

EL CAMPO MAGNÉTICO

De manera similar a la de demostrar la existencia de un campo eléctrico colocando una carga eléctrica en el ámbito de otras cargas y observar que se ejerce sobre ella una fuerza de origen eléctrico. Un *campo magnético* se puede constatar que existe si al llevar un elemento de corriente eléctrica en la vecindad de otro conductor con corriente, aquel también experimenta una fuerza. Como una corriente eléctrica implica una carga en movimiento, también se podría hablar de que una *carga móvil* crea un *campo magnético* en el espacio que la rodea, y este campo es el que ejerce una fuerza sobre otra carga eléctrica que se mueve en él.

Un campo magnético al igual que un campo eléctrico, se puede representar por líneas, llamadas ahora *líneas de inducción*, cuya dirección en cada punto es la dirección del vector inducción magnética \vec{B} . De hecho, el número de líneas por unidad de superficie normal a su dirección es igual al valor de la *inducción magnética*. Es por esto, que la inducción magnética en una región se puede expresar en líneas de inducción por unidad de superficie. En el Sistema Internacional de unidades una línea de inducción se denomina weber, de donde la inducción magnética se expresa en webers por metro cuadrado $\left[\frac{wb}{m^2}\right]$ o teslas $[T]$.

En el Sistema Cegesimal de Unidades, también llamado sistema CGS, la inducción magnética se expresa en maxwells por centímetro cuadrado. Esto es $\left[\frac{maxwell}{cm^2}\right] = [gauss]$.

Como un gauss es igual a 10^{-4} teslas, resulta

$$1 \left[\frac{wb}{m^2}\right] = 1[T] = 10^4 \left[\frac{maxwells}{cm^2}\right] = 10^4 [gauss]$$

Aceptemos inicialmente que un elemento de corriente $i\vec{dl}$ ocasiona una diferencial del campo de la inducción magnética según la siguiente expresión

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i\vec{dl} \times \hat{r}}{r^2} \quad (4.1)$$

ésta se conoce como *Ley de Biot y Savart*, data de 1820 y recibe ese nombre en honor de los físicos franceses Jean-Baptiste Biot y Felix Savart.

El término μ_0 es una constante de proporcionalidad, se denomina *permeabilidad del vacío* y es igual a $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \left[\frac{wb}{Am}\right]$, \hat{r} es un vector unitario, esto es, su magnitud es igual a la unidad, su dirección y sentido es la de la línea que va desde el elemento de corriente al punto donde se está calculando $d\vec{B}$.

Recordando la definición de producto vectorial, es posible expresar la ley de Biot y Savart como:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{idl \sin \theta}{r^2} \quad (4.2)$$

Y para encontrar la inducción magnética debida a un circuito completo, simplemente se lleva a cabo la integral de la ecuación anterior, o sea

$$B = \int dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{idl \sin \theta}{r^2} \quad (\text{Suma geométrica}) \quad (4.3)$$

Cálculo del campo de la inducción magnética \vec{B} en la proximidad de un conductor rectilíneo muy largo, que transporta una corriente i .

Considere el conductor recto que coincide con el eje z , mostrado en la figura 4.1.

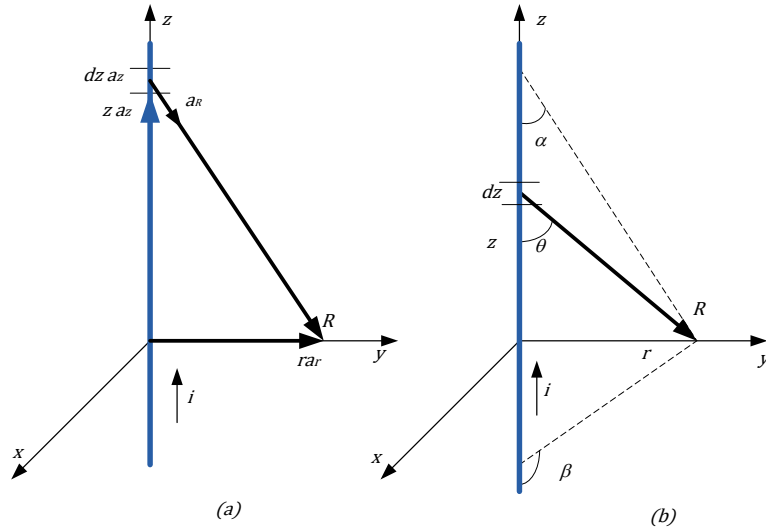


Figura 4.1. Conductor recto de longitud infinita que transporta una corriente i .

De la ley de Biot y Savart, ecuación (4.1)

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{id\vec{z} \times \vec{a}_R}{R^2}$$

donde

$$\vec{R} = r\vec{a}_r - z\vec{a}_z \quad \vec{a}_R = \frac{r\vec{a}_r - z\vec{a}_z}{\sqrt{(r^2+z^2)}}$$

entonces

$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{idz\vec{a}_z}{r^2+z^2} \frac{r\vec{a}_r - z\vec{a}_z}{\sqrt{(r^2+z^2)}} = \frac{\mu_0 i r \vec{a}_\phi}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{dz}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\bar{B} = \frac{\mu_0 i r a \phi}{4\pi} \frac{z}{r^2 \sqrt{(r^2 + z^2)}} \Big|_{-L}^L = \frac{\mu_0 i a \phi}{4\pi r} \frac{2}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{L}\right)^2}}$$

cuando $L \rightarrow \infty$

$$\bar{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} a \phi \quad [T] \quad (4.4)$$

Con el fin de familiarizarnos con estas ideas, a continuación se obtiene el resultado anterior aplicando la ecuación (4.2).

La relación entre r y R es

$$R = r \csc \theta$$

asimismo entre r y z se tiene

$$z = r \cot \theta$$

por lo que

$$dz = -r \csc^2 \theta d\theta$$

entonces

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{idz \sen \theta}{R^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{\beta}^{\alpha} \frac{-r \csc^2 \theta d\theta \sen \theta}{r^2 \csc^2 \theta}$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi r} \int_{\beta}^{\alpha} -\sen \theta d\theta = \frac{\mu_0 i}{4\pi r} (\cos \alpha - \cos \beta)$$

en el límite, $\alpha \rightarrow 0^\circ$ y $\beta \rightarrow 180^\circ$; y por consiguiente

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \quad [T]$$

resultado idéntico al ya obtenido antes.

Campo de la inducción magnética en el eje de una espira circular.

Consideremos ahora el problema de encontrar la inducción magnética en el centro de una espira circular de radio a por la que circula una corriente eléctrica i , como se exhibe en la figura 4.2. En ambas espiras, el elemento $i\bar{dl}$ y \bar{r} son perpendiculares, esto implica que $\sen(90^\circ) = 1$.

La inducción magnética en el centro de la espira es

$$B = \int dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{idl \sen \theta}{a^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi a^2} \int dl = \frac{\mu_0 i}{4\pi a^2} 2\pi a = \frac{\mu_0 i}{2a} \quad [T] \quad (4.5)$$

La inducción magnética a lo largo del eje de la espira es posible encontrarla, de manera sencilla, si se considera la simetría

$$B = \int dB \cos \varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{idl \sin \theta}{r^2} \cos \varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{idl a}{r^3}$$

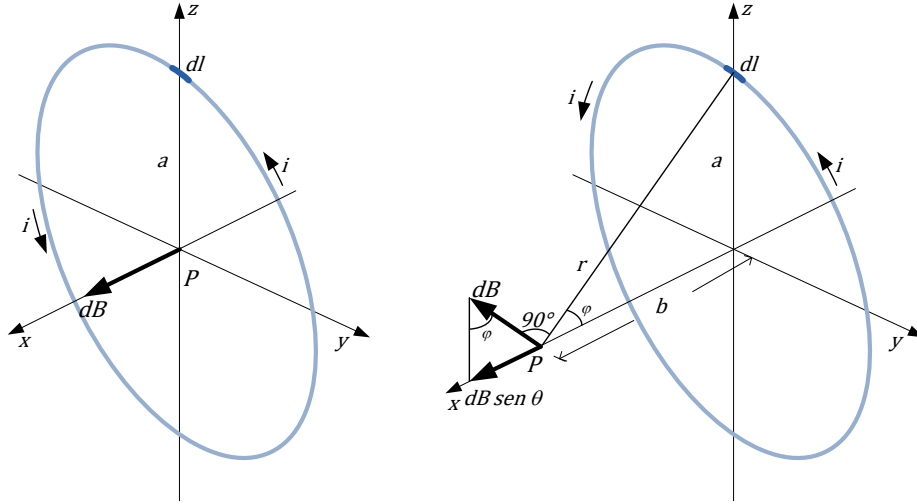


Figura 4.2. Inducción magnética en el eje de una espira circular.

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2} \int dl = \frac{\mu_0 i a}{4\pi r^3} 2\pi a = \frac{\mu_0 i a^2}{2r^3} = \frac{\mu_0 i a^2}{2(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} \quad [T] \quad (4.6)$$

Observe que si en la ecuación (4.6) se hace $b = 0$, se obtiene la ecuación (4.5).

Si se tienen N espiras, considerando linealidad, nuevamente

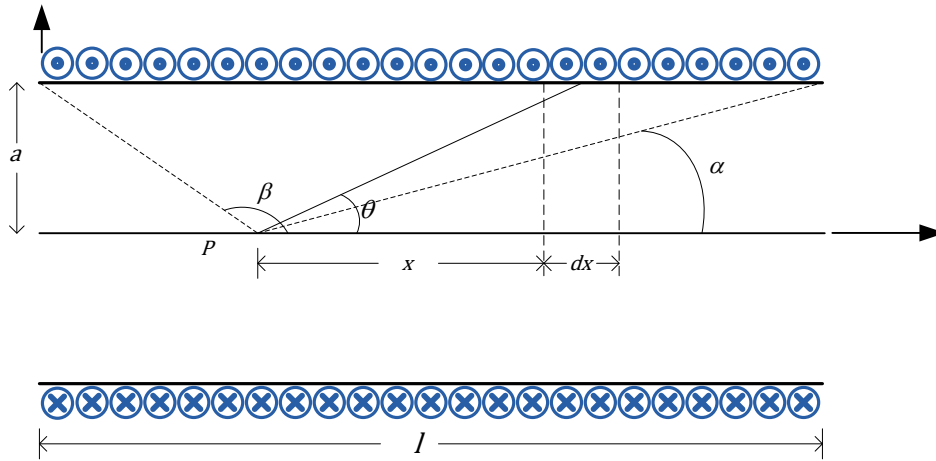
$$B = \frac{N\mu_0 i}{2a} \quad (4.7)$$

$$B = \frac{N\mu_0 i a^2}{2(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.8)$$

Campo de la inducción magnética en el eje de un solenoide.

Un solenoide, (del griego: significa tubo, canal o que tiene aspecto de) es un conductor arrollado en forma de hélice. En la figura 4.3 se muestra un bosquejo del mismo.

Si el solenoide está constituido de espiras circulares, es posible recurrir al resultado que se determinó antes. Teniendo esto presente, y dado que el número de vueltas uniformemente distribuidas en la longitud l es N , entonces en la sección transversal de longitud dx habrá $\frac{N}{l} dx$ vueltas, así


 Figura 4.3. Solenoide de longitud l , radio a , de N vueltas y con una corriente i .

$$dB_x = \frac{\mu_0 i a^2}{2(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{N}{l} dx$$

de la figura 4.3, se tiene que $\tan \theta = \frac{a}{x}$, por lo que $dx = -a \csc \theta^2 d\theta$, sustituyendo

$$dB_x = -\frac{N\mu_0 i}{2l} \frac{a^2}{(a^2 + a^2 \cot^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} a \csc \theta^2 d\theta$$

integrando

$$B_x = \int dB_x = \frac{N\mu_0 i}{2l} \int_{\beta}^{\alpha} \sin \theta d\theta = \frac{N\mu_0 i}{2l} (\cos \alpha - \cos \beta) \quad (4.9)$$

En el centro del solenoide

$$\cos \alpha = \frac{\frac{l}{2}}{\left(a^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}} = -\cos \beta$$

y

$$\bar{B} = \frac{N\mu_0 i}{2\left(a^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}} a_x$$

Si $l \gg a$, entonces $\alpha = 0^\circ$ y $\beta = 180^\circ$ por lo que

$$\bar{B} = \frac{N\mu_0 i}{l} a_x \quad (4.10)$$

En un extremo del solenoide $\alpha = 90^\circ$ o $\beta = 90^\circ$

$$\bar{B} = \frac{N\mu_0 i}{2l} a_x \quad (4.11)$$

se tiene la mitad de la inducción magnética presente en el centro del solenoide.

Flujo magnético

El número total de líneas de inducción (webers) que pasan a través de una superficie se denomina flujo magnético y se representa por letra griega ϕ , ϕ

$$\phi = \iint \bar{B} \cdot \bar{dA} \quad [\text{webers}] \quad (4.12)$$

En el caso particular de que B sea uniforme y normal a la superficie A

$$\phi = BA \quad (4.13)$$

De esta relación, se puede inferir que la inducción magnética B es igual al flujo magnético por unidad de área, por lo que frecuentemente también se le denomina *densidad del flujo magnético*.

Integrales de superficie y curvilínea de la inducción magnética

Integral de superficie

La integral de superficie de la componente normal de \bar{B} a lo largo de una superficie cerrada es *siempre* nula. La forma matemática de esta aseveración es

$$\phi = \oiint \bar{B} \cdot \bar{dA} = 0 \quad (4.14)$$

Esta afirmación es verdadera porque en una región donde existen líneas de flujo magnético, si se considera una superficie cerrada, el flujo magnético que entra en la superficie también debe salir completamente. La interpretación física de esta relación es que *no existen polos magnéticos aislados*.

La ecuación (4.14) es análoga a la ley de Gauss de la electrostática. En una región donde está presente una carga eléctrica, las líneas de flujo eléctrico se originan o terminan en ella. Las líneas de flujo magnético son líneas cerradas. De hecho, los imanes tienen pares de polos llamados *polo norte* y *polo sur*, y no existen (al menos comercialmente) imanes de un solo polo ya sea norte o sur.

La ecuación (4.14) se puede expresar de otra manera, empleando el teorema de la divergencia

$$\oiint \bar{B} \cdot d\bar{A} = \iiint (\nabla \cdot \bar{B}) dv = 0$$

si esta integral es igual a cero, entonces el integrando debe ser nulo; como dv no puede ser cero, se tiene que la divergencia de la densidad de flujo magnético sí lo es, es decir

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0 \tag{4.15}$$

Integral curvilínea

La integral curvilínea de la inducción magnética alrededor de cualquier trayectoria cerrada es igual al producto de la permeabilidad μ_0 por la corriente eléctrica i que circula a través de la superficie limitada por la curva

$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 i \tag{4.16}$$

Esta relación se denomina *Ley de Ampère*, nos permite determinar campos magnéticos de una manera sencilla. En la aplicación de esta ecuación, se ha convenido en considerar a la corriente eléctrica positiva si al avanzar en el sentido de un tornillo enroscado a derechas su rotación coincide con la dirección de la trayectoria de integración.

Ejemplo 1

Sea un conductor cilíndrico largo de radio a que transporta una corriente eléctrica i uniformemente distribuida en la sección transversal. Encuentre el vector inducción magnética dentro y fuera del conductor empleando la ley de Ampère.

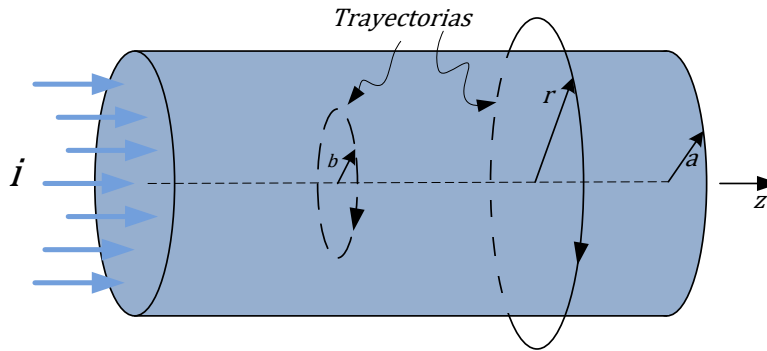


Figura 4.4. Corriente eléctrica encerrada por una trayectoria cerrada.

Para $r < a$:

De los resultados obtenidos, se sabe que la densidad de flujo magnético es paralela al vector a_ϕ , por lo que para una trayectoria circular cerrada de radio $b < a$, la aplicación de la ley de Ampère resulta

$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{l} = \int_{\phi=0}^{2\pi} B_{\phi} b d\phi = 2\pi b B_{\phi}$$

Recordando la relación que existe entre la corriente y la densidad de corriente, $i = \iint \bar{J} \cdot d\bar{A}$ la ley de Ampère se puede escribir como

$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 i = \iint \mu_0 \bar{J} \cdot d\bar{A} \quad (4.17)$$

Para nuestro problema

$$2\pi b B_{\phi} = \mu_0 i = \int_{r=0}^b \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{\mu_0 i}{\pi a^2} dr r d\phi = \frac{\mu_0 i}{2\pi a^2} 2\pi b^2 = \mu_0 i \left(\frac{b}{a}\right)^2$$

por consiguiente

$$B_{\phi} = \frac{\mu_0 i b}{2\pi a^2} \quad [T] \quad b < a$$

Para $r > a$:

Ahora se elige una trayectoria circular de radio $r > a$. La corriente encerrada por esta trayectoria es i , por lo que de la ley de Ampère, se tiene

$$2\pi r B_{\phi} = \mu_0 i$$

despejando

$$B_{\phi} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

Resultado idéntico al que se obtuvo antes, ecuación (4.4), pero con una manipulación matemática simplificada, como consecuencia de la *simetría geométrica* del problema.

Campo de la inducción magnética en el interior de un toroide

Un toroide es un solenoide de N vueltas que se dobla circularmente. En la figura 4.5 se muestra un esquema del arrollamiento que resulta. De lo visto para el solenoide, es posible afirmar que el flujo magnético se confina en el interior del arrollamiento por lo que la densidad de flujo es uniforme dentro de él y es paralela a lo largo de la trayectoria circular de radio r representada por la línea a trazos. Al aplicar la ley de Ampère, y teniendo en cuenta que la corriente total dentro de la trayectoria circular es Ni , resulta

$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{l} = B \oint dl = B 2\pi r = Ni \mu_0$$

así

$$B = \frac{N \mu_0 i}{2\pi r} \quad (4.18)$$

Si el toroide se desdobra, se tiene de nuevo el solenoide, su longitud es $2\pi r = l$. Al sustituirlo en la ecuación (4.18), se tiene el resultado que coincide con la ecuación (4.11).

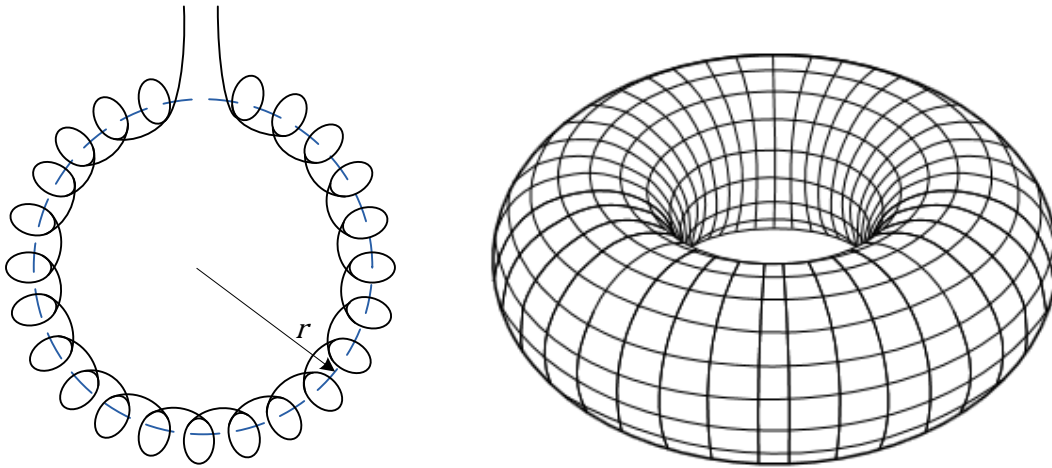


Figura 4.5. Toroide.

Fuerza sobre una carga móvil

Si una carga eléctrica positiva Q se mueve con una velocidad \vec{v} , perpendicularmente a la inducción magnética o *densidad del flujo magnético* \vec{B} en una cierta región, como se muestra en la figura 4.6, la carga eléctrica experimenta una fuerza de origen magnético \vec{F}_m dada por

$$F_m = QvB$$



Figura 4.6. Una carga eléctrica móvil donde hay un campo magnético, sufre una fuerza.

Si la velocidad de la carga eléctrica y la inducción magnética forman un ángulo θ , entonces

$$F_m = QvB \text{ sen } \theta$$

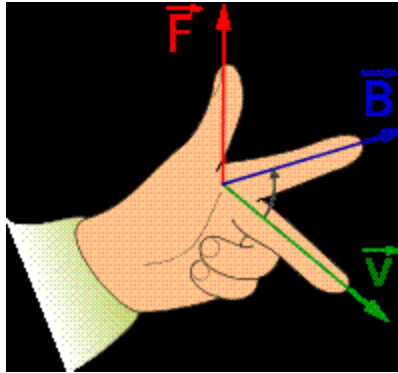


Figura 4.7. Regla de la mano izquierda.

Se debe enfatizar que la fuerza magnética \vec{F}_m se localiza en una dirección perpendicular al plano formado por \vec{v} y \vec{B} , por lo que una expresión más conveniente para calcularla es

$$\vec{F}_m = Q\vec{v} \times \vec{B} \quad [N] \quad (4.19)$$

Esta relación puede recordarse fácilmente utilizando los dedos pulgar, índice y medio o del corazón para representar las direcciones perpendiculares de la fuerza magnética, la densidad de flujo magnético y la velocidad de la carga eléctrica respectivamente, como se observa en la figura 4.7. Esta representación se conoce como *regla de la mano izquierda*.

Órbitas en los campos magnéticos de partículas con carga eléctrica

Pensemos ahora en una partícula con carga eléctrica positiva que se mueve con una velocidad \vec{v} , en dirección perpendicular a la inducción magnética uniforme \vec{B} , en una cierta región como se presenta en la figura 4.8.

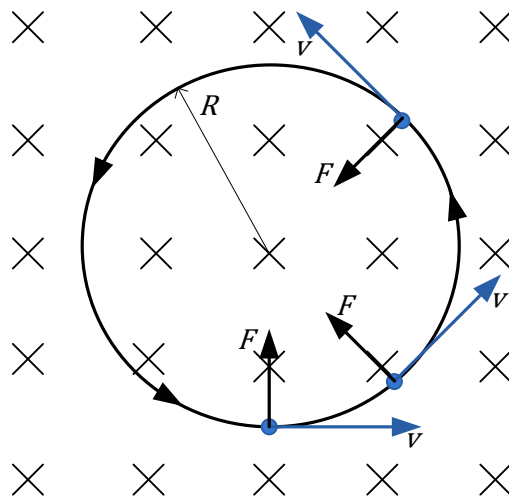


Figura 4.8. Trayectoria de una partícula con carga eléctrica en un campo magnético uniforme.

Recurriendo a la regla de la mano izquierda, la fuerza magnética tiene la dirección y sentido que se muestra y por consiguiente no se afecta la velocidad sino únicamente la dirección de la partícula. Es por esto que la trayectoria que sigue es la de un círculo de radio R , cuyo valor se determina a continuación.

La fuerza centrípeta sobre la partícula es

$$F = \frac{mv^2}{R}$$

esta fuerza, es igual a la fuerza magnética

$$F = QvB$$

por lo tanto

$$\frac{mv^2}{R} = QvB$$

así

$$R = \frac{m v}{Q B} \quad (4.20)$$

Es importante destacar, que el radio de la trayectoria circular es proporcional a la razón de la masa y la carga eléctrica de la partícula, esto es $R \propto \frac{m}{Q}$. ¿Por qué se dice que es importante?

Es aconsejable que se lleve a cabo una exploración sobre el funcionamiento y propósito del espectrógrafo de masas y el ciclotrón.

Fuerza de Lorentz (1853-1928)

Recordando que la fuerza eléctrica sobre una carga eléctrica Q localizada en una región donde hay un campo eléctrico \vec{E} , (a partir de la definición de campo eléctrico) es

$$\vec{F}_e = Q\vec{E}$$

Si en esa misma región también está presente un campo magnético \vec{B} y la carga tiene una velocidad \vec{v} ; la fuerza total sobre la carga eléctrica es, aplicando *superposición*

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad [N] \quad (4.21)$$

Relación se conoce como *Ecuación de la Fuerza de Lorentz*.

Fuerza sobre un conductor que transporta una corriente

Considere un conductor rectilíneo por el cual circula una corriente eléctrica i , como se muestra en la figura 4.9, en la que con propósitos de análisis se ha amplificado una fracción del mismo.

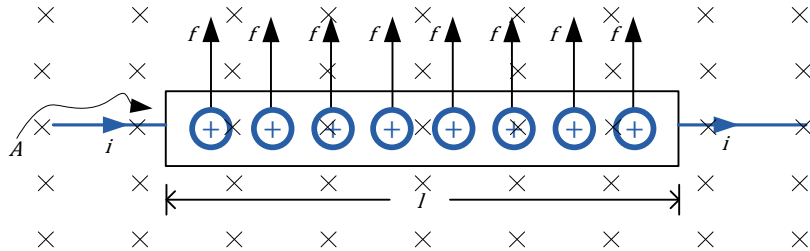


Figura 4.9. Porción de conductor rectilíneo con corriente i , longitud l y sección transversal A .

Como se recordará, se ha convenido que el sentido convencional de la corriente eléctrica es el mismo que tendrían portadores de carga positivos.

La fuerza f que se ejerce sobre cada portador de carga libre es entonces

$$f = qvB$$

Asimismo, sabemos que

$$i = nqvA$$

donde n indica el número de cargas móviles por unidad de volumen, q la carga, v es la velocidad promedio o de arrastre de las cargas y A es el área de la sección transversal del conductor. El número de cargas en la longitud l es por consiguiente $N = n l A$. Y la fuerza total sobre el conductor es

$$F = Nf = n l A q v A = n q v A l B = i l B$$

Si la dirección del conductor forma un ángulo θ con la dirección del campo magnético, la fuerza es

$$F = i l B \text{ sen } \theta$$

o

$$\vec{F} = i \vec{l} \times \vec{B} \tag{4.22}$$

Si el conductor no es rectilíneo, el campo magnético no es uniforme o tienen lugar ambas cosas

$$d\vec{F} = i B dl \text{ sen } \theta$$

o

$$d\vec{F} = i d\vec{l} \times \vec{B} \tag{4.23}$$

nos permite conocer la fuerza sobre un elemento de corriente de longitud dl , en un punto donde la inducción magnética es \vec{B} y θ es el ángulo formado por ellos.

Fuerza y momento sobre un circuito completo

Conductor rectangular

Determine el par que experimenta el conductor de forma rectangular que se muestra en la figura 4.10 y por el cual circula una corriente eléctrica i . Suponga, además, que el conductor puede girar alrededor del eje OO .

Sobre los lados horizontales, perpendiculares a la inducción magnética, se ejerce una fuerza $F_y = iaB$ con la dirección y sentido mostrados. En los otros lados la fuerza es $F_x = ibB \text{ sen } \varphi$. Es evidente que la fuerza resultante que experimenta el conductor es nula. Sin embargo, *el momento resultante no es cero ya que las fuerzas sobre los lados horizontales constituyen un par, cuyo momento es*

$$\tau = iaB b \text{ sen } \theta = iAB \text{ sen } \theta$$

donde $A = ab$ es el área del cuadro. Si además, el cuadro consta de N vueltas, se tiene

$$\tau = NiAB \text{ sen } \theta$$

El producto de la corriente por el área por el número de vueltas se denomina *momento magnético dipolar* y se representa por

$$P_m = NiA$$

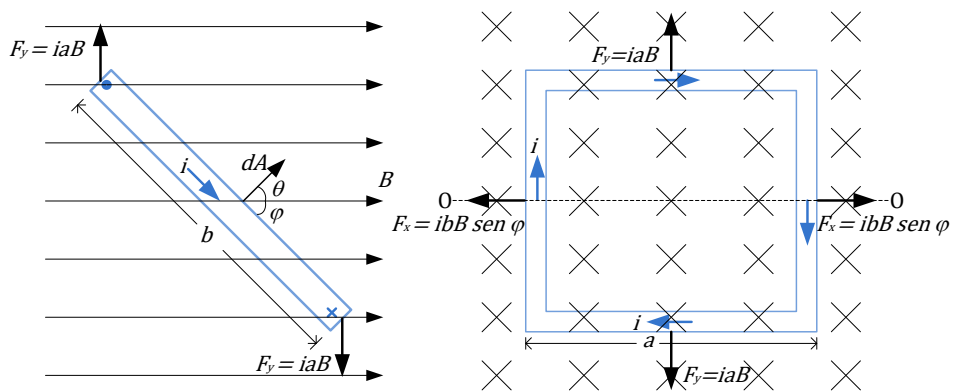


Figura 4.10. Conductor rectangular con una corriente i en un campo magnético uniforme \vec{B} .

Como una superficie A puede representarse por un vector perpendicular a la superficie \vec{A} , con el fin de evitar ambigüedad, se ha convenido en que el sentido del vector es aquel en que avanzaría un tornillo enroscado a derechas si se gira en el sentido de la corriente en el conductor; por lo que

$$\vec{\tau} = \vec{P}_m \times \vec{B}$$

nos proporciona el par sobre el conductor y el eje de rotación del mismo.

Conductor circular

Considere ahora un conductor circular, en el que el ángulo entre el elemento de corriente idl y la inducción magnética \vec{B} no es constante. En la figura 4.11 se muestra el conductor circular de radio a . Supóngase además, que el conductor puede girar alrededor del eje OO .

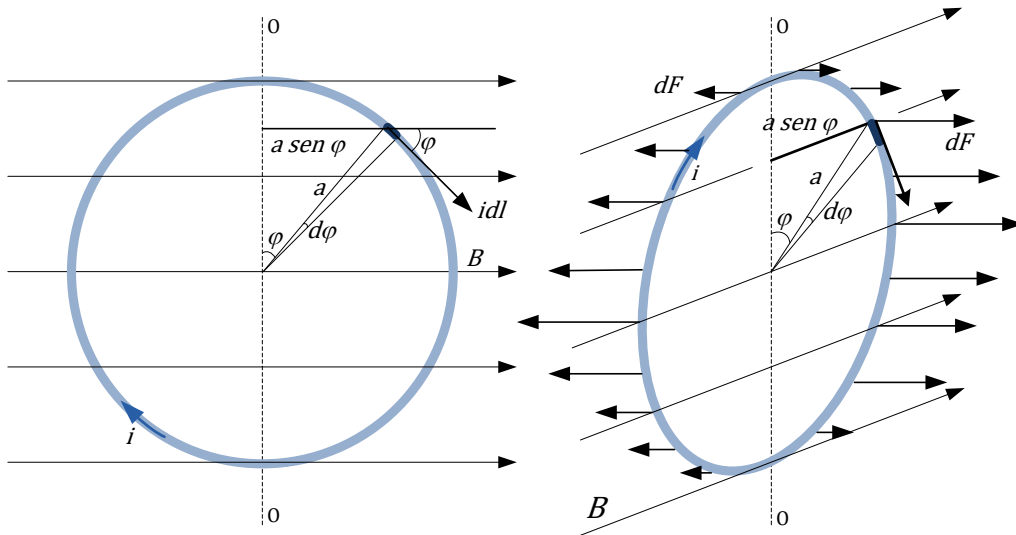


Figura 4.11. Conductor circular con una corriente i en un campo magnético uniforme \vec{B} .

El momento de la fuerza dF con respecto al eje de rotación es

$$d\tau = dF \ 2a \ \text{sen } \varphi$$

donde

$$dF = idl \ B \ \text{sen } \varphi = ia \ d\varphi \ B \ \text{sen } \varphi$$

por lo que

$$d\tau = ia \ d\varphi \ B \ \text{sen } \varphi \ 2a \ \text{sen } \varphi = 2iBa^2 \ \text{sen}^2 \varphi \ d\varphi$$

integrando, el par resultante es

$$\tau = \int d\tau = 2iBa^2 \int_0^\pi \text{sen}^2 \varphi \ d\varphi = iB\pi a^2 = iAB$$

Si el conductor está constituido de N vueltas, entonces el resultado anterior también se puede escribir como

$$\vec{\tau} = Ni\vec{A} \times \vec{B} = \vec{P}_m \times \vec{B}$$

donde $\vec{P}_m = Ni\vec{A}$, es el momento magnético dipolar.