

## CAPACITANCIA Y DIELECTRICOS

### Concepto de capacitor y definición de capacitancia

El elemento que se estudia es un modelo del dispositivo físico denominado *capacitor*. Consiste de dos terminales y su *propiedad más relevante es la de almacenar carga eléctrica*. Originalmente fue llamado *condensador* por Alessandro Volta (1745-1827), y aunque este término fue muy común bastante tiempo, actualmente se conoce como *capacitor*.

La *capacitancia de un conductor o de un conjunto de conductores, se mide por la cantidad de carga que se le debe suministrar para elevar su potencial un volt o simplemente la razón de la carga eléctrica almacenada y su diferencia de potencial, esto es*

$$C = \frac{q}{v} \quad (2.1)$$

la unidad de la capacitancia es el culombio por volt. Esta razón de unidades recibe el nombre de *faradio*, [F] en honor al científico experimental Michael Faraday (1791-1867).

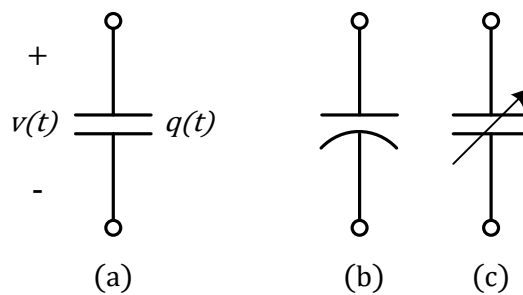


Figura 2.1. El símbolo para un capacitor.

En los diagramas de circuitos un capacitor se representa simbólicamente como se muestra en la figura 2.1(a) o 2.1(b), y cuando su capacitancia no es constante como se exhibe en la figura 2.1(c). Los capacitores tienen muchas aplicaciones, entre otras: se oponen a variaciones abruptas de voltaje y evitan la chispa que se produce cuando se interrumpe súbitamente un circuito con *autoinducción*, se utilizan en la realización de *filtros eléctricos* (constituye un ejemplo, los circuitos de radio para sintonizar una estación), modifican el *factor de potencia* en redes eléctricas de potencia.

### Calculo de capacitancias

Como primer ejemplo, se determina la capacitancia de una esfera de radio  $a$ , la cual contiene una carga eléctrica  $Q$  distribuida en su superficie.

Sabemos que el campo eléctrico está dado por

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(\frac{a}{r}\right)^2 \mathbf{a}_r \quad r \geq a \quad \frac{V}{m} \quad (2.2)$$

donde  $\sigma$ , la densidad superficial de carga eléctrica es  $\sigma = \frac{Q}{4\pi a^2} \left[\frac{C}{m^2}\right]$ . El potencial eléctrico a una distancia  $r$ , se encuentra a partir de

$$V_r = -\int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_{\infty}^r \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(\frac{a}{r}\right)^2 \mathbf{a}_r \cdot dr \mathbf{a}_r = \frac{\sigma a^2}{\epsilon_0 r} \quad [V] \quad (2.3)$$

Cuando  $r = a$  el potencial eléctrico (en la superficie) es

$$V_a = V_r|_{r=a} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} a = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \quad [V] \quad (2.4)$$

Sustituyendo (2.4) en (2.1), resulta

$$C = 4\pi\epsilon_0 a \quad [F] \quad (2.5)$$

Como se puede verificar, la unidad faradio es relativamente grande por lo que se suelen utilizar submúltiplos de ella, tales como el microfaradio [ $\mu F$ ], el nanofaradio [ $nF$ ] y el picofaradio [ $pF$ ].

#### Capacitor de placas planas y paralelas

Considere el par de placas conductoras paralelas eléctricamente neutras, localizadas en el espacio libre, como se presenta en la figura 2.2. Cada una de ellas con una superficie  $A$  y separadas una distancia  $d$ . Se conecta una pila entre las placas de tal forma que mantiene una diferencia de potencial  $V_{ab}$  entre ellas. Esta pila causa que haya una transferencia de carga eléctrica a las placas del capacitor, depositándose una carga  $+Q$  en una de ellas y  $-Q$  en la otra. Si se supone que la separación  $d$  entre las placas es mucho menor que el área  $A$  de las mismas, la dispersión del campo eléctrico  $\vec{E}$  es insignificante y se puede despreciar. Entonces

$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{a}_z \quad \left[\frac{V}{m}\right]$$

La diferencia de potencial  $V_{ab}$  es

$$V_{ab} = -\int_b^a \vec{E} \cdot dz \mathbf{a}_z = \int_0^d \frac{\sigma}{\epsilon_0} dz = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d = |\vec{E}|d \quad [V]$$

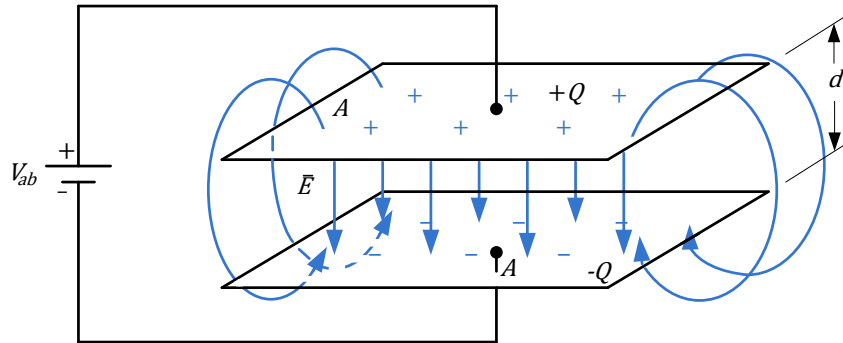


Figura 2.2. Capacitor de placas plana y paralelas.

en función de la carga

$$V_{ab} = \frac{Q}{A\epsilon_0} d \quad [V] \quad (2.6)$$

Sustituyendo la ecuación (2.6) en (2.1)

$$C = \frac{A\epsilon_0}{d} \quad [F] \quad (2.7)$$

Capacitor cilíndrico

Considere los dos conductores cilíndrico coaxiales de longitud infinita mostrados en la figura 2.3. Encuentre la capacitancia por unidad de longitud.

Sabemos que el campo eléctrico es

$$\vec{E} = \frac{\sigma a}{\epsilon_0 r} \mathbf{a}_r \quad a \leq r \leq b$$

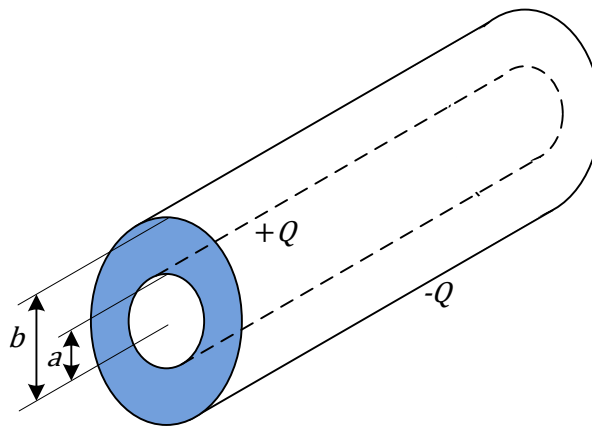


Figura 2.3. Capacitor cilíndrico o coaxial.

Por lo que la diferencia de potencial resulta ser

$$V_{ab} = - \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} a \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad [V]$$

en función de la carga eléctrica en el conductor interior en una longitud  $l$

$$V_{ab} = \frac{Q}{2\pi a l} a \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad [V]$$

y la capacitancia es entonces

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad [F] \quad (2.8)$$

Así, la capacitancia por unidad de longitud es

$$\frac{C}{l} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad [F] \quad (2.9)$$

Capacitor esférico

Determine la capacitancia de la esfera conductora rodeada por otra esfera hueca de paredes gruesas, que se muestra en la figura 2.4.

Puesto que el campo eléctrico dentro de un conductor es nulo, debe ser evidente que

$$V_c = - \int_{\infty}^c \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c} = V_b$$

El potencial de la superficie de la esfera interna, se determina a continuación

$$V_a = - \int_{\infty}^c \vec{E} \cdot d\vec{r} - \int_c^b \vec{E} \cdot d\vec{r} - \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$V_a = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^c \frac{dr}{r^2} - 0 - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_b^a \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

Por lo que

$$V_{ab} = V_a - V_b = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

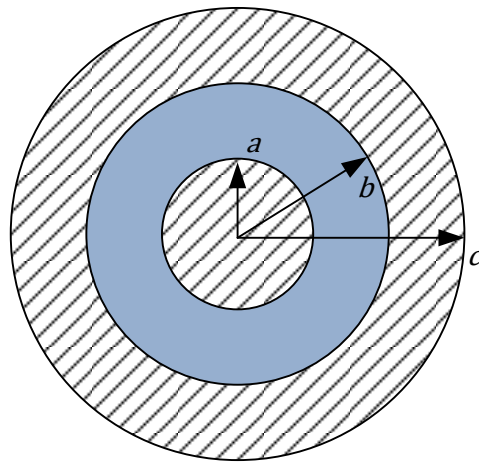


Figura 2.4. Capacitor esférico.

Finalmente, la capacitancia de la esfera es

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)} \quad [F] \quad (2.10)$$

### Densidad de energía en el campo electrostático

Cuando se realiza el proceso de agrupar cargas eléctricas, alguna energía se almacena en el campo de fuerzas resultante, ya que las cargas eléctricas deben vencer la fuerza de repulsión existente entre ellas. Y aunque no se puede establecer exactamente donde se encuentra dicha energía (lo mismo ocurre para la energía potencial gravitacional) sabemos que existe.

Para calcular la energía potencial del conjunto de cargas, se debe encontrar el trabajo que se requiere para trasladarlas desde el infinito hasta una posición final. En este desarrollo se supondrá que la región está inicialmente libre de cargas eléctricas. Traer la primera carga eléctrica  $Q_1$  desde el infinito hasta un punto  $P_1$  no requiere ningún consumo de energía, dado que se supone que no hay ninguna carga eléctrica y por lo tanto ninguna fuerza se ejerce sobre ella. Traer la segunda carga  $Q_2$  desde el infinito hasta el punto  $P_2$  en la vecindad de  $Q_1$  (que se mantiene estática en un punto) requiere un trabajo dado por

$$W_{21} = Q_2 \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{12}} = Q_2 V_{21}$$

donde  $R_{12}$  es la distancia entre las posiciones finales de  $Q_1$  y  $Q_2$  y  $V_{21}$  es el potencial de  $P_2$  debido a la presencia de  $Q_1$ . Con  $Q_1$  y  $Q_2$  fijas, el trabajo para colocar a  $Q_3$  es

$$W_{31} + W_{32} = Q_3 V_{31} + Q_3 V_{32}$$

El trabajo para colocar a  $Q_4$  es

$$W_{41} + W_{42} + W_{43} = Q_4 V_{41} + Q_4 V_{42} + Q_4 V_{43}$$

Procediendo de esta manera, el trabajo para colocar  $n$  cargas eléctricas, resulta

$$\text{Trabajo total} = \text{Energía potencial del campo} = W_E$$

$$W_E = Q_2 V_{21} + Q_3 V_{31} + Q_3 V_{32} + Q_4 V_{41} + Q_4 V_{42} + Q_4 V_{43} + \dots \quad (2.11)$$

Pero,

$$W_{ij} = Q_i \frac{Q_j}{4\pi\epsilon_0 R_{ji}} = Q_i V_{ij} = Q_j \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 R_{ij}} = Q_j V_{ji} = W_{ji}$$

esto es, el trabajo que se requiere para mover a  $Q_i$  hasta  $P_i$  en la presencia de  $Q_j$  es igual al trabajo que se necesita para mover a  $Q_j$  hasta  $P_j$  estando presente  $Q_i$ . Por consiguiente, la ecuación (2.11) se puede escribir como

$$W_E = Q_1 V_{12} + Q_1 V_{13} + Q_2 V_{23} + Q_1 V_{14} + Q_2 V_{24} + Q_3 V_{34} + \dots \quad (2.12)$$

Sumando (2.11) y (2.12)

$$2W_E = Q_1(V_{12} + V_{13} + V_{14} + \dots) + Q_2(V_{21} + V_{23} + V_{24} + \dots) + Q_3(V_{31} + V_{32} + V_{34} + \dots) + Q_4(V_{41} + V_{42} + V_{43} + \dots) + \dots$$

empero

$$V_{12} + V_{13} + V_{14} + \dots = V_1$$

representa el potencia del punto  $P_1$  (donde estaría  $Q_1$ ) debido a la presencia de  $Q_2, Q_3, Q_4, \dots$

$$\therefore W_E = \frac{1}{2}(Q_1V_1 + Q_2V_2 + Q_3V_3 + Q_4V_4 + \dots) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n Q_m V_m \quad (2.13)$$

Generalizando este resultado, la energía en una región donde existe una distribución continua de carga, cada carga se sustituye por  $\rho dv$  y la suma por la integral de volumen, por lo que

$$W_E = \frac{1}{2} \iiint \rho V dv \quad (2.14)$$

Considerando la ley de Gauss en forma puntual

$$\nabla \cdot \bar{D} = \nabla \cdot \epsilon_0 \bar{E} = \rho$$

$$W_E = \frac{1}{2} \iiint (\nabla \cdot \bar{D}) V dv$$

Recordando la identidad vectorial

$$\nabla \cdot (V\bar{D}) = V(\nabla \cdot \bar{D}) + \bar{D} \cdot (\nabla V)$$

se obtiene

$$W_E = \frac{1}{2} \iiint \nabla \cdot (V\bar{D}) dv - \frac{1}{2} \iiint \bar{D} \cdot (\nabla V) dv$$

Aplicando el teorema de la divergencia

$$\iiint \nabla \cdot \bar{A} dv_{volumen} = \oiint \bar{A} \cdot d\bar{s}_{superficie}$$

en la primera integral de la izquierda

$$W_E = \frac{1}{2} \oiint V \bar{D} \cdot d\bar{s} - \frac{1}{2} \iiint \bar{D} \cdot (\nabla V) dv \quad (2.15)$$

Si se considera que el volumen  $v$  incluye todo el espacio, la superficie  $s$  crece indefinidamente. Entonces, el potencial  $V$  declina conforme a  $1/r$ ,  $\bar{D}$  decae como  $1/r^2$  y el área de la superficie se incrementa en razón de  $r^2$ ; por lo que la primera integral de la ecuación (2.15) tiende a cero conforme  $s$  tiende a infinito. De esta manera

$$W_E = -\frac{1}{2} \iiint \bar{D} \cdot (\nabla V) dv$$

Sustituyendo

$$\bar{E} = -\nabla V$$

finalmente

$$W_E = \frac{1}{2} \iiint \bar{D} \cdot \bar{E} \, dv \quad (2.16)$$

Formas alternativas de esta ecuación son

$$W_E = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint |\bar{E}|^2 \, dv = \frac{1}{2\epsilon_0} \iiint |\bar{D}|^2 \, dv \quad (2.17)$$

El producto  $\bar{D} \cdot \bar{E}$  tiene unidades de julios por metro cubico  $[J/m^3]$ , por lo que

$$w_E = \frac{1}{2} \bar{D} \cdot \bar{E} \quad (2.18)$$

representa la densidad de energía volumétrica o la energía por unidad de volumen.

### Ejemplo 1

Encuentre la energía almacenada en el cable coaxial de longitud  $l$ .

$$\begin{aligned} W_E &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_{z=0}^l \int_{r=a}^b \int_{\phi=0}^{2\pi} |E_r| r \, dr \, d\phi \, dz \\ W_E &= \frac{Q^2 l}{8\pi^2 \epsilon_0} \int_{r=a}^b \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{1}{r} \, dr \, d\phi \\ W_E &= \frac{Q^2 l}{4\pi \epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad [J] \end{aligned} \quad (2.19)$$

La ecuación anterior se puede reescribir como

$$W_E = \frac{1}{2} \left[ \frac{2\pi l \epsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \right] \left[ \frac{Q}{2\pi \epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right]^2 = \frac{Q^2 l}{4\pi \epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Y recordando que la diferencia de potencial  $V_{ab}$  y la capacitancia  $C$  del cable coaxial de longitud  $l$ , son respectivamente

$$\begin{aligned} V_{ab} &= \frac{Q}{2\pi \epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \\ C &= \frac{2\pi l \epsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \end{aligned}$$

la ecuación (2.19), se podría reescribir como

$$W_E = \frac{1}{2} CV^2 \quad (2.20)$$

y puesto que  $C = Q/V$

$$W_E = \frac{1}{2} QV \quad (2.21)$$

$$W_E = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (2.22)$$

son expresiones que permiten determinar la energía almacenada en un capacitor.

### Conexiones de capacitores; capacitor equivalente

Existen dos configuraciones importantes de conexiones de capacitores. La primera de ellas se muestra en la figura 2.5. Cuando los capacitores están unidos de esa forma, se dice que están conectados en serie. A continuación se determina el capacitor equivalente  $C_{eq}$ , encontrando la razón de la carga eléctrica a la diferencia de potencial entre los puntos (*nodos*)  $a$  y  $b$ .

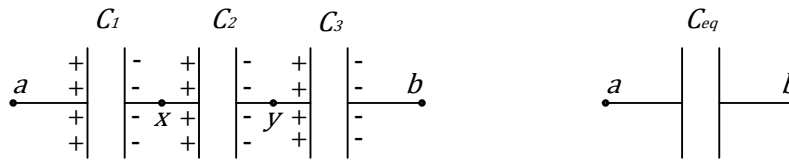


Figura 2.5. Capacitores conectados en serie.

Para cada uno de los capacitores se tiene:

$$Q_1 = C_1 V_{ax}, \quad Q_2 = C_2 V_{xy} \quad \text{y} \quad Q_3 = C_3 V_{yb}$$

además

$$V_{ab} = V_{ax} + V_{xy} + V_{yb}$$

Pero  $Q_1 = Q_2 = Q_3$ . Ya que al colocar una carga  $+Q_1$  en la lámina conductora izquierda del capacitor 1, en su lámina conductora derecha debe haber una carga  $-Q_1$ , lo que a su vez implica que debe haber una carga  $+Q_2$  en la placa conductora izquierda del capacitor 2 y por lo tanto una carga  $-Q_2$  en su placa derecha y así sucesivamente. Por consiguiente, si  $Q$  representa la carga eléctrica de cada capacitor

$$V_{ab} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} = Q \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right)$$

Y como  $Q/V_{ab}$  es por definición la capacitancia equivalente, se tiene



$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{V_{ab}}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

Generalizando, el capacitor equivalente de  $n$  capacitores conectados en serie está dado por

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k} \quad (2.23)$$

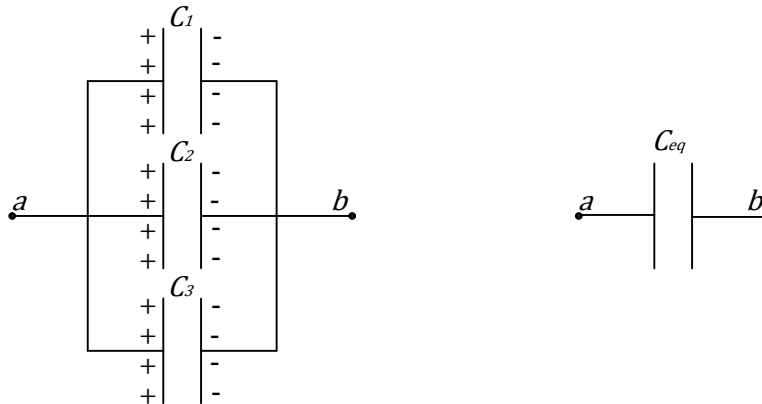


Figura 2.6. Capacitores conectados en paralelo.

Si los capacitores se conectan en paralelo, como en la figura 2.6 se muestra, la diferencia de potencial entre las placas conductoras de cada capacitor es la misma, y la carga eléctrica total es la suma de las cargas eléctricas de cada uno de ellos. Por lo tanto

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = C_1 V_{ab} + C_2 V_{ab} + C_3 V_{ab} = (C_1 + C_2 + C_3) V_{ab}$$

$$C_{eq} = \frac{Q}{V_{ab}} = C_1 + C_2 + C_3$$

Generalizando, nuevamente, el capacitor equivalente de  $n$  capacitores conectados en paralelo está dado por

$$C_{eq} = \sum_{k=1}^n C_k \quad (2.24)$$

### Dieléctricos

Hasta ahora, en el estudio de los campos electrostáticos no se ha considerado la presencia de materiales y su efecto en las relaciones electrostáticas estudiadas. A continuación se lleva a cabo una breve discusión de ellos.

Los materiales se pueden clasificar de la siguiente manera:

- a) Si las características de un material son independientes de la *posición*, el material se dice que es *homogéneo*. La atmósfera no lo es ya que su densidad, humedad, ionización y temperatura no son constantes.
- b) Cuando las características de un material no dependen de la *dirección* de los campos vectoriales, el material es *isotrópico*. Algunos cristales tienen propiedades que dependen de la dirección.
- c) Un material es *lineal* si sus parámetros no dependen de la *magnitud* de los campos. Un material ferromagnético no es lineal pues sus propiedades magnéticas dependen de la intensidad del campo que se aplica.
- d) En algunos materiales sus parámetros pueden *ser dependientes de la frecuencia*. La permitividad de los dieléctricos varía con la frecuencia.

Los materiales que son lineales, homogéneos e isotrópicos se dice que son *media simple*. Los dieléctricos que se estudian aquí son lineales, homogéneos e isotrópicos. A diferencia de los conductores, los dieléctricos tienen una pequeña cantidad de carga eléctrica libre (electrones libres) en comparación con la cantidad de carga eléctrica libre presente en los conductores. Aunque los dieléctricos son eléctricamente neutros, un campo eléctrico externo puede provocar que sus dipolos permanentes (*sustancias polares*) tiendan a rotar para alinearse en la dirección del campo eléctrico que se aplica. Ver figura 2.7. En dieléctricos que no poseen dipolos permanentes, se *inducen* dipolos creados por el desplazamiento de la nube de electrones negativa y el núcleo positivo de los átomos. Este fenómeno se denomina *polarización* de los dieléctricos.

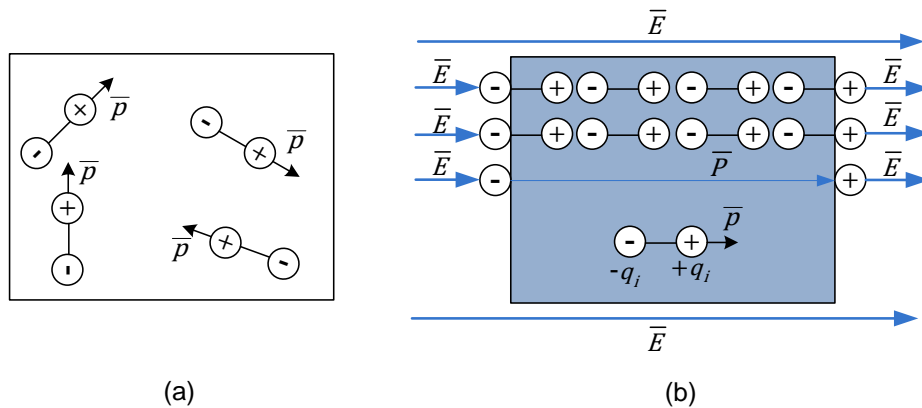


Figura 2.7. (a) Sustancia polar (*Electreto*). (b) Orientación de la *Polarización* en un dieléctrico.

El efecto final es el de un gran número de dipolos compuestos de carga  $-q_i$  y  $+q_i$ . La carga eléctrica  $q_i$  recibe el nombre de *carga inducida* y no está disponible para la conducción excepto cuando se aplican campos eléctricos muy intensos. Como sabemos cada uno de esos dipolos microscópicos tiene un momento dipolar

$$\vec{p} = q_i \vec{l}$$

El vector polarización  $\vec{P}$  se define como el momento dipolar por unidad de volumen, esto es

$$\bar{P} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\sum_i \bar{p}_i}{\Delta v} = \frac{d\bar{p}}{dv} \quad \left[ \frac{C}{m^2} \right] \quad (2.25)$$

Se debe hacer énfasis que el vector polarización  $\bar{P}$  está dirigido desde  $-q_i$  hacia  $+q_i$ , *en dirección opuesta a la del campo eléctrico y que su origen son las cargas eléctricas inducidas.*

Dado que  $\bar{P}$  tiene las mismas unidades  $[C/m^2]$  de  $\bar{D}$  se le puede tratar matemáticamente de igual forma. De la ley de Gauss, en forma integral

$$\oiint \bar{P} \cdot \bar{ds} = -q_i \quad (2.26)$$

en forma puntual o diferencial

$$\nabla \cdot \bar{P} = -\rho_i \quad (2.27)$$

El signo negativo resulta del momento dipolar que está dirigido de la carga negativa a la carga positiva del dipolo, (opuesto a la dirección de un campo eléctrico producido por estas cargas).

Ahora se encontrará una relación entre  $\bar{E}$  y  $\bar{D}$ , (semejante a  $\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E}$  para el vacío), pero más general en la que se consideren los efectos de los dieléctricos.

Generalizando la ley de Gauss y considerando que dentro del dieléctrico se tienen tanto cargas libres como cargas inducidas

$$\nabla \cdot \epsilon_0 \bar{E} = \rho_{total} = \rho_{libre} + \rho_{inducida} \quad (2.28)$$

con la ecuación (2.27)

$$\nabla \cdot \epsilon_0 \bar{E} = \rho_{libre} - \nabla \cdot \bar{P} \quad (2.29)$$

reacomodando términos

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \bar{E} + \bar{P}) = \rho_{libre} \quad (2.30)$$

Ahora se define al vector  $\epsilon_0 \bar{E} + \bar{P}$  como el vector *densidad de flujo eléctrico (o desplazamiento eléctrico)*  $\bar{D}$  *cuya fuente es solo la carga libre, esto es*

$$\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P} \quad (2.31)$$

Cuando no se tiene ningún dieléctrico,  $\bar{P} = 0$  y  $\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E}$ , como antes. Integrando la ecuación (2.30) sobre una superficie cerrada y aplicando el teorema de la divergencia

$$\oiint \bar{D} \cdot \bar{dS} = q_{libre}$$

En la literatura, se acostumbra representar a la densidad volumétrica de carga libre  $\rho_{libre}$  (la carga libre  $q_{libre}$ ) como  $\rho$  ( $q$ ), por lo que las formas integral y puntual de la ley de Gauss son

$$\oiint \bar{D} \cdot \bar{dS} = q \quad (2.32)$$

$$\nabla \cdot \bar{D} = \rho \quad (2.33)$$

Dado que las cargas inducidas y por lo tanto  $\bar{P}$  son originadas por el campo eléctrico  $\bar{E}$ , su valor depende de él y del material dieléctrico. Para dieléctricos lineales, homogéneos e isotrópicos

$$\bar{P} = \chi_e \varepsilon_0 \bar{E} \quad \left[ \frac{C}{m^2} \right] \quad (2.34)$$

donde  $\chi_e$  es la *susceptibilidad eléctrica* del material dieléctrico. Se define  $\chi_e \equiv k_e - 1 = \varepsilon_r - 1$ , donde  $k_e = \varepsilon_r$  es la *constante dieléctrica o permitividad relativa* del material, para el vacío es igual cero. Puede depender de la frecuencia, por lo que el término *constante dieléctrica* no es muy afortunado.

Sustituyendo (2.34) en (2.31)

$$\bar{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \bar{E} = \varepsilon \bar{E} \quad \left[ \frac{C}{m^2} \right] \quad (2.35)$$

donde

$$\varepsilon = (1 + \chi_e) \varepsilon_0 = k_e \varepsilon_0 = \varepsilon_r \varepsilon_0 \quad \left[ \frac{F}{m} \right] \quad (2.36)$$

esta constante  $\varepsilon$  recibe el nombre de *permitividad* del dieléctrico.

Este es el resultado que se buscaba, una relación simple entre  $\bar{E}$  y  $\bar{D}$  semejante a la del vacío. De esta manera, para materiales dieléctricos lineales, isotrópicos y homogéneos, el único cambio que se requiere para utilizar las relaciones previas es la de sustituir a  $\varepsilon_0$  por  $\varepsilon$ , una constante.

En la literatura relacionada a este tema, se denomina *susceptibilidad eléctrica* del material la razón de la densidad de carga inducida  $\sigma_i$  a la magnitud del campo eléctrico  $|\bar{E}|$  y se representa por la letra griega eta  $\eta$ , esto es

$$\eta = \frac{|\sigma_i|}{|\bar{E}|} \quad \left[ \frac{C^2}{Nm^2} \right] \quad (2.37)$$

Puesto que la polarización y la densidad de carga inducida son iguales, la susceptibilidad también se puede definir como

$$\eta = \frac{|\bar{P}|}{|\bar{E}|} \quad (2.38)$$

Al inicio del tema se señaló que los dieléctricos o aislantes tienen pocas cargas eléctricas que pueden moverse bajo la influencia de un campo eléctrico. No obstante, para cada dieléctrico se tiene una intensidad de campo eléctrico a partir de la cual pierde sus propiedades de aislante y se convierte en conductor. Dicha *intensidad de campo eléctrico* se denomina *rigidez dieléctrica*.

En la figura 2.8 se muestran dos placas conductoras paralelas. Una batería ha depositado una cierta carga eléctrica y se ha retirado, por lo que la carga eléctrica en ellas no puede modificarse. Se introduce entre ellas primero un conductor y luego un dieléctrico. Se supone que ambos materiales llenan completamente el espacio, en la figura aparecen separaciones para simplificar la

descripción que se lleva a cabo. Si el campo eléctrico entre las placas es  $E_o$  y la separación entre ellas es  $d$  la diferencia de potencia es  $V_o = E_o d$ . La carga eléctrica es entonces

$$Q_o = C_o V_o = C_o E_o d \quad (2.39)$$

Cuando se introduce entre las placas un conductor, sus cargas libres se mueven hasta que en todos los puntos dentro de él, el campo creado por estas *cargas inducidas* es igual y opuesto al campo eléctrico inicial  $E_o$  (dentro del conductor, el campo eléctrico es nulo). Cuando se introduce el dieléctrico, la carga eléctrica en las placas sigue siendo  $\pm Q_o$ , ya que la batería se ha desconectado y ninguna carga eléctrica puede fluir hacia adentro a hacia afuera de ellas. Así el campo eléctrico en el espacio de aire entre las placas y el dieléctrico es aún  $E_o$ . Sin embargo, una capa de carga eléctrica es inducida en las superficies del dieléctrico. Algunas líneas del campo eléctrico que surgen de la lámina con carga positiva terminan en las cargas negativas inducidas.

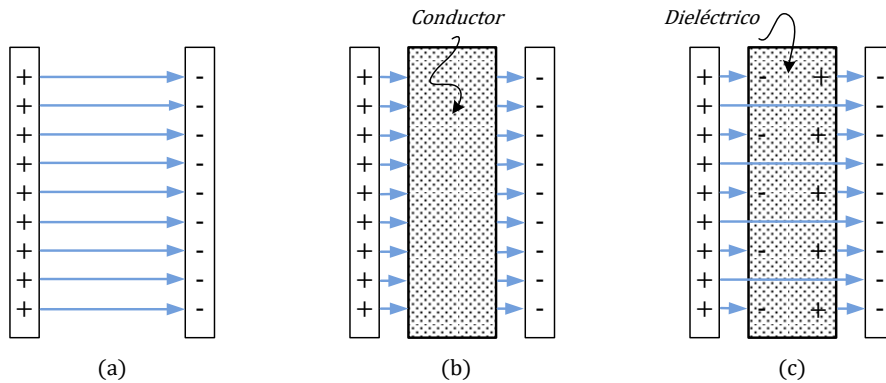


Figura 2.8. (a) Campo eléctrico entre dos láminas con carga eléctrica. (b) Campo eléctrico resultante cuando se introduce un conductor entre las láminas. (c) Campo eléctrico resultante cuando se introduce un dieléctrico las láminas.

Pero dado que hay menos cargas inducidas en el dieléctrico que cargas en la placa conductora, algunas líneas continúan a través del dieléctrico. Como se puede determinar, el campo eléctrico  $E_d$  dentro del dieléctrico es menor que el campo eléctrico  $E_o$ .

$$Q_o = C_d V_d = C_d E_d d$$

Dividiendo por la ecuación (2.39) y reacomodando términos

$$C_d = C_o \left( \frac{E_o}{E_d} \right) \quad (2.40)$$

Se puede concluir que la capacitancia se ha incrementado en proporción a la razón del campo eléctrico original al campo eléctrico dentro del dieléctrico. Al mismo tiempo, se debe acentuar que

$$k_e = \epsilon_r = \frac{C_d}{C_o} \quad (2.41)$$

constituye una alternativa para encontrar el valor de la constante dieléctrica o permitividad relativa del dieléctrico.

Ejemplo 2

Encuentre la capacitancia del capacitor que contiene dos láminas dieléctricas diferentes, mostrado en la figura 9(a). Se supone que ambos dieléctricos llenan completamente el espacio entre las láminas conductoras, en la figura aparecen separaciones para simplificar el análisis.

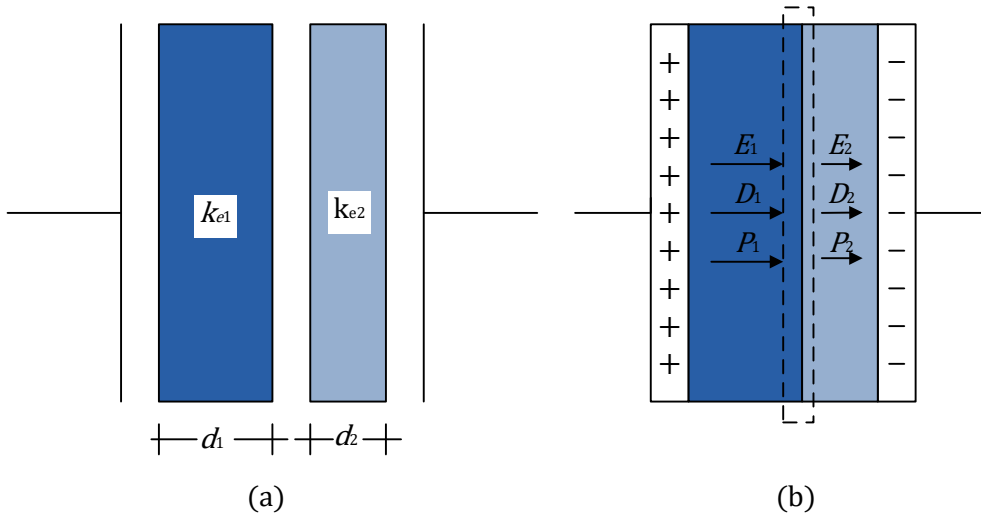


Figura 2.9. Capacitor con dos dieléctricos de constantes dieléctricas diferentes entre dos laminas conductoras con cargas eléctricas opuestas.

Primero apliquemos la ley de Gauss, ecuación (2.32), a la superficie cerrada que se indica por la línea de trazos. Puesto que la carga eléctrica libre dentro de la superficie es nula y el sentido de  $\bar{D}_1$  y  $\bar{D}_2$  es el que se indica en la figura 2.9(b),

$$\oiint \bar{D} \cdot d\bar{A} = -D_1A + D_2A = 0$$

(donde  $A$  representa el área de las láminas conductoras y dieléctricas) se tiene

$$\bar{D}_1 = \bar{D}_2$$

esto es el desplazamiento eléctrico en ambos dieléctrico es igual, por lo que de la ecuación (2.35)

$$k_{e1}\bar{E}_1 = k_{e2}\bar{E}_2$$

Por otro lado, la diferencia de potencial entre las láminas conductoras es

$$V = E_1d_1 + E_2d_2$$

y la capacitancia resulta ser

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\sigma A}{E_1 d_1 + E_2 d_2} = \frac{DA}{\frac{D}{\epsilon_1} d_1 + \frac{D}{\epsilon_2} d_2} = \frac{1}{\frac{d_1}{A\epsilon_1} + \frac{d_2}{A\epsilon_2}} \quad [F]$$

La ecuación anterior se puede expresar de la siguiente manera

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{\frac{\epsilon_1 A}{d_1}} + \frac{1}{\frac{\epsilon_2 A}{d_2}}$$

¿Qué se puede colegir de este resultado?

### Ejemplo 3

Encuentre la capacitancia del capacitor formado por dos cilindros coaxiales que se muestra en la figura 2.10. Considere que todo el campo eléctrico está contenido en el dieléctrico.

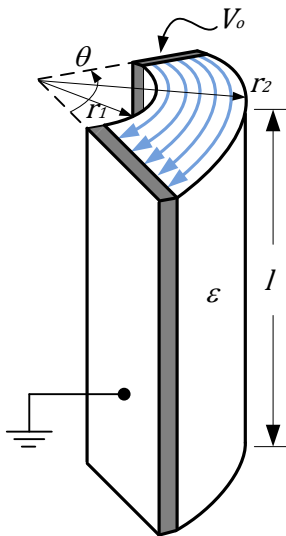


Figura 2.10. Capacitor asimétrico.

Se sabe que la capacitancia de un capacitor de placas planas y paralelas está dada por

$$C = \frac{\epsilon A}{d}$$

Luego entonces, la diferencial de la capacitancia del ejemplo es (nótese que la diferencial del área es  $ldr$  y la separación entre las láminas conductoras es  $\theta r$ )

$$dC = \frac{\epsilon l dr}{\theta r}$$

integrando

$$C = \int dC = \frac{\epsilon l}{\theta} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\epsilon l}{\theta} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \quad [F]$$

**Condiciones de frontera en la superficie límite entre dos dieléctricos**

Cuando se encuentran dos dieléctricos de forma arbitraria en una región donde está presente un campo eléctrico, las direcciones de  $\vec{E}$  y  $\vec{D}$  pueden formar un ángulo cualquiera con la superficie que los separa. En general, hay una variación discontinua de las direcciones y magnitudes de  $\vec{E}$  y  $\vec{D}$  al atravesar la superficie de separación entre ambos. Consideremos en primera instancia la intensidad del campo eléctrico, el cual se puede descomponer en una componente tangencial a la superficie de separación  $E_{tan}$  y en una componente normal a la superficie de separación  $E_{nor}$ . Para la trayectoria rectangular, que se muestra en la figura 2.11, de lados  $\Delta l$  y  $\Delta h$  y teniendo presente que para el campo electrostático conservativo se satisface

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (2.42)$$

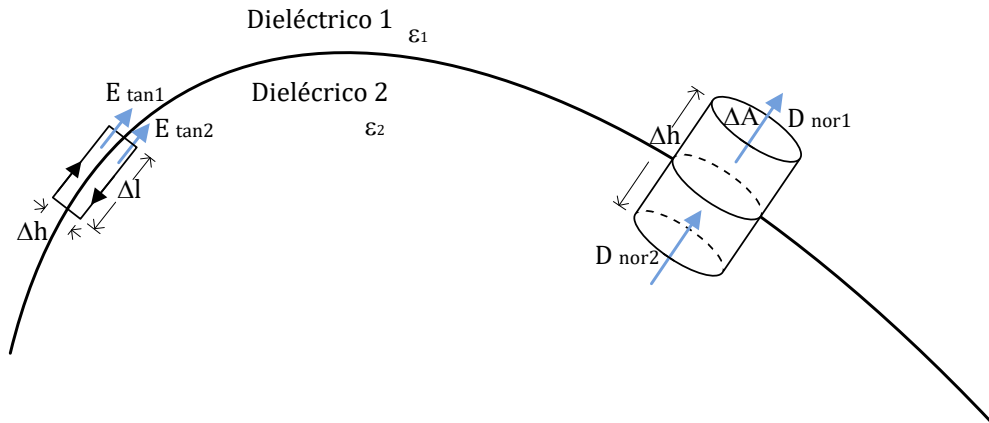


Figura 2.11. Condiciones de frontera.

La evaluación de esta integral alrededor de la trayectoria rectangular, cuando  $\Delta h \rightarrow 0$ , produce

$$E_{tan1} \Delta l - E_{tan2} \Delta l = 0$$

como  $\Delta l \neq 0$ , se concluye que

$$E_{tan1} = E_{tan2} \quad (2.43)$$

Por consiguiente, se deduce que: *la componente tangencial del campo eléctrico es continua a través de la superficie límite entre dos dieléctricos.*

Procediendo de manera semejante, para la densidad de flujo eléctrico  $\vec{D}$ . El cual también se puede descomponer en una componente tangencial a la superficie de separación  $D_{tan}$  y en una



componente normal a la superficie de separación  $D_{nor}$ . Para el cilindro de bases  $\Delta A$  y altura  $\Delta h$  que se muestra en la figura 2.11 y recordando que

$$\oiint \bar{D} \cdot \bar{dS} = q_{libre} \quad (2.32)$$

La evaluación de esta integral alrededor de la superficie cilíndrica, cuando  $\Delta h \rightarrow 0$ , produce

$$-D_{nor1}\Delta A + D_{nor2}\Delta A = 0$$

como  $\Delta A \neq 0$ , se concluye que

$$D_{nor1} = D_{nor2} \quad (2.43)$$

Por consiguiente, se deduce que: *la componente normal del desplazamiento eléctrico es continua a través de la superficie límite entre dos dieléctricos.*