

# **Notas de Electricidad y Magnetismo**

**Víctor Manuel Sánchez Esquivel**



*Considerate la vostra semenza  
fatti non foste a viver come bruti  
ma per seguir virtute e canoscenza.*  
Dante Alighieri. Infierno, XXVI

Estas notas congregan la experiencia de varios semestres en los que he impartido la asignatura de *Electricidad y Magnetismo* en la División de Ciencias Básicas de la Facultad de Ingeniería de la UNAM. Su contenido es esencialmente, el que he compartido con mis estudiantes durante la extraordinaria experiencia de aprender y comprender junto con ellos los modelos matemáticos que aproximan el comportamiento de la Naturaleza y admirado verla con otros ojos.

La motivación para escribirlas es la de contar con un material didáctico que sea meridiano y sencillo sin perder de vista la formalidad matemática y que facilite la impartición de la asignatura. Es necesario resaltar, no obstante, que para cosechar los objetivos que se desean es indefectible tener el conocimiento de algunos antecedentes académicos que por otra parte se enseñan, y de manera excelente, en la misma División. Y por supuesto, la constancia, trabajo y disciplina que se requiere para atreverse, probar, cambiar paradigmas y no sólo intentar sino actuar y hacerlo bien desde el principio, este es habito de la excelencia en toda actividad humana.

En otro orden de ideas, aunque he revisado estas notas en forma exhaustiva, soy el único responsable de todos los errores que se pudieran encontrar y también los aciertos, si es que los hay en ellas. Agradezco de antemano y me pongo a su disposición para cualquier aclaración, comentario y sugerencia en la dirección electrónica

[victor@dctrl.fi-b.unam.mx](mailto:victor@dctrl.fi-b.unam.mx)

Finalmente, confío en que todo aquel que tenga acceso a este trabajo disfrute y se emocione con los temas que aquí se estudian, de la misma forma que me ha sucedido a mí. También espero que estas notas sirvan como motivación para que el estudiante profundice sobre los temas que aquí se presentan y tenga éxito en las asignaturas, de su currículo, relacionadas con ellos durante su estancia en esta gran Universidad.

Víctor Manuel Sánchez Esquivel



A partir de sus observaciones, él elucidó lo siguiente:

La presencia de cargas eléctricas se manifiesta por la existencia de fuerzas de atracción o de repulsión entre ellas.

Hay dos clases de carga eléctrica. La fuerza entre cargas eléctricas del mismo signo es repulsiva y actúa a lo largo de la línea que las une. La fuerza entre cargas eléctricas de signo diferente es de atracción.

La fuerza entre un par dado de cargas eléctricas es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.

La fuerza entre dos cargas eléctricas es proporcional a la magnitud de una carga eléctrica multiplicada por la magnitud de la otra carga eléctrica.

La fuerza entre dos cargas eléctricas cualesquiera es independiente de la presencia de otras cargas eléctricas.

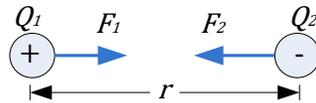


Figura 1.2. Cargas puntuales con carga eléctrica diferente se atraen con la misma fuerza.

Por otra parte, debe ser claro que una carga puntual  $Q$ , es solo un concepto, se considera que es una finita y que ocupa un punto en el espacio. Se introduce únicamente por conveniencia matemática, sus unidades son culombios [C].

Charles Augustin de Coulomb formuló la ley matemática mediante la cual se determina la fuerza de repulsión entre cargas eléctricas iguales o la fuerza de atracción entre cargas eléctricas diferentes. En la figura 1.2, se presenta un modelo para entender lo anterior. En ella dos esferas pequeñas, separados sus centros una distancia  $r$  contienen carga  $+Q_1$  y  $-Q_2$ . La fuerza que experimenta cada esfera está dada por:

$$\bar{F}_1 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{21}^2} a_{r_{21}} = k \frac{Q_1 Q_2}{r_{21}^2} a_{r_{21}} \quad (1.1)$$

$$\bar{F}_2 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}^2} a_{r_{12}} = k \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2} a_{r_{12}} \quad (1.2)$$

Donde  $|\bar{F}|$  está en newtones,  $r$  en metros,  $Q$  en culombios y  $k = 8.9874 \times 10^9$  [Nm<sup>2</sup>/C<sup>2</sup>]. En la realización de cálculos numéricos se considera  $k = 9 \times 10^9$ . La constante de proporcionalidad  $\epsilon_0$  se denomina *permitividad del vacío o del espacio libre* y su magnitud en [C<sup>2</sup>/Nm<sup>2</sup>] o en faradios/metro [F/m] es

$$\epsilon_0 = 8.8541878176 \dots \times 10^{-12} \left[ \frac{F}{m} \right]$$

El valor de esta constante física se puede determinar a partir de la siguiente expresión

$$\epsilon_0 = \frac{1}{c^2 \mu_0}$$

donde  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \left[ \frac{\text{henries}}{m} \right]$  es otra constante física que recibe el nombre de *permeabilidad magnética del vacío* y  $c = 299792458 \left[ \frac{m}{s} \right]$  representa *la velocidad de la luz en el vacío*.

Se debe advertir que la ley de coulomb es una relación lineal, con respecto a la carga, esto es, satisface las propiedades de linealidad, a saber: *homogeneidad* y *aditividad*. De esta forma, la superposición de fuerzas que experimenta la carga eléctrica  $q$  debido a las cargas  $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$  está dada por

$$F_{Q_1+Q_2+\dots+Q_N} = \frac{qQ_1}{4\pi\epsilon_0 R_1^2} a_{R_1} + \frac{qQ_2}{4\pi\epsilon_0 R_2^2} a_{R_2} + \dots + \frac{qQ_N}{4\pi\epsilon_0 R_N^2} a_{R_N} = \sum_{i=1}^N \frac{qQ_i}{4\pi\epsilon_0 R_i^2} a_{R_i} \quad (1.3)$$

donde  $R_i$  es la distancia entre  $q$  y  $Q_i$ , y  $a_{R_i}$  es el vector unitario que se dirige desde  $Q_i$  a  $q$ .

El resultado anterior se puede generalizar para determinar la fuerza que experimenta una carga puntual  $q$  debido a una distribución continua de carga. Esta distribución de carga puede ser lineal  $\lambda$  medida en  $[C/m]$ , superficial o de superficie  $\sigma$  medida en  $[C/m^2]$  o volumétrica  $\rho$  medida en  $[C/m^3]$ , y para cada caso, la sumatoria se sustituye por una integral.

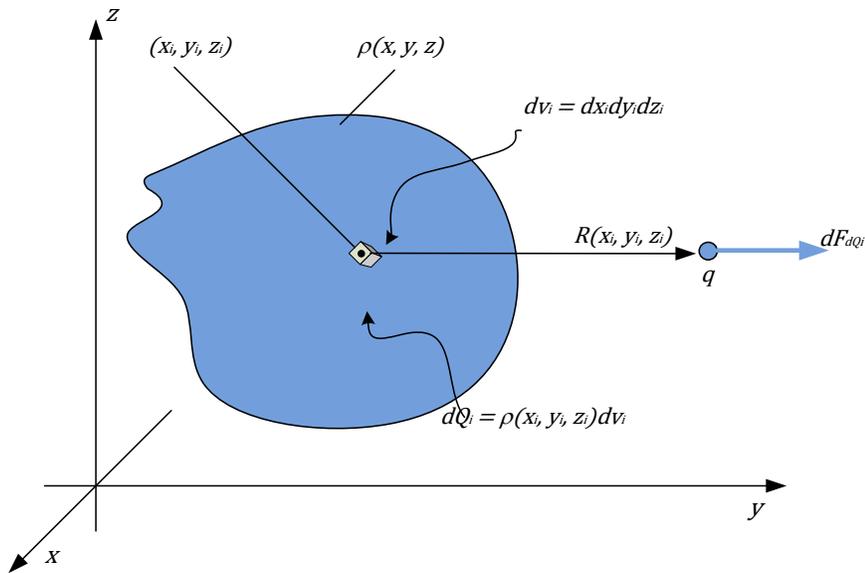


Figura 1.3. Ley de Coulomb para una distribución continua de carga.

Para visualizar esto último, considere la distribución volumétrica de carga  $\rho(x, y, z)$ , que se muestra en la figura 1.3.

Si se divide la distribución volumétrica de carga en pequeños bloques de carga  $\Delta Q$ , se puede sumar (vectorialmente) las contribuciones, a la fuerza total ejercida sobre  $q$ , debidas a cada uno de los bloques de carga que comprenden la distribución volumétrica de carga al considerar a cada bloque como una carga puntual.

Con la finalidad de minimizar nuestros resultados, dado que la pequeña cantidad de carga  $\Delta Q$  en el pequeño volumen  $\Delta v$  es  $\Delta Q = \rho \Delta v$ , en el límite cuando  $\Delta v \rightarrow 0$  se tiene

$$\rho = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta v}$$

En el punto  $(x_i, y_i, z_i)$  dentro de la distribución de carga, el diferencial de volumen es  $dv_i = dx_i dy_i dz_i$ . Por lo que la carga contenida en el diferencial de volumen es  $dQ = \rho(x_i, y_i, z_i) dv_i$ . Así, la fuerza neta que el volumen de distribución de carga ejerce sobre  $q$  es la suma vectorial de las contribuciones de todos los diferenciales de carga que constituyen la distribución de la carga, esto es

$$\bar{F} = \int d\bar{F} = \int \frac{q dQ}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_R = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho dv}{R^2} \mathbf{a}_R \quad (1.4)$$

La forma más general de una distribución de carga es la densidad volumétrica de carga  $\rho$ , que como ya se mencionó se mide en  $[C/m^3]$ . La carga total en algún volumen finito, se obtiene integrando en todo ese volumen, esto es

$$Q = \int dQ = \iiint \rho dv \quad (1.5)$$

Las otras distribuciones de carga, lineal y superficial,  $\lambda$  y  $\sigma$  respectivamente, se consideran casos particulares de la distribución volumétrica de carga.

La densidad de carga lineal  $\lambda$  es un filamento con carga eléctrica que tiene longitud (la cual puede ser matemáticamente infinita) pero no tiene espesor. La diferencial de carga en un elemento diferencial de longitud es  $dQ = \lambda dl$ , y la carga total en un filamento dado es

$$Q = \int dQ = \int \lambda dl \quad (1.6)$$

De igual manera, la densidad superficial de carga  $\sigma$  consiste de una lámina con un área (la cual puede ser matemáticamente infinita) pero sin espesor. La diferencial de carga en un elemento diferencial de superficie es  $dQ = \sigma ds$ , y la carga total en una lámina es

$$Q = \int dQ = \iint \sigma ds \quad (1.7)$$

Ejemplo 1

Determine la fuerza de origen eléctrico que causa la distribución lineal de carga  $\lambda$ , sobre la carga  $q$

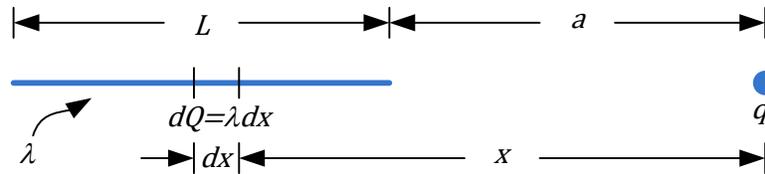


Figura 1.4. Fuerza eléctrica que ejerce una distribución lineal de carga sobre una carga puntual.

Como la fuerza está dirigida a lo largo de la recta que une la distribución lineal y la carga puntual, sólo nos ocuparemos de determinar la magnitud de fuerza. La diferencial de fuerza  $dF$  que ejerce la diferencial de carga  $dQ$  sobre la carga puntual  $q$ , es, aplicando la ley de Coulomb

$$dF = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{x^2}$$

donde, si se considera que la distribución lineal de carga  $\lambda = \frac{Q}{L}$  está uniformemente distribuida, entonces en la diferencial de longitud  $dx$ , la diferencial de carga es  $dQ = \lambda dx$ . Por consiguiente,

$$dF = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{x^2}$$

integrando

$$F = \frac{q\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_a^{a+L} \frac{dx}{x^2} = \frac{q\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{-1}{x} \right]_a^{a+L} = \frac{q\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{L}{a(a+L)} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 a(a+L)} \quad [N]$$

**Campo eléctrico  $\vec{E}$**

El vector intensidad de campo eléctrico  $\vec{E}$  en un punto dado del espacio puede definirse como la fuerza por unidad de carga que actuaría sobre una carga dada colocada en dicho punto. Para determinar la intensidad del campo eléctrico, se introduce una pequeña carga de prueba (*positiva*)  $q$ , se divide la fuerza resultante que experimenta  $q$  entre la magnitud de  $q$ . Así, el campo eléctrico es el valor límite a que tiende la fuerza por unidad de carga cuando la carga de prueba se hace infinitamente pequeña, esto es

$$\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q} \quad (1.8)$$

Se introduce la operación de tomar el límite para que la carga de prueba no distorsione la distribución de carga original. Dicho de otra manera, la carga de prueba es una carga imaginaria con una cualidad muy especial: *no ejerce ninguna fuerza sobre otras cargas de su vecindad y por consiguiente no las perturba.*

Así, la intensidad de campo eléctrico correspondiente a una carga puntual  $Q$  resulta

$$\bar{E} = \frac{\bar{F}}{q} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_R \quad (1.9)$$

donde  $\mathbf{a}_R$  está dirigido radialmente alejándose de  $Q$ . Si  $Q$  es negativa, el campo eléctrico estará dirigido hacia la carga. La intensidad de campo eléctrico debido a una distribución de carga se obtiene de manera similar al dividir la ecuación (1.4) por  $q$ .

$$\bar{E} = \frac{\bar{F}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho dv}{R^2} \mathbf{a}_R \quad (1.10)$$

Para las distribuciones lineal y superficial, la relación anterior también es válida.

Las unidades del campo eléctrico son newton por coulombio  $[N/C]$ . Más adelante se definen las unidades de voltaje como volt  $[V]$ , el cual tiene las unidades de newton-metro por coulombio por lo que las unidades del campo eléctrico también estarán dadas como  $[(Nm/C)/m] = [V/m]$ .

### El campo eléctrico de un dipolo

Un par de cargas puntuales de la misma magnitud pero de signos contrarios constituye un dipolo eléctrico. Consideremos el par de cargas puntuales  $+Q$  y  $-Q$  separadas una distancia  $l$  como se muestra en la figura 1. 5.

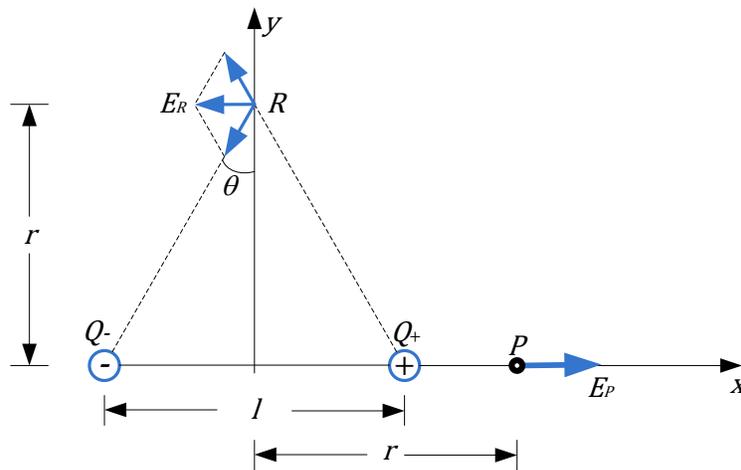


Figura 1.5. El dipolo eléctrico.

Aplicando la propiedad de linealidad, el campo en el punto  $P$  situado a una distancia  $r$  del centro del dipolo, se tiene

$$E_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2} - \frac{Q}{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2rl}{\left(r^2 - \frac{l^2}{4}\right)^2} \quad (1.11)$$

De la misma manera, el campo eléctrico en el punto  $R$ , es

$$E_R = 2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)^2} \text{sen}\theta = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{l}{\sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4}}^3} \quad (1.12)$$

Se define el vector momento dipolar  $\vec{p}$  al producto  $\vec{p} = Q\vec{l}$  donde  $\vec{l}$  es el vector dirigido desde  $-Q$  a  $+Q$ . La razón de emplear el término momento dipolar es que cuando se encuentra en una región donde hay un campo eléctrico uniforme  $\vec{E}$ , el dipolo tiende a girar hasta alinear el vector  $\vec{p} = Q\vec{l}$  con la dirección del campo eléctrico aplicado, como se muestra en la figura 1.6.

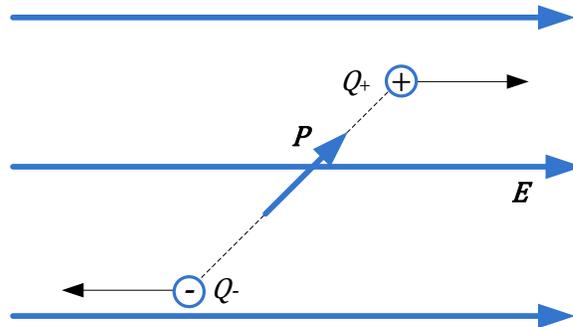


Figura 1.6. Par que experimenta el dipolo eléctrico debido a un campo eléctrico.

### Campo eléctrico de una distribución lineal de carga

Consideremos ahora el problema de obtener el campo eléctrico debido a una distribución lineal de carga uniforme de longitud infinita. Véase la figura 1.7.

Primero se debe observar que debido a la longitud infinita y a la uniformidad de la distribución de la carga, el campo eléctrico tendrá únicamente dirección radial (perpendicular a la distribución de la carga), como se demuestra a continuación

$$d\vec{E} = \frac{\lambda dL}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_R$$

La componente del campo eléctrico en la dirección radial es

$$dE_r = \frac{\lambda dL}{4\pi\epsilon_0 R^2} \text{sen } \theta = \frac{\lambda dL}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{r}{R} = \frac{\lambda r dL}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(r^2 + L^2)^3}}$$

Recordando que  $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}$

$$E_r = \int_{-L}^L \frac{\lambda r dL}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(r^2+L^2)^3}} = \frac{\lambda r}{4\pi\epsilon_0 r \sqrt{r^2+L^2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \left[ \frac{N}{C} \right] \quad (1.13)$$

Otra forma de calcular el campo eléctrico:

Dado que  $L = r \cot \theta$  entonces  $dL = -r \csc^2 \theta d\theta$ . Y ya que  $R = r \csc \theta$ , se tiene:

$$dE_r = \frac{\lambda dL}{4\pi\epsilon_0 R^2} \text{sen } \theta = -\frac{\lambda \text{sen } \theta d\theta}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$E_r = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{180^\circ}^0 \text{sen } \theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \cos \theta \Big|_{180^\circ}^0 = \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \left[ \frac{N}{C} \right]$$

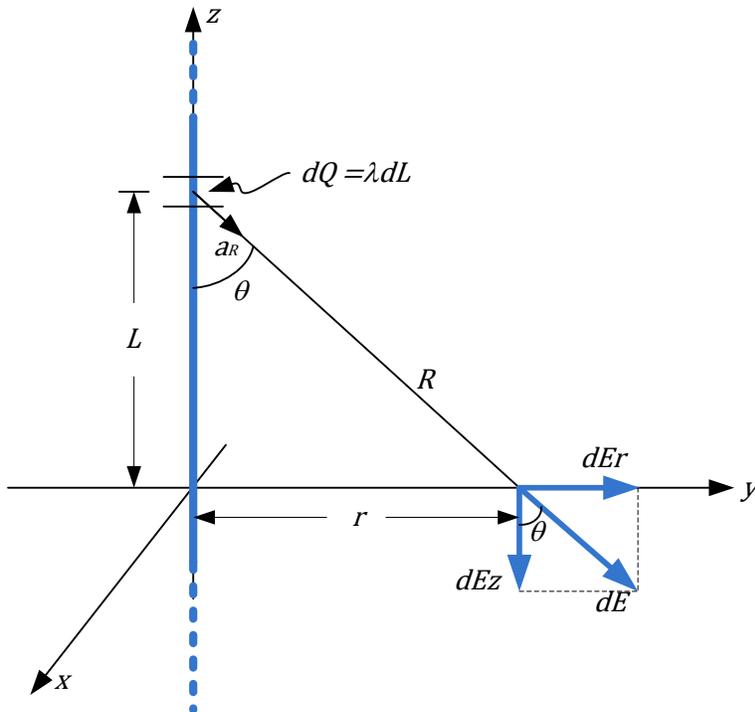


Figura 1.7. Cálculo del campo eléctrico de una distribución lineal de carga uniforme (infinita).

Ejemplo 2

Encuentre la magnitud y dirección de  $\vec{E}$  en el punto (4, 3, -2) en el espacio libre, si se tiene una distribución lineal de carga uniforme de  $5 \times 10^{-9}$  [C/m]. A lo largo de: a) el eje z; b) La recta  $x = 8$  y  $y = 6$ .

Solución:

- a)  $\vec{E} = 14.4\mathbf{a}_x + 10.8\mathbf{a}_y = 18(0.8\mathbf{a}_x + 0.6\mathbf{a}_y)$  [N/C]
- b)  $\vec{E} = -14.4\mathbf{a}_x - 10.8\mathbf{a}_y = 18(-0.8\mathbf{a}_x - 0.6\mathbf{a}_y)$  [N/C]

**Campo eléctrico de una distribución de carga en un plano**

A continuación se determina el campo eléctrico debido a otra configuración básica de carga, la distribución superficial de carga  $\sigma$ . Supóngase que la carga se encuentra en el plano yz, como se observa en la figura 1.8.

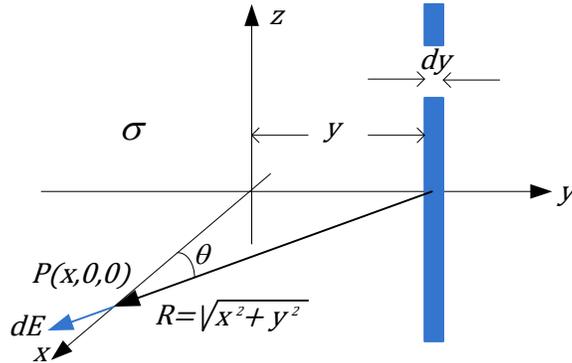


Figura 1.8. Cálculo del campo eléctrico de una distribución superficial de carga uniforme (infinita).

Si la superficie infinita se divide en franjas diferenciales infinitas, se puede emplear el resultado que se obtuvo antes. Así, considere la franja que se muestra en la figura 1.8. La carga por unidad de longitud es  $\lambda = \sigma dy$ , y la distancia al punto P sobre el eje x es  $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Debido a la simetría, la franja contribuye a un diferencial de campo eléctrico dado por

$$dE_x = \frac{\sigma dy}{2\pi\epsilon_0\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \theta = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \frac{xdy}{x^2 + y^2}$$

Considerando las contribuciones de todas las franjas y teniendo presente que  $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctg\left(\frac{x}{a}\right)$ , se tiene

$$E_x = \frac{\sigma x}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{x^2+y^2} = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \tan^{-1} \left( \frac{y}{x} \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (1.14)$$

## Líneas de fuerza

Michael Faraday (1791-1867), fue uno de los diez hijos de un herrero de Londres, aprendiz de encuadernación en su adolescencia. A pesar de tener poca educación básica, gracias a la generosidad de un maestro (George Riebau) tuvo contacto con la letra impresa lo que a su vez le permitió cambiar su destino. Él fue el primero en introducir la representación visual del campo de fuerza eléctrica. Su esquema, en el que usó lo que llamó líneas de fuerza, es una alternativa para representar campos eléctricos (o magnéticos).



Figura 1.9. Representación de un campo eléctrico con ayuda de líneas de fuerza.

Una línea de fuerza es una línea imaginaria dibujada de tal forma que su dirección (la de su tangente) en todo punto es la dirección de campo eléctrico en dicho punto. Para encontrar la dirección del campo eléctrico, en la práctica, simplemente se coloca una carga de prueba positiva en el punto  $P$  de la figura 1.9. Dicha carga, experimentará una fuerza de repulsión (atracción) ejercida por la carga positiva (negativa) a lo largo de la línea radial mostrada. Esto es, la dirección del campo eléctrico en un punto dado, será la dirección de la fuerza que se ejerce sobre la carga de prueba.

Las líneas de fuerza tienen las siguientes características:

- Se originan y emergen de cargas positivas y finalizan y convergen en cargas negativas.
- El número de líneas de fuerza que se originan o terminan, en una carga, es proporcional al valor de dicha carga.
- La dirección de la tangente de las líneas en todo punto es la dirección del campo eléctrico en dicho punto.
- La densidad de líneas en una región dada es una medida de la intensidad del campo eléctrico en esa región. (Por densidad de líneas se debe entender el número de líneas de fuerza por unidad de superficie.)

## Ley de Gauss

Alrededor de 1837, Michael Faraday, siendo ya director de la Real Sociedad de Londres, realizó el siguiente experimento: dispuso un par de esferas metálicas concéntricas, la esfera exterior consistía de dos hemisferios que se podían sujetar. A la esfera interior le suministró una carga eléctrica *positiva*. A continuación los hemisferios de la esfera exterior se sujetaron firmemente alrededor de la esfera interior, habiendo puesto entre ellas un material aislante (dieléctrico). Después conectó momentáneamente la esfera exterior a la tierra. Separó la esfera exterior cuidadosamente, con equipo adecuado, para no perturbar la carga eléctrica *negativa* inducida en cada hemisferio. Y Faraday encontró que la carga total en la esfera exterior *siempre* era igual en magnitud que la carga original en la esfera interior independientemente del aislante colocado entre las esferas.

Faraday dedujo que había una especie de *flujo* de la esfera interior hacia la esfera exterior, independiente del material aislante entre ellas. Este flujo recibe el nombre de *flujo de desplazamiento* o simplemente *flujo eléctrico*. Si el flujo eléctrico se denota por  $\varphi_D$  y la carga total en la esfera interior por  $Q$ , entonces

$$\varphi_D = Q$$

de esta relación, es claro que las unidades del flujo eléctrico son culombios.

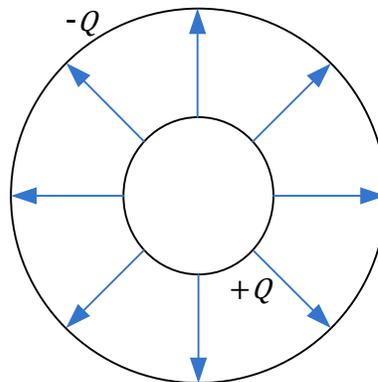


Figura 1.10. El flujo eléctrico  $\varphi_D$  entre dos esferas concéntricas.

En la figura 1.10 se presenta la situación anterior. En ella se puede apreciar las trayectorias del flujo eléctrico  $\varphi_D$  que se *extienden* desde la esfera interior de radio  $a$  a la esfera exterior de radio  $b$ . En la superficie de la esfera interior la carga eléctrica  $Q$  procrea un flujo eléctrico  $\varphi_D$  [C], distribuidos uniformemente sobre la superficie de  $4\pi a^2$  [m<sup>2</sup>]. La relación  $\frac{Q}{4\pi a^2}$   $\left[\frac{C}{m^2}\right]$  o  $\frac{\varphi_D}{4\pi a^2}$   $\left[\frac{\text{líneas}}{m^2}\right]$  se define como la *densidad de flujo eléctrico* o *desplazamiento eléctrico*, se representa con la letra  $D$ . Es decir

$$D|_a = \frac{Q}{4\pi a^2} \quad \left[ \frac{C}{m^2} \right]$$

Asimismo, en el interior de la esfera de radio  $b$

$$D|_b = \frac{Q}{4\pi b^2} \quad \left[ \frac{C}{m^2} \right]$$

Luego entonces, la densidad de flujo eléctrico en el espacio comprendido entre las esferas es

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2} \left[ \frac{C}{m^2} \right] \quad \text{para} \quad a \leq r \leq b$$

Si ahora se reduce el radio  $a$  de la esfera interior, en el límite esta esfera se podría considerar una carga puntual. Y dado que el campo eléctrico de una carga puntual  $Q$ , está dado por

$$\bar{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r \quad \left[ \frac{N}{C} \right]$$

es posible relacionar la densidad de flujo eléctrico con el campo eléctrico, esto es

$$\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} \quad (1.15)$$

por lo que, para una distancia  $r$ , se tiene

$$\bar{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r \quad a \leq r \leq b$$

Se debe hacer énfasis en que la relación (1.15) es válida únicamente para el vacío o el espacio libre.

Otros nombres alternativos para la densidad de flujo eléctrico son el de *la densidad de flujo de desplazamiento* o *la densidad de desplazamiento* o simplemente *desplazamiento*.

El experimento realizado por Faraday se puede aplicar a una situación más general, por lo que se puede afirmar:

*El flujo eléctrico que pasa a través de cualquier superficie cerrada es igual a la carga total encerrada por esa superficie.* Este enunciado recibe el nombre de *Ley de Gauss*.

La Ley de Gauss nos proporciona el número neto de líneas de fuerza que emergen a través de una superficie cerrada. Véase la figura 1.11. Su forma matemática es:

$$\varphi_D = \oint \bar{D} \cdot \bar{dA} = \oint \epsilon_0 \bar{E} \cdot \bar{dA} = Q \quad (1.16)$$

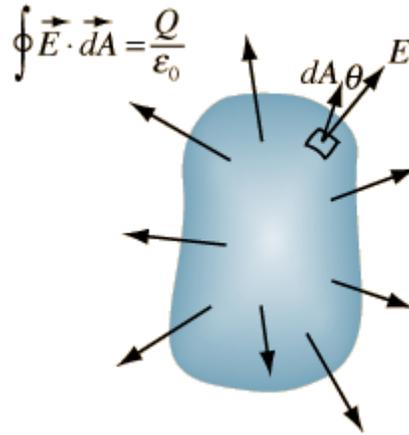


Figura 1.11. Obtención del flujo eléctrico causado por una carga eléctrica arbitraria a través de una superficie cerrada.

Una forma alternativa de la expresión anterior es:

$$\varphi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \left[ \frac{Nm^2}{C} \right] \quad (1.17)$$

Para evitar la ambigüedad de las ecuaciones anteriores, nos referiremos a  $\varphi_D$  como *flujo eléctrico del desplazamiento eléctrico* y a  $\varphi_E$  como *flujo eléctrico del campo eléctrico*.

### Aplicaciones de la ley de Gauss

Sean dos esferas concéntricas, la interior de radio  $a$  con carga  $+Q$  y la exterior de radio  $b$  con carga  $-Q$ , las cuales se muestran en la figura 1.12. Determine el campo eléctrico debido a la distribución superficial  $\sigma = \frac{Q}{4\pi a^2} \left[ \frac{C}{m^2} \right]$ .

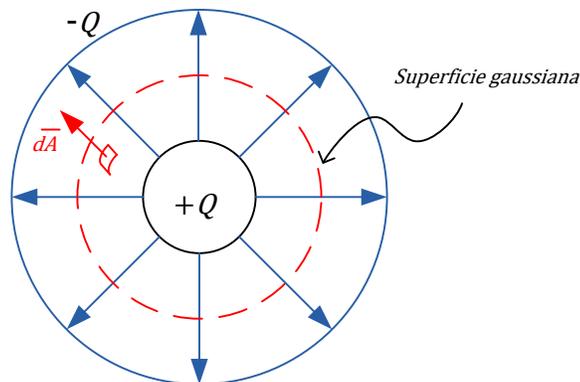


Figura 1.12. Dos esferas con cargas de la misma magnitud y de signo diferente.

Como sabemos la densidad del flujo de desplazamiento es

$$\bar{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r$$

entonces

$$\varphi_D = \oint \bar{D} \cdot d\bar{A} = \oint \varepsilon_0 \bar{E} \cdot d\bar{A} = \oint \varepsilon_0 E dA = \varepsilon_0 E \oint dA = \sigma 4\pi a^2$$

por lo que

$$E = \frac{\sigma 4\pi a^2}{\varepsilon_0 \oint dA} = \frac{\sigma 4\pi a^2}{\varepsilon_0 4\pi r^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \left(\frac{a}{r}\right)^2$$

finalmente

$$\bar{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \left(\frac{a}{r}\right)^2 \mathbf{a}_r \quad \left[\frac{N}{C}\right] \quad a \leq r \leq b \quad (1.18)$$

Para

$$r < a, r > b \quad \bar{E} = 0$$

¿Por qué? Explique.

Ejemplo 3

Una carga de  $1 [\mu C]$ , se localiza en el origen, en el vacío. Encuentre: a)  $\bar{D}$  en  $P(1, -2, 3) [cm]$ ; b) El flujo eléctrico total  $\varphi_D$  a través del primer octante.

- a)  $\bar{D} = 15.1914 \times 10^{-6} (1\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z) [N/C]$
- b)  $\varphi_D = 125 \times 10^{-9} [C]$

A continuación, determinemos la intensidad del campo eléctrico debido a una distribución uniforme de carga localizada sobre la superficie exterior de un cilindro de radio  $a$  y de longitud infinita. Véase la figura 1.13.

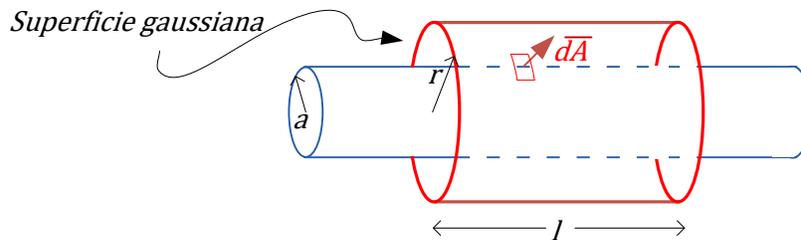


Figura 1.13. Conductor cilíndrico con una distribución superficial de carga.

La superficie gaussiana que se selecciona para esta situación es necesariamente otro cilindro de radio  $r$  y de longitud  $l$ , como se muestra en la misma figura.

Sin perder generalidad, el radio  $a$  del cilindro se puede reducir de tal manera que la distribución superficial de carga  $\sigma$  se puede aproximar o considerar una distribución lineal de carga  $\lambda$  y utilizar los resultados ya obtenidos.

Como el campo eléctrico debe ser radial, al aplicar la ley de Gauss, se tiene

$$\begin{aligned}\varphi_D &= \oint \bar{D} \cdot \bar{dA} = \int \varepsilon_o \bar{E} \cdot \bar{dA}_{tapa} + \int \varepsilon_o \bar{E} \cdot \bar{dA}_{lateral} + \int \varepsilon_o \bar{E} \cdot \bar{dA}_{tapa} \\ \varphi_D &= \int \varepsilon_o \bar{E} \cdot \bar{dA}_{lateral} = \int \varepsilon_o E dA = \varepsilon_o E \int dA = \sigma 2\pi a l \\ \bar{E} &= \frac{\sigma}{\varepsilon_o} \left(\frac{a}{r}\right) \mathbf{a}_r \quad \left[\frac{N}{C}\right] \quad a \leq r\end{aligned}\tag{1.19}$$

y

$$\bar{E} = 0 \quad r < a,$$

¿Por qué? Explique.

De las expresiones (1.14), (1.18) y (1.19), se observa que el campo eléctrico es proporcional a la densidad superficial de carga eléctrica y por consiguiente su intensidad es máxima en las regiones con un radio de curvatura mínimo y viceversa o sea una intensidad menor en donde el radio de curvatura es mayor.

La expresión que se proporciona en la ecuación (1.16) o en la ecuación (1.17) se conoce como ley de Gauss en forma integral. Ahora se verá esta ley desde otro punto de vista.

Recordando el teorema de la divergencia, (Teorema de Ostrogradski-Gauss)

$$\oiint \bar{A} \cdot \bar{dS}_{superficie} = \iiint \nabla \cdot \bar{A} dv_{volumen}\tag{1.20}$$

Que nos dice: El flujo escalar de un campo  $\bar{A}$  a través de una superficie cerrada es igual a la integral de la divergencia de  $\bar{A}$ , extendida al volumen delimitado por dicha superficie.

De la ecuaciones (1.5), (1.16) y (1.20)

$$\varphi_D = \oiint \bar{D} \cdot \bar{dA} = \oiint \varepsilon_o \bar{E} \cdot \bar{dA} = Q = \iiint \rho dv = \iiint \nabla \cdot \bar{D} dv$$

se tiene

$$\nabla \cdot \bar{D} = \varepsilon_o \nabla \cdot \bar{E} = \rho\tag{1.21}$$

Esta relación se conoce como Ley de Gauss en forma diferencial. Muestra que la divergencia (o emanación) de las líneas de flujo eléctrico es proporcional a la magnitud y polaridad de una carga.

### Energía y potencial

Consideremos que se desea mover una carga eléctrica puntual  $Q$ , una distancia  $\Delta l$  en una región en la que existe un campo eléctrico arbitrario  $\vec{E}$ . Como sabemos, la carga eléctrica experimenta una fuerza de origen eléctrico dada por

$$\vec{F} = Q\vec{E}$$

esta fuerza es la que debe superar o vencer una fuerza externa para mover a  $Q$ . Por consiguiente, si la carga se mueve una distancia  $\vec{\Delta l} = \Delta l \mathbf{a}_l$ , donde  $\mathbf{a}_l$  es el vector unitario en la dirección de  $\Delta l$ , la componente de la fuerza que se debe vencer es  $\vec{F} \cdot \mathbf{a}_l = Q\vec{E} \cdot \mathbf{a}_l$ , de tal manera que la fuerza escalar externa que se requiere es

$$F_{\text{externa}} = -Q\vec{E} \cdot \mathbf{a}_l$$

(note la presencia del signo negativo) y por consiguiente el incremento del trabajo que realiza la fuerza externa es entonces

$$\Delta W = -Q\vec{E} \cdot \Delta l \mathbf{a}_l = -Q\vec{E} \cdot \vec{\Delta l} \quad [J]$$

Supongamos ahora que la fuerza externa mueve la carga puntual desde una posición inicial  $P_i$  hasta una posición final  $P_f$  a lo largo de una cierta trayectoria, como se muestra en la figura 1.14.

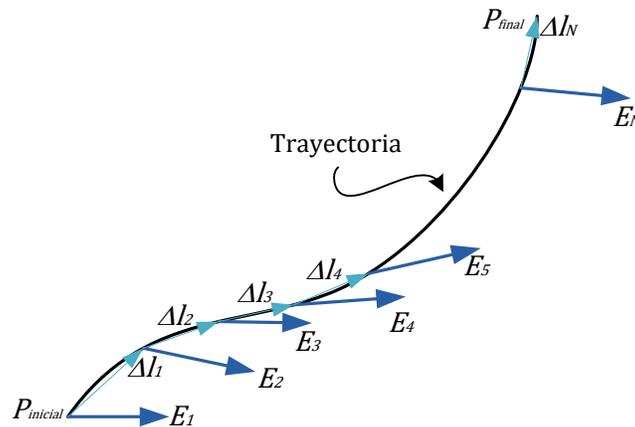


Figura 1.14. Trabajo incremental al mover una carga eléctrica a lo largo de una trayectoria.

El trabajo total requerido para realizar lo anterior, se puede aproximar por una suma finita de trabajos incrementales, esto es

$$W_{P_i \rightarrow P_f} \approx -Q \sum_{n=1}^N \bar{E}_n \cdot \bar{\Delta}l_n$$

donde  $\bar{E}_n$  es la intensidad del campo eléctrico en el  $n$ -ésimo punto de la trayectoria.

Si a continuación  $N$  se aproxima a infinito, de tal forma que  $\bar{\Delta}l_n$  tienda a cero para toda  $n$ , la sumatoria se transforma en integral y el trabajo total estará dado por

$$W_{P_i \rightarrow P_f} = -Q \int_{P_i}^{P_f} \bar{E} \cdot d\bar{l} \quad (1.22)$$

Por otra parte, se define la *diferencia de potencial* entre los puntos  $a$  y  $b$  como el trabajo requerido por una fuerza externa para mover una *carga eléctrica unitaria positiva* desde  $b$  hasta  $a$ . Por lo que si en la ecuación anterior hacemos  $Q = 1 [C]$  resulta

$$V_{ab} = V_a - V_b = \frac{W_{b \rightarrow a}}{Q} = - \int_b^a \bar{E} \cdot d\bar{l} \quad [Volts] \quad (1.23)$$

En esta ecuación el término  $V_a$  ( $V_b$ ) se denomina *función potencial electrostático* o simplemente *potencial del punto a* (del punto  $b$ ) y es una función del espacio o sea  $V(x, y, z)$ .

Teniendo en cuenta siempre la ecuación (1.23), el potencial de un punto, se denominará *voltaje* de ese punto. Esto es,  $V_a = V(x_a, y_a, z_a)$  y  $V_b = V(x_b, y_b, z_b)$  se consideran potenciales absolutos y representan el trabajo por unidad de carga necesario para trasladar una carga unitaria positiva desde el infinito (*donde por convención se considera que el potencial es nulo*) hasta el punto en cuestión, o sea

$$V_p = V_{p\infty} = V(p) - V(\infty) = V(p) = - \int_{\infty}^p \bar{E} \cdot d\bar{l} \quad (1.24)$$

En la literatura relacionada con este tema, la expresión para calcular el trabajo que se efectúa al trasladar una carga arbitraria  $q$  desde el punto  $b$  hasta el punto  $a$  es la que se muestra a continuación (al sustituir la ecuación (1.23) en la (1.22))

$$W_{b \rightarrow a} = -q \int_b^a \bar{E} \cdot d\bar{l} = qV_{ab} \quad (1.25)$$

Como ejemplo, el potencial absoluto de un punto  $P$  a una distancia  $r$  de una carga puntual  $Q$  está dado por (en coordenadas esféricas)

$$V_p = - \int_{\infty}^r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r \cdot dr \mathbf{a}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (1.26)$$

Este resultado se puede generalizar para cada una de las distribuciones de carga ya vistas. Si  $dQ = \rho dv$  se tiene

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho dv}{R} \quad (1.27)$$

donde  $R$  es la distancia desde  $dQ = \rho dv$  al punto  $P$ . Para las distribuciones lineal y superficial, la relación anterior también es válida, esto es

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda dl}{R} \quad (1.28)$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\sigma ds}{R} \quad (1.29)$$

Supongamos ahora que se desea mover una carga eléctrica  $Q$  alrededor de la trayectoria cerrada  $t$  que se observa en la figura 1.15, compuesta por los trayectos  $t_1$  desde  $a$  a  $b$  y  $t_2$  de  $b$  hasta  $a$ .

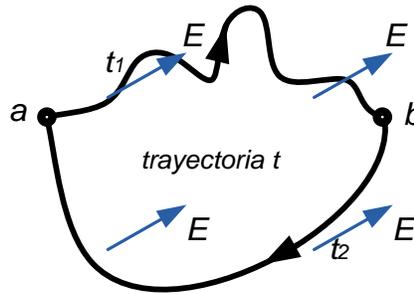


Figura 1.15. Naturaleza del campo electrostático conservativo.

Con base en lo que se ha estudiado, se puede concluir que el movimiento a lo largo de la trayectoria cerrada no involucra ningún trabajo, ya que para un campo eléctrico dado, el trabajo es función de la posición inicial y la posición final de la carga, no de la trayectoria en sí. Es decir

$$W_{b \rightarrow a} + W_{a \rightarrow b} = -Q \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} - Q \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l} = Q(V_{ba} + V_{ab}) = 0$$

La expresión anterior es equivalente a

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (1.30)$$

ecuación que se conoce como *propiedad conservativa del campo electrostático*.

Por otra parte, recordando el teorema de Stokes

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l}_{línea} = \iint (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{s}_{superficie} \quad (1.31)$$

aplicado a (1.30), se tiene

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{s} = 0$$

por lo que

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (1.32)$$

Finalmente, teniendo en cuenta lo anterior, se puede afirmar que *el campo electrostático es tanto conservativo como irrotacional*.

### Superficie equipotencial

Una superficie equipotencial es una superficie compuesta de todos aquellos puntos que tienen el *mismo valor de potencial* o lo que es lo mismo *un potencial constante*. Y puesto que desplazar una carga eléctrica en una región donde existe un campo eléctrico requiere realizar un trabajo, y este trabajo se manifiesta como una variación de la energía potencial. Es meridiano que no es necesario realizar un trabajo para mover una carga eléctrica sobre una de estas superficies. Y no se hace ningún trabajo porque en todos los puntos que constituyen la superficie equipotencial, *el campo eléctrico es perpendicular a la superficie equipotencial*. Entonces es evidente que cuando un cuerpo con un exceso de carga se mueve en una dirección normal a una superficie equipotencial se hace un gasto máximo de energía necesariamente.

### Gradiente de potencial

De nuestros cursos de matemáticas sabemos: *El gradiente de un campo escalar es un campo vectorial que se localiza en la dirección para la cual el campo escalar cambia con mayor rapidez*.

Como se ha visto, el potencial eléctrico se puede determinar a partir de *la integral de la intensidad del campo eléctrico*, ecuación (1.23). Luego entonces, se podría esperar que es posible conocer la intensidad del campo eléctrico a partir de *la diferenciación del potencial eléctrico*.

Consideremos nuevamente la ecuación (1.27), el potencial de algún punto  $p$  es

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho dv}{R} \quad (1.27)$$

donde

$$R = |\vec{R}| = |x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z| = [x^2 + y^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}$$

Obteniendo el gradiente del potencial

$$\nabla V = \nabla \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho dv}{R} \right) \quad (1.33)$$

como el operador  $\nabla$  (*del*) opera sobre  $R$  no sobre la variable de integración  $dv$ , (recuerde que  $dQ = \rho dv$ ), entonces

$$\nabla V = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \rho \nabla \left(\frac{1}{R}\right) dv \quad (1.34)$$

pero

$$\begin{aligned} \nabla \left(\frac{1}{R}\right) &= \frac{\partial \left(\frac{1}{R}\right)}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial \left(\frac{1}{R}\right)}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial \left(\frac{1}{R}\right)}{\partial z} \mathbf{a}_z \\ \nabla \left(\frac{1}{R}\right) &= -\frac{x}{R^3} \mathbf{a}_x - \frac{y}{R^3} \mathbf{a}_y - \frac{z}{R^3} \mathbf{a}_z = -\frac{\bar{R}}{R^3} = -\frac{1}{R^2} \mathbf{a}_R \end{aligned} \quad (1.35)$$

Sustituyendo (1.35) en (1.34)

$$\nabla V = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho}{R^2} \mathbf{a}_R dv$$

Esta es la ecuación (1.10) ya vista, expresión que permite encontrar la intensidad de campo eléctrico. Así

$$\bar{E} = -\nabla V \quad (1.36)$$

es decir *el campo eléctrico es igual al negativo del gradiente de potencial*. Se debe notar que debido a este hecho el campo eléctrico también tiene unidades de  $\left[\frac{V}{m}\right]$  equivalentes a  $\left[\frac{N}{C}\right]$ .

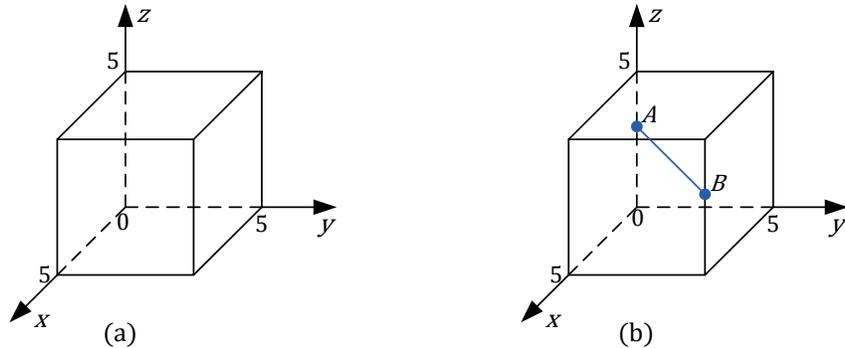


Figura 1.16. (a) Región con campo eléctrico  $\bar{E}$ . (b) Trayectoria de A a B.

#### Ejemplo 4

Considere que el campo eléctrico en la región encerrada por el cubo de la figura 1.16(a) está dado por

$$\bar{E} = 800(yz^2 \mathbf{a}_x + xz^2 \mathbf{a}_y + 2xyz \mathbf{a}_z) \quad \left[\frac{N}{C}\right]$$

donde  $x, y$  y  $z$  están en  $[m]$ .

- Calcule la densidad volumétrica de carga  $\rho$ , y concluya si es constante o no.
- Compruebe si el campo eléctrico  $\bar{E}$  es conservativo.

- c) Indique si la función potencial eléctrico  $V = -800(xyz^2) + 100 [V]$  corresponde al campo eléctrico dado.
- d) Calcule el trabajo necesario para trasladar una carga eléctrica  $q = 1[\mu C]$  desde el punto  $A(0,0,3) [m]$  al punto  $B(5,5,3) [m]$ .
- e) Indique si el trabajo del inciso d) lo realiza el sistema o un agente externo.

Solución:

- a) A partir de la Ley de Gauss en forma diferencial, ecuación (1.21) se puede calcular la densidad volumétrica de carga

$$\rho = \nabla \cdot \bar{D} = \epsilon_0 \nabla \cdot \bar{E}$$

$$\rho = \epsilon_0 \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \right) \cdot (800(yz^2 \mathbf{a}_x + xz^2 \mathbf{a}_y + 2xyz \mathbf{a}_z)) = 1600xy\epsilon_0 \left[ \frac{C}{m^3} \right]$$

y como se observa  $\rho$  no es constante.

- b) Si un campo eléctrico es conservativo, su rotacional es nulo, ecuación (1.32).

$$\nabla \times \bar{E} = 800 \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz^2 & xz^2 & 2xyz \end{vmatrix} = 800(0\mathbf{a}_x + 0\mathbf{a}_y + 0\mathbf{a}_z)$$

$\therefore \bar{E}$  es conservativo.

- c) De la ecuación (1.36), al aplicar el gradiente a la función potencial  $V$  debemos obtener  $\bar{E}$ , esto es

$$\bar{E} = -\nabla V = - \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \right) (-800(xyz^2) + 100) =$$

$$\bar{E} = 800(yz^2 \mathbf{a}_x + xz^2 \mathbf{a}_y + 2xyz \mathbf{a}_z)$$

Entonces la función potencial dada sí corresponde al campo eléctrico proporcionado.

- d) Aplicando la ecuación (1.25) directamente se tiene

$$W_{A \rightarrow B} = -q \int_A^B \bar{E} \cdot d\bar{l} = qV_{BA}$$

A continuación se determina la diferencia de potencial  $V_{BA}$

$$V_{BA} = - \int_A^B \bar{E} \cdot d\bar{l} =$$

$$V_{BA} = - \int_{(0,0,3)}^{(5,5,3)} 800 (yz^2 \mathbf{a}_x + xz^2 \mathbf{a}_y + 2xyz \mathbf{a}_z) \cdot (dx \mathbf{a}_x + dy \mathbf{a}_y + dz \mathbf{a}_z)$$

$$V_{BA} = -800 \left[ \int_0^5 yz^2 dx + \int_0^5 xz^2 dy + \int_3^3 2xyz dz \right]$$

La trayectoria más sencilla para ir desde el punto  $A(0,0,3)$  al punto  $B(5,5,3)$ , es sobre el plano  $z = 3$ , a lo largo de la línea recta de ecuación  $y = x$ , lo que también implica  $dy = dx$ . Véase la figura 1.16(b). Sustituyendo estas relaciones en la ecuación anterior, resulta

$$V_{BA} = -800 \left[ \int_0^5 yz^2 dx + \int_0^5 xz^2 dy + \int_3^3 2xyz dz \right]$$

$$V_{BA} = -3600[25 + 25] = -180 \times 10^3 \text{ [V]}$$

Ya se comprobó que el campo eléctrico es conservativo, por lo que la diferencia de potencial  $V_{ab}$  no depende de la trayectoria sino de las posiciones inicial y final. Verifiquemos este hecho, desplazándonos ahora en el mismo plano  $z = 3$ , pero ahora sobre la parábola de ecuación  $y = \frac{x^2}{5}$ , entonces  $dy = \frac{2}{5} x dx$

$$V_{BA} = -800 \left[ z^2 \int_0^5 y dx + z^2 \int_0^5 x dy + \int_3^3 2xyz dz \right] =$$

$$V_{BA} = -800 \cdot z^2 \left[ \int_0^5 \frac{x^2}{5} dx + \int_0^5 x \frac{2x}{5} dx \right] =$$

$$V_{BA} = -\frac{800 \cdot 9}{5} \left[ \frac{x^3}{3} + \frac{2x^3}{3} \right]_0^5 = -800 \cdot 9 \cdot 25 = -180 \times 10^3 \text{ [V]}$$

Sin embargo, la manera más sencilla de encontrar la diferencia de potencial  $V_{ab}$  es a partir de la función potencial eléctrico  $V$  que se proporciona y que ya se verificó que corresponde al campo eléctrico  $\vec{E}$  dado, por consiguiente

$$V_A = V(0,0,3) = -800(0 \cdot 0 \cdot 0^2) + 100 = 100 \text{ [V]}$$

$$V_B = V(5,5,3) = -800(5 \cdot 5 \cdot 3^2) + 100 = -179900 \text{ [V]}$$

entonces

$$V_{BA} = V_B - V_A = -180 \times 10^3 \text{ [V]}$$

Ahora

$$W_{A \rightarrow B} = qV_{BA} = -0.18 \text{ [J]}$$

- e) Dado el trabajo que se realiza al desplazar una carga eléctrica en una región donde existe un campo eléctrico se manifiesta como una variación de la energía potencial eléctrica y ésta disminuye, se concluye que el trabajo lo realiza el sistema.

$$\Delta E_{\text{energía Potencial}} = EP_B - EP_A = -0.18 \text{ [J]}$$