidades entre  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  y entre  $\vec{D}$  y  $\vec{B}$ , se puede partir de la expresión general para la energía electrostática

$$W_E = \frac{1}{2} \iiint \vec{D} \cdot \vec{E} dv$$

y suponer que la energía almacenada en el campo magnético en el cual  $\vec{B} = \mu\vec{H}$ , está dada por

$$W_H = \frac{1}{2} \iiint \bar{B} \cdot \bar{H} dv \quad (5.32)$$

que también se puede expresar como

$$W_H = \frac{\mu}{2} \iiint |\bar{H}|^2 dv \quad (5.33)$$

o

$$W_H = \frac{1}{2\mu} \iiint |B|^2 dv \quad (5.34)$$

Para el caso particular de un inductor, iniciemos con una idea de la energía ya antes visto. Como se sabe

$$W_L = \int_{-\infty}^t p(t') dt' = \int_{-\infty}^t v(t') i(t') dt'$$

de la ley de Faraday

$$v(t) = L \frac{di}{dt}$$

sustituyendo en (5.35)

$$W_L = L \int_0^t i di = \frac{1}{2} L i^2(t) \Big|_{-\infty}^t$$

y dado que  $i(-\infty) = 0$ , se tiene

$$W_L = \frac{1}{2} L i^2(t) \quad [J] \quad (5.35)$$

### Circuito $RL$

Nuevamente se hace el análisis de un circuito eléctrico lineal, invariante en el tiempo y dinámico, (antes se presentó el circuito  $RC$ ). De manera similar, el circuito  $RL$  también se modela por medio de una ecuación diferencial lineal, ordinaria, de coeficientes constantes y de primer orden.

Sea el circuito  $RL$  que se muestra en la figura 5.17. Una forma de obtener el modelo de este circuito cuando el conmutador  $S$  está en la posición  $a$  en  $t = 0$ , se muestra a continuación.

De la primera ley de Kirchhoff se tiene

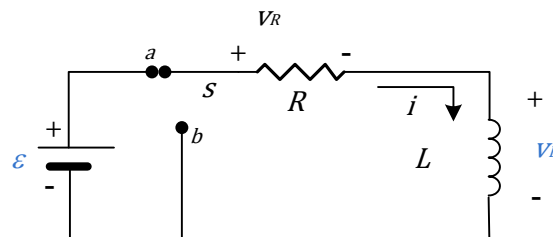


Figura 5.17. Circuito  $RL$ .

$$i_R(t) = i_L(t) = i(t) \quad (5.36)$$

Donde de la ley de Ohm

$$v_R(t) = Ri_R(t) \quad (5.37)$$

para el inductor, sabemos

$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad (5.38)$$

entonces, de la segunda ley de Kirchoff

$$\varepsilon = v_R(t) + v_L(t) = Ri_R(t) + L \frac{di_L(t)}{dt}$$

Con la ecuación (3.36)

$$\varepsilon = L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) \quad (5.39)$$

La solución de esta ecuación diferencial se obtiene recurriendo a la Transformada de Laplace, así

$$\frac{\varepsilon}{s} = RI(s) + L[sI(s) - i(0_-)] = [Ls + R]I(s) - Li(0_-)$$

por lo que

$$I(s) = \frac{i(0_-)}{s + \frac{R}{L}} + \frac{\varepsilon}{L} \frac{1}{s \left(s + \frac{R}{L}\right)} = I_{zi}(s) + I_{zs}(s)$$

La corriente eléctrica *de entrada cero* (que se debe a la condición inicial) es

$$i_{zi}(t) = i(0_-)e^{-\frac{R}{L}t} \quad (5.40)$$

y la corriente eléctrica *de estado cero* (que se debe a la entrada) es

$$i_{zs}(t) = \frac{\varepsilon}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \quad (5.41)$$

de esta manera, la respuesta completa resulta

$$i(t) = i_{zi}(t) + i_{zs}(t) = i(0_-)e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{\varepsilon}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \quad (5.42)$$

Como se recordará, la solución del modelo matemático, dado por (5.39) en este caso, nos permite conocer cualquier variable de interés del circuito (*sistema*) que se estudia. Considerando la condición inicial nula, esto es  $i(0_-) = 0$  para simplificar lo más posible este análisis, el voltaje en el resistor y en el inductor son respectivamente

$$v_R(t) = \varepsilon \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \quad (5.43)$$

$$v_L(t) = \varepsilon e^{-\frac{R}{L}t} \quad (5.44)$$

La constante de tiempo de este circuito es  $\tau_L = \frac{L}{R}$  [s]. Aquí, la constante de tiempo se define como el tiempo que se requiere para que la corriente eléctrica alcance un 63.2 % de su valor final. Lo anterior se verifica si la respuesta de estado cero se evalúa para  $t = \tau_L$ .

$$i_{zs}(t)|_{t=\frac{L}{R}} = \frac{\varepsilon}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \Big|_{t=\frac{L}{R}} = \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{-1}) = 0.632 \frac{\varepsilon}{R}$$

Una vez que el circuito eléctrico ha alcanzado su estado permanente, supóngase que la posición del conmutador  $S$  cambia al nodo  $b$ . Ahora el inductor suministra al resistor la energía magnética almacenada por él. El modelo correspondiente es el siguiente.

De la ley de corrientes de Kirchhoff

$$i_R(t) = i_L(t) = i(t)$$

con la segunda ley de Kirchhoff

$$0 = v_R(t) + v_L(t)$$

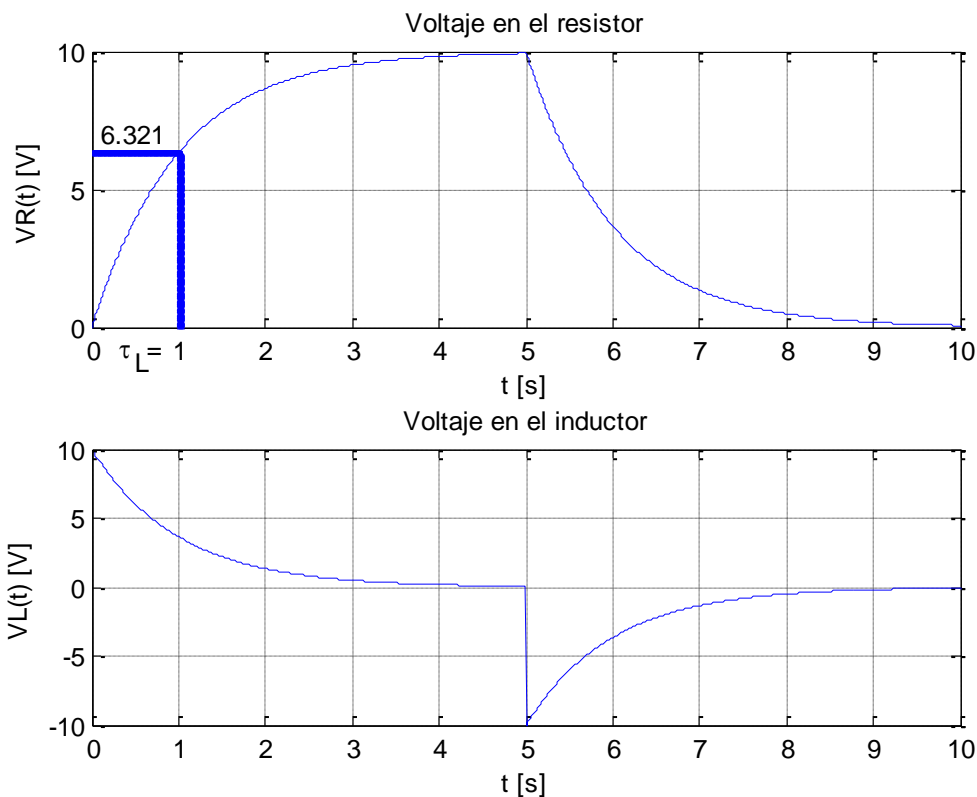


Figura 5.18. Voltajes de carga y descarga de un circuito  $RL$ .

Y de la misma manera como se procedió antes

$$0 = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$$

Ecuación de la que ya conocemos su solución. Si  $i(0_-) = \frac{\varepsilon}{R}$ , entonces

$$i_L(t) = i(0_-)e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$$

por lo que el voltaje en el resistor es

$$v_R(t) = \varepsilon e^{-\frac{t}{RC}}$$

y el voltaje del inductor es

$$v_L(t) = -\varepsilon e^{-\frac{t}{RC}}$$

En la figura 5.18, se muestran las gráficas de los voltajes correspondientes del resistor e inductor para  $5 < t < 10$ .

### Circuitos magnéticos

Se denomina *circuito magnético* a la región, en que se encuentra confinado un flujo magnético, de ciertos materiales llamados *ferromagnéticos* (hierro y ciertas aleaciones con cobalto, tungsteno, níquel, aluminio y otros metales), y que normalmente tienen una permeabilidad mucho mayor que la del aire o del vacío. Las consideraciones de los circuitos magnéticos tienen una estrecha analogía con las de los circuitos eléctricos, con una sola excepción: *los circuitos magnéticos son usualmente no lineales*.

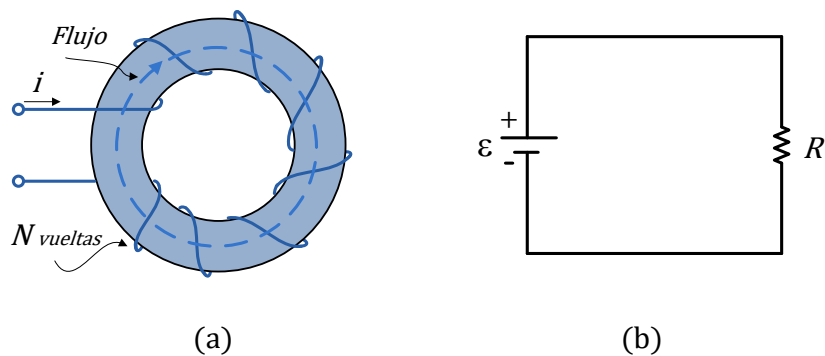


Figura 5.19. Analogía entre (a) un circuito magnético y (b) un circuito eléctrico.

Considere un toroide con un núcleo de material ferromagnético, como se muestra en la figura 5.19(a), en el que se ha devanado un conductor distribuido uniformemente y muy apretado, por lo que prácticamente todas las líneas de flujo magnético están confinadas en él. Este arrollamiento

que se hace alrededor de la horma se denomina *magnetizante* y la corriente eléctrica que circula por él, *corriente magnetizante*.

Las líneas de flujo magnético serán círculos concéntricos y el área que cruza la trayectoria será la misma para cualquier sección perpendicular. Si el ancho del toroide es pequeño comparado con los diámetros interior y exterior de este, la longitud de la trayectoria del flujo magnético será esencialmente la misma para cualquier círculo y estará uniformemente distribuido a través del área.

Se demostró que la densidad de flujo magnético de un toroide de radio medio  $r$  es

$$B = \mu H = \mu \frac{Ni}{l}$$

donde  $l = 2\pi r$ . Y dado que

$$\Phi = BA$$

entonces

$$\Phi = \mu \frac{Ni}{l} A$$

por lo que

$$\Phi = \frac{Ni}{\frac{l}{\mu A}} \quad (5.45)$$

Como se recordará, también se demostró que la resistencia  $R$  de un conductor de sección transversal uniforme  $A$ , longitud  $l$  y resistividad  $\rho$  está dada por

$$R = \frac{\rho l}{A}$$

o en función de la conductividad

$$R = \frac{l}{\sigma A}$$

Cuando el conductor anterior se conecta a un generador de fuerza electromotriz con resistencia interna despreciable, la ecuación que describe a este circuito tiene la siguiente forma

$$i = \frac{fem}{\frac{l}{\sigma A}} = \frac{fem}{R} \quad (5.46)$$

Las formas de (5.45) y (5.46) son idénticas. La intensidad de la corriente eléctrica  $i$  corresponde al flujo magnético  $\Phi$ , la  $fem$  al producto de  $Ni$  y la resistencia  $R$  a  $\frac{l}{\mu A}$ . La viabilidad de una bobina de generar un flujo magnético es proporcional al número de vueltas  $N$  y la intensidad de la corriente  $i$ , este producto recibe el nombre de *fuerza magnetomotriz* (se abrevia  $fmm = \mathcal{F}$ ). Este flujo resultante es además función de la oposición del hierro a transportarlo. Esta oposición se llama *reluctancia*  $\mathcal{R}$  del circuito magnético, sus unidades son *amperios-vueltas por weber*  $\left[\frac{Av}{Wb}\right]$ . El recíproco de la reluctancia se denomina *permanencia* y se representa con el símbolo  $\mathcal{P}$ .



Teniendo en cuenta lo anterior la ecuación (5.46) puede escribirse como

$$\Phi = \frac{fmm}{\mathcal{R}} \quad (5.47)$$

Esta ecuación se cita como la ley de Ohm para circuitos magnéticos y es útil para enfatizar la analogía matemática entre un circuito eléctrico de cd y un circuito magnético. Por consiguiente, el circuito eléctrico de la figura 5.19(b) es equivalente al circuito magnético de la figura 5.19(a) y ambos se analizan mediante un razonamiento muy semejante.

De hecho, las dos leyes de Kirchhoff se pueden expresar para los circuitos magnéticos. La primera, la suma de los flujos magnéticos que entran a un punto de unión en un circuito magnético es igual a la suma de flujos magnéticos de salen de dicha unión. La segunda, alrededor de cualquier trayectoria cerrada en un circuito magnético la suma de las  $fmm$  o potenciales magnéticos que ocasiona el paso del flujo magnético a través de los materiales ferromagnéticos debe ser igual a los amperios vuelta que constituyen la excitación.

Como se mencionó, los circuitos magnéticos son usualmente no lineales. Esto se debe a que la relación entre la densidad de flujo magnético  $\vec{B}$  y la excitación magnética  $\vec{H}$  no es lineal y sólo es posible representarla con una gráfica denominada *curva de magnetización* o curva  $B - H$ .

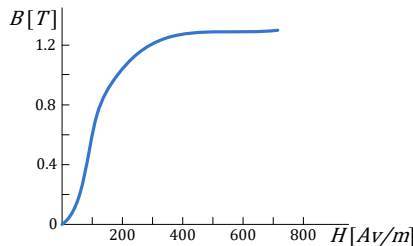


Figura 5.20. Curva de magnetización ( $B - H$ ) común.

En la figura 5.20 se presenta una curva de magnetización típica. Se debe advertir que  $\mu$  está dada por la razón de  $\frac{B}{H}$  y no por  $\frac{dB}{dH}$ , esto es la pendiente de la curva.  $\mu$  se mide en  $\left[\frac{\text{henrys}}{\text{m}}\right]$ , es llamada la permeabilidad del material y en la literatura afín se acostumbra a expresarla como  $\mu = \mu_r \mu_0$ . La cantidad adimensional  $\mu_r$  es la razón de la permeabilidad de un material dado a la permeabilidad el vacío y se conoce como *permeabilidad relativa* del material.

### La ecuación de un circuito magnético

Los circuitos magnéticos están constituidos por corrientes eléctricas que actúan como fuentes de campos magnéticos, partes ferromagnéticas y entrehierros, como se puede apreciar en el circuito magnético que se muestra en la figura 5. 21.

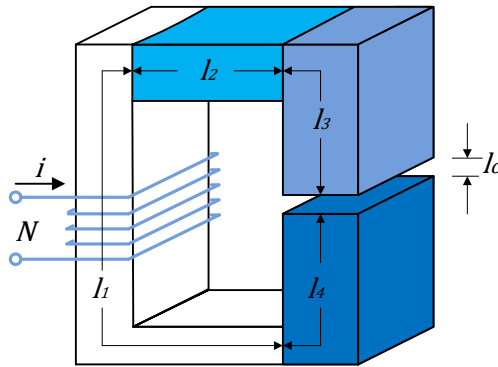


Figura 5.21. Un circuito magnético.

El análisis de este circuito se presenta a continuación. De la ley la circuital de Ampère

$$\mathcal{F} = \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_o l_o + H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_3 l_3 + H_4 l_4 = Ni$$

Aunque el arrollamiento está limitado a una porción del núcleo, se considera que el *flujo disperso* en el devanado y en el entrehierro es insignificante, por lo que el flujo total  $\Phi = BA = \mu HA$ , entonces

$$H_o = \frac{\Phi_o}{\mu_o A_o}; H_1 = \frac{\Phi_1}{\mu_1 A_1}; \dots; H_4 = \frac{\Phi_4}{\mu_4 A_4}$$

pero

$$\Phi_o = \Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = \Phi_4 = \Phi$$

Así

$$Ni = \Phi \left( \frac{l_o}{\mu_o A_o} + \frac{l_1}{\mu_1 A_1} + \frac{l_2}{\mu_2 A_2} + \frac{l_3}{\mu_3 A_3} + \frac{l_4}{\mu_4 A_4} \right)$$

ecuación que es análoga a un circuito eléctrico con una *fem* y resistencias en serie, esto es

$$\varepsilon = i(R_o + R_1 + R_2 + R_3 + R_4)$$

### Principio de operación del transformador

Ahora se presenta al *transformador ideal*, el cual es una *idealización* del transformador físico disponible en el mercado. No obstante, las relaciones de corriente y de voltaje que se deducen, aproximan su comportamiento considerablemente

El transformador ideal satisface las características siguientes:

No disipa energía.

No existen fugas de flujo magnético, lo que implica que el coeficiente de acoplamiento es  $k_m = 1$ .

La autoinductancia de cada devanado  $L$  es infinita, lo que conlleva a considerar que no hay dispersión de flujo magnético en ninguno de ellos.

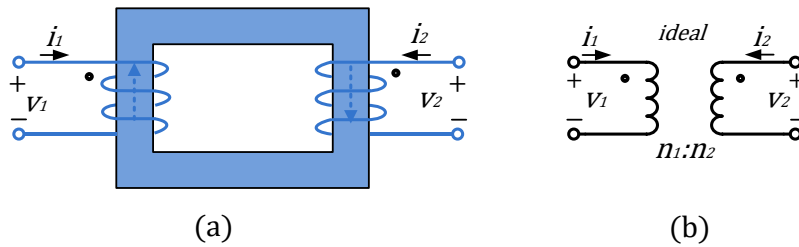


Figura 5.22. (a) El transformador ideal. (b) Su símbolo.

Si  $\Phi$  es el flujo que atraviesa una sola espira, entonces el flujo total en los devanados 1 y 2 son respectivamente

$$\Phi_1 = n_1 \Phi \quad \text{y} \quad \Phi_2 = n_2 \Phi$$

De la ley de Faraday

$$v_1 = \frac{d\Phi_1}{dt} = n_1 \frac{d\Phi}{dt} \quad \text{y} \quad v_2 = \frac{d\Phi_2}{dt} = n_2 \frac{d\Phi}{dt}$$

por consiguiente

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad \forall t \quad (5.48)$$

Por otra parte, del circuito magnético de la figura 5.22(a), se tiene

$$n_1 i_1 + n_2 i_2 = \mathcal{R} \Phi = \frac{l}{\mu A} \Phi$$

y como se ha supuesto que la inductancia de cada devanado es infinita, lo que implica que  $\mu \rightarrow \infty$ . ¿Por qué?, entonces de la ecuación anterior

$$n_1 i_1 + n_2 i_2 = 0$$

por lo tanto

$$\frac{i_1}{i_2} = - \frac{n_1}{n_2} \quad \forall t \quad (5.49)$$

De (5.48) y (5.49) se tiene

$$v_1(t) i_1(t) + v_2(t) i_2(t) = 0$$

Esto es, la suma de las potencias de entrada a cada *puerto* es cero. Ya que como se había supuesto, en el *transformador ideal* no se almacena energía y tampoco se disipa. Cualquier potencia que fluye hacia adentro de una terminal, sale por la otra.

#### Ejemplo 4

Encuentre la resistencia de entrada  $R_{ent}$ , esto es la resistencia “vista” desde las terminales del primario del transformador cuando se conecta una carga resistiva con resistencia  $R_L$  al devanado secundario, como se observa en la figura 5.23.

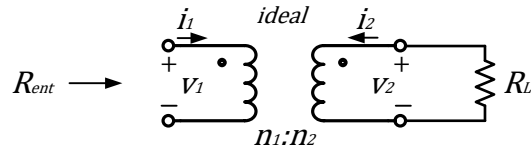


Figura 5.23. Resistencia de entrada de un transformador ideal.

La resistencia de entrada se puede determinar con el auxilio de la ley de Ohm. Así

$$R_{ent} = \frac{v_1}{i_1} = \frac{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)v_2}{-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)i_2} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \left(\frac{v_2}{-i_2}\right)$$

pero

$$v_2 = -R_L i_2$$

por tanto

$$R_{ent} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 R_L$$

Esta resistencia recibe el nombre de *resistencia reflejada*, la cual se puede considerar como una resistencia insertada en el primario por el secundario.

## **Referencias**

Sears, F. W., Zemansky, M. W., Young, H. D. y Freedman, R. A. *Física Universitaria con física moderna Vol. 2*. México: Pearson Educación, 2005.

Serway, R. A. *Física Tomo II*. México: Thomson, 2005.

Jaramillo, M. G. A. y Alvarado, C. A. A. *Electricidad y Magnetismo*. México: UNAM, Facultad de Ingeniería, 2004.

Resnick, R., Halliday, D. y Krane, K. *Física Vol.2*. México: CECSA, 2004.

Tipler, P. A. y Mosca, G. *Física para la ciencia y la tecnología Vol. 2A*. Barcelona: Ed. Reverté, S. A. 2003.

Neff, H. P., Jr. *Basic Electromagnetic Fields*. New York: Harper & Row, 1981.

Desoer, C. A., and Kuh, E. S. *Basic Circuit Theory*. Tokio: McGraw-Hill KogaKusha, Ltd. 1969.