Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ingeniería
División de Ingeniería Eléctrica

Análisis de Circuitos Eléctricos — Responsable: M.I. Gloria Mata Hernández

Proyecto PAPIME PE100920 — Elaboró: Fernando Rivera Pérez

Señal Coseno

La señal coseno que se muestra en la Figura 1 tiene los siguientes parámetros básicos:

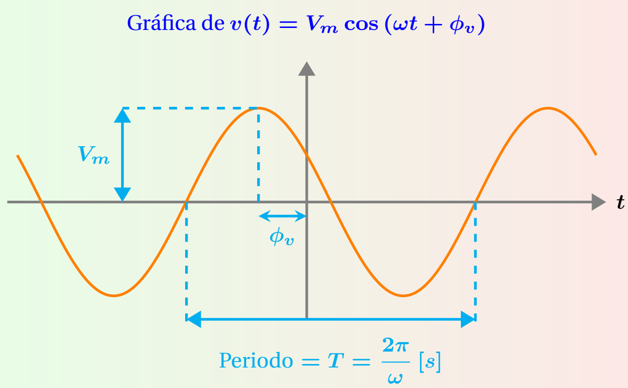


Figura 1: Amplitud V_m, periodo T y fase ϕ.

Frecuencia angular

$$\omega = 2\pi f$$

Frecuencia

$$f = \frac{1}{T}$$

Fasores

Un fasor, es la representación en números complejos de una forma de onda sinusoidal.

Representación fasorial

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi_v) \Longrightarrow \mathbb{V} = V_m \angle \phi_v$$

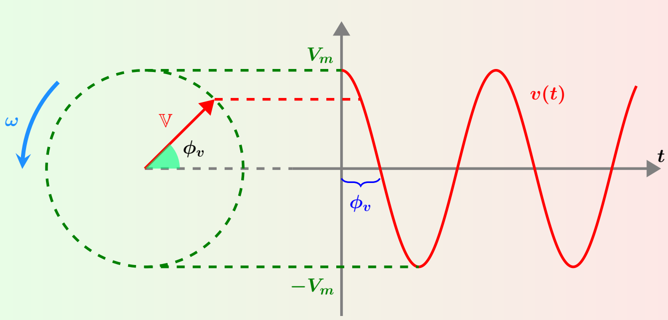


Figura 2: Fasor y onda sinusoidal.

Impedancia y Admitancia en CA

La impedancia en CA se define como la razón entre el fasor de voltaje y el fasor de corriente.

$$Z = \frac{\mathbb{V}}{\mathbb{I}} = \frac{V_m \angle \phi_v}{I_m \angle \phi_i} \qquad Y = \frac{1}{Z}$$

Impedancia

En la forma rectangular R es la parte resistiva y X es la reactancia que puede ser inductiva o capacitiva. En forma polar θ_z es el ángulo de la impedancia.

Forma rectangular

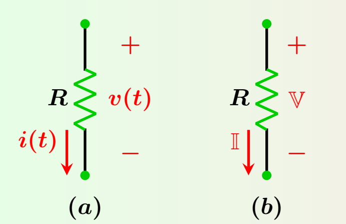
$$Z = R + jX$$

Forma polar

$$Z = |Z| \angle \theta_z$$

Impedancia Resistiva

Representación de una resistencia en (a) dominio del tiempo, (b) notación fasorial.

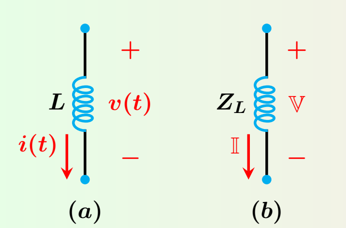


Impedancia Resistiva

$$Z_R = R$$

Impedancia Inductiva

Representación de un inductor en (a) dominio del tiempo, (b) notación fasorial.

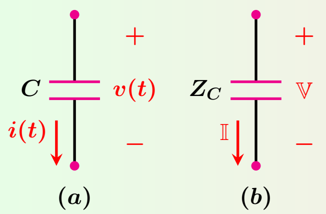


Impedancia Inductiva

$$Z_L = j\omega L$$

Impedancia Capacitiva

Representación de una resistencia en (a) dominio del tiempo, (b) notación fasorial.



Impedancia Capacitiva

$$Z_C = \frac{-j}{\omega C}$$

Reactancia

La reactancia del capacitor y del inductor son:

Reac. Capacitiva

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

Reac. Inductiva

$$X_L = \omega L$$

Números complejos

La relación entre la forma polar y rectangular de un número complejo se muestra en la Figura 3.

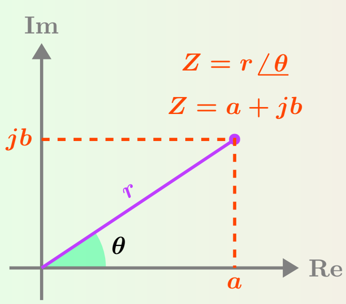


Figura 3: Plano complejo.

Conversiones

$$a = r\cos(\theta)$$

$$b = r\sin(\theta)$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

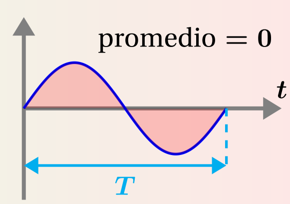
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

Valor medio

Para una función $v(t)$ con período T el valor medio es:

Valor medio

$$V_{\text{med}} = \frac{1}{T}\int_0^T v(t)\,dt$$



Proyecto PAPIME PE100920

Responsable: M.I. Gloria Mata Hernández

Elaboró: Fernando Rivera Pérez

Operaciones con fasores

El análisis con fasores se realiza con operaciones algebraicas con números complejos. Sean $Z_1 = a + jb$ y $Z_2 = c + jd$ dos números complejos en forma rectangular, las operaciones básicas son:

1. $Z_1 + Z_2 = (a + c) + (b + d)\,j$
2. $Z_1 - Z_2 = (a - c) + (b - d)\,j$
3. $Z_1\,Z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)\,j$
4. $\dfrac{Z_1}{Z_2} = \left(\dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2}\right) + \left(\dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right) j$

Operaciones con fasores 2

Sean $Z_A = Z_1\,\underline{/\theta_1}$ y $Z_B = Z_2\,\underline{/\theta_2}$ dos números complejos en forma polar, las operaciones básicas son:

Recíproco

$$Y_1 = \frac{1}{Z_A} = \frac{1}{Z_1}\,\underline{/-\theta_1}$$

Conjugado

$$Z_A^* = Z_1\,\underline{/-\theta_1}$$

1. $Z_A\,Z_B = Z_1\,Z_2\,\underline{/\theta_1 + \theta_2}$
2. $\dfrac{Z_A}{Z_B} = \dfrac{Z_1}{Z_2}\,\underline{/\theta_1 - \theta_2}$

Valor RMS

Para una función $v(t)$ con período T el valor RMS es:

Fórmula general

$$V_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)\,dt}$$

Senoidal

$$V_{\text{rms}} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

Funciones trigonométricas

1. $\cos(\theta) = \sin(\theta + 90^\circ)$
2. $\sin(\theta) = \cos(\theta - 90^\circ)$
3. $-\cos(\theta) = \sin(\theta - 90^\circ)$

Circuito Resonante en serie

El circuito de la Figura 4 opera en la frecuencia de resonancia ω_0.

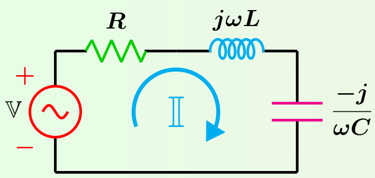


Figura 4: Circuito.

Frecuencia Resonante

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Forma rectangular

$$Z_T = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

Resultante

$$Z_T = R$$

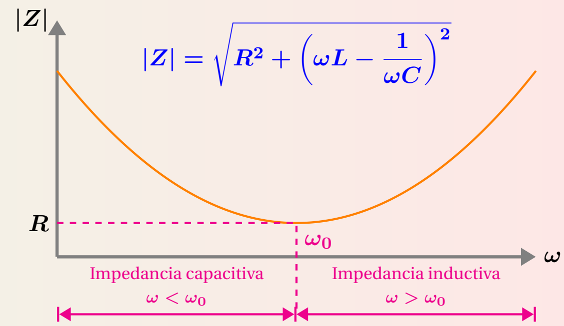


Figura 5: $|Z|$ en función de la frecuencia ω.

La magnitud de la impedancia en función de la frecuencia angular se representa en la Figura 5 y el ángulo de fase como función de la frecuencia angular se muestra en la Figura 6.

En ambas gráficas, para valores menores que la frecuencia de resonancia, el circuito es predominantemente capacitivo y para valores mayores es predominantemente inductivo.

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega RC}\right)$$

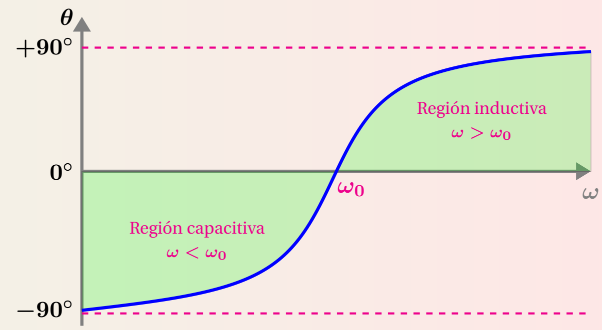


Figura 6: θ en función de la frecuencia ω.

Corriente vs Frecuencia

Corriente en función de la frecuencia angular ω del circuito de la Figura 4. Las frecuencias de corte se localizan al 70 % de la corriente máxima.

$$I(\omega) = \frac{|\mathbb{V}|}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{LC}\right)^2}}$$

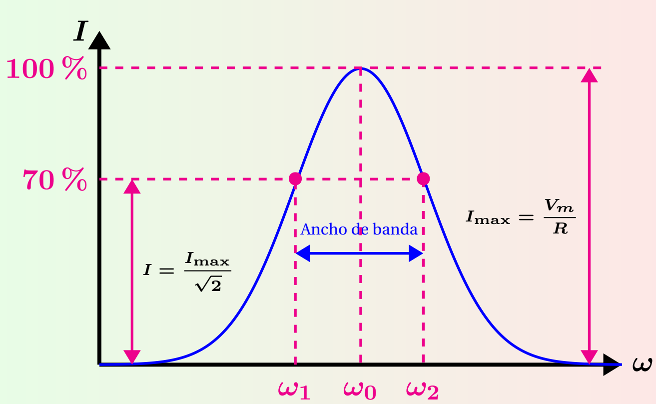


Figura 7: Corriente contra frecuencia angular.

Potencia vs Frecuencia

Potencia en función de la frecuencia angular ω del circuito mostrado en la Figura 4. Las frecuencias de corte se localizan cuando el circuito disipa la mitad de la potencia máxima.

$$P(\omega) = \frac{|\mathbb{V}|^2 R}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{LC}\right)^2}$$

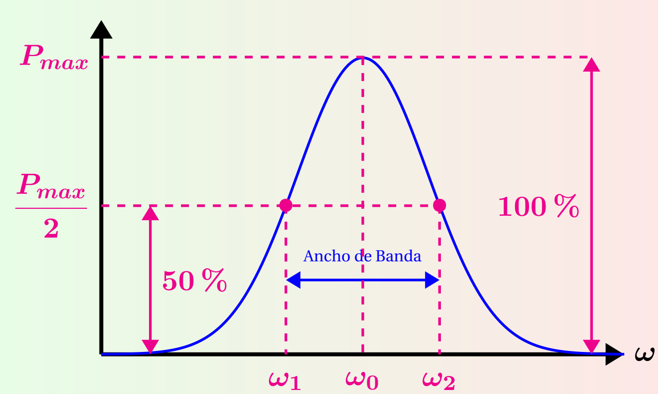


Figura 8: Potencia contra frecuencia angular.

Proyecto PAPIME PE100920

Responsable: M.I. Gloria Mata Hernández

Elaboró: Fernando Rivera Pérez

Voltajes

Expresiones de voltaje en los elementos en la frecuencia de resonancia ω_0, gráficas en la Figura 10.

1. $v_R(t) = v(t) = V_m \cos(\omega_0 t)$
2. $v_L(t) = |\mathbb{I}|\,|Z_L| \cos(\omega_0 t + 90°)$; $Z_L = jX_L$
3. $v_C(t) = |\mathbb{I}|\,|Z_C| \cos(\omega_0 t - 90°)$; $Z_C = -jX_C$

Factor de calidad

Expresiones para obtener el factor de calidad Q de un circuito RLC en serie a la frecuencia de resonancia ω_0.

1. $Q = \dfrac{\omega_0 L}{R}$
2. $Q = \dfrac{1}{\omega_0 C R}$
3. $Q = \dfrac{|\mathbb{V}_L|}{|\mathbb{V}|}$
4. $Q = \dfrac{|\mathbb{V}_C|}{|\mathbb{V}|}$

Ancho de banda

Expresiones para obtener el ancho de banda del circuito RLC en serie.

1. $AB = \omega_2 - \omega_1$
2. $AB = \dfrac{R}{L}$
3. $AB = \dfrac{\omega_0}{Q}$
4. $AB = \dfrac{f_0}{Q}$ [Hz]

Gráficas

Desfase de 180° en el voltaje de los elementos reactivos.

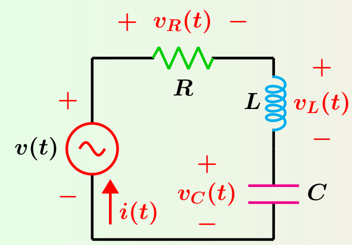


Figura 9: Circuito.

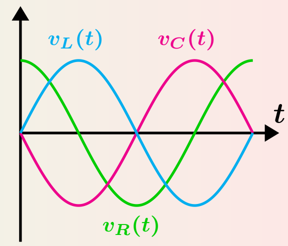


Figura 10: Voltajes.

Factor de calidad del inductor

El factor de calidad del inductor real que se muestra en la Figura 11 y para cualquier frecuencia ω es:

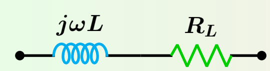


Figura 11: Inductor real.

$$\boxed{Q = \frac{\omega L}{R_L}}$$

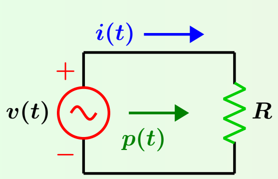
Frecuencias de corte

Las frecuencias de corte y la frecuencia de resonancia para el circuito RLC en serie se relacionan mediante:

1. $\omega_1 = \dfrac{-R}{2L} + \sqrt{\dfrac{R^2}{4L^2} + \dfrac{1}{LC}}$
2. $\omega_2 = \dfrac{R}{2L} + \sqrt{\dfrac{R^2}{4L^2} + \dfrac{1}{LC}}$
3. $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$

Potencia Activa

El voltaje y corriente están en fase por lo que $\phi_v = \phi_i$. V e I representan magnitudes rms.



$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi_v)$

$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi_i)$

Figura 12: Potencia.

$$\boxed{\theta = \phi_v - \phi_i}$$

$$\boxed{P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\phi_v - \phi_i)}$$

$$\boxed{P = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos(\theta)}$$

$$\boxed{P = VI}$$

$$\boxed{P = I^2 R}$$

$$\boxed{P = \frac{V^2}{R}}$$

Potencia instantánea $p(t) = v(t)i(t)$

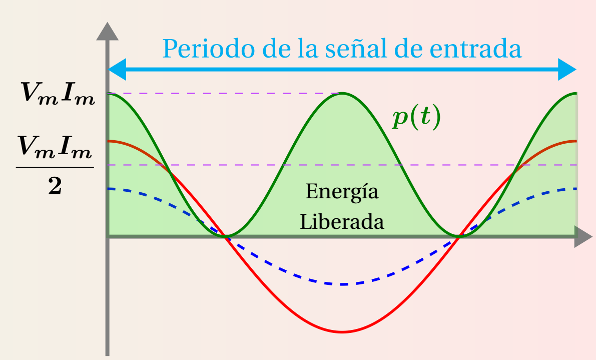


Figura 13: Potencia en una resistencia.

Circuito Resonante en paralelo

El circuito RLC en paralelo de la Figura 14 opera en la frecuencia de resonancia ω_0.

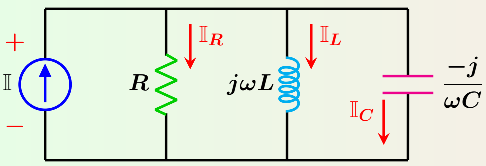


Figura 14: Circuito Resonante.

Forma Rectangular

$$Y = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

En resonancia

$$Z_T = R$$

Frec resonante

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Q = \omega_0 RC$$

Proyecto PAPIME PE100920

Responsable: M.I. Gloria Mata Hernández

Elaboró: Fernando Rivera Pérez

Expresiones

Expresiones complementarias para el circuito de la Figura 14.

1. $$AB = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{RC}$$

2. $$\omega_1 = \frac{-1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

3. $$\omega_2 = \frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

Circuito resonante paralelo real

La frecuencia de resonancia y parámetros del circuito mostrado en la Figura 15 son:

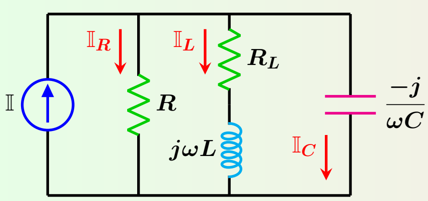


Figura 15: Circuito resonante.

Impedancia Total

$$Z_T = \frac{LR}{L + CRR_L}$$

Frec resonancia

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R_L}{L}\right)^2}$$

Factor de calidad

$$Q = \omega_0 Z_T C$$

Voltaje máximo

$$V_m = Z_T\, I_m$$

Expresiones

Las frecuencias de corte para el circuito de la Figura 15 se obtienen resolviendo de forma simultánea las ecuaciones siguientes:

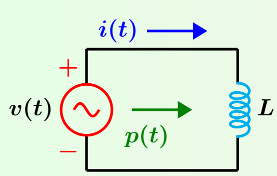
$$\frac{1}{R} + \frac{R_L}{R_L^2 + (\omega L)^2} = \frac{I_m \cos(\phi_i - \phi_v)}{\frac{V_m}{\sqrt{2}}}$$

$$\omega C - \frac{\omega L}{R_L^2 + (\omega L)^2} = \frac{I_m \sin(\phi_i - \phi_v)}{\frac{V_m}{\sqrt{2}}}$$

ϕ_v son los ángulos de los voltajes que se obtienen en las frecuencias de corte.

Potencia en el inductor

En un circuito puramente inductivo, el voltaje adelanta a la corriente en 90°, por lo que $\theta = \phi_v - \phi_i = 90°$. En potencia eléctrica, V e I representan magnitudes rms.



$$v(t) = V_m \cos(\omega t + 90°)$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t)$$

Figura 16: Potencia.

Potencia Reactiva

$$Q = V\,I \sin(\theta) \quad \text{[VAR]}$$

$$Q_L = V\,I$$

$$Q_L = I^2 X_L$$

$$Q_L = \frac{V^2}{X_L}$$

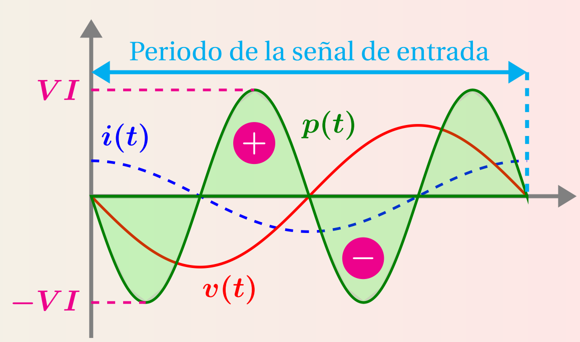


Figura 17: Potencia en un inductor.

Transformación Serie - Paralelo RL

Equivalencia serie - paralelo válida solamente en la misma frecuencia de operación ω.

Transformación Serie - Paralelo

$$R_P = \frac{{R_S}^2 + {X_{LS}}^2}{R_S} \qquad X_{LP} = \frac{{R_S}^2 + {X_{LS}}^2}{X_{LS}}$$

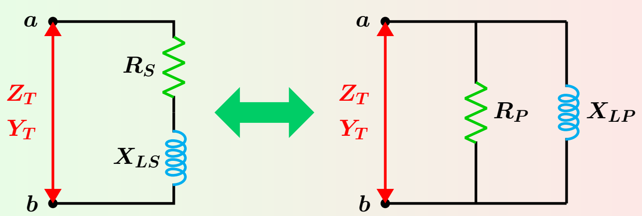


Figura 18: Circuitos equivalentes.

Transformación Paralelo - Serie

$$R_S = \frac{R_P\, {X_{LP}}^2}{{R_P}^2 + {X_{LP}}^2} \qquad X_{LS} = \frac{{R_P}^2\, X_{LP}}{{R_P}^2 + {X_{LP}}^2}$$

Transformación Serie - Paralelo RC

Equivalencia serie - paralelo válida solamente en la misma frecuencia de operación ω.

Transformación Serie - Paralelo

$$R_P = \frac{{R_S}^2 + {X_{CS}}^2}{R_S} \qquad X_{CP} = \frac{{R_S}^2 + {X_{CS}}^2}{X_{CS}}$$

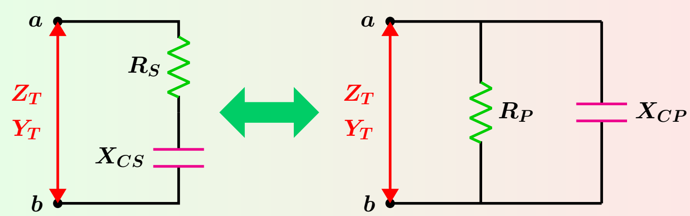


Figura 19: Circuitos equivalentes.

Transformación Paralelo - Serie

$$R_S = \frac{R_P\, {X_{CP}}^2}{{R_P}^2 + {X_{CP}}^2} \qquad X_{CS} = \frac{{R_P}^2\, X_{CP}}{{R_P}^2 + {X_{CP}}^2}$$

Escalamiento en impedancia

Cada impedancia del circuito se multiplica por K_m (factor de escalamiento de magnitud o de impedancia) permaneciendo la frecuencia sin cambio alguno.

1. $R_n = K_m R$
2. $L_n = K_m L$
3. $C_n = \dfrac{C}{K_m}$
4. $\omega_n = \omega$

R_n, L_n y C_n son los nuevos valores de la impedancias después de efectuado el escalamiento.

Escalamiento en frecuencia

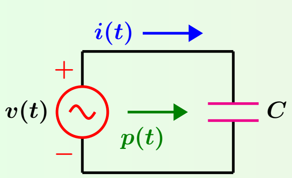
La multiplicación por K_f (factor de escalamiento de frecuencia) solo afecta a las impedancias capacitivas e inductivas que dependen de la frecuencia.

1. $R_n = R$
2. $L_n = \dfrac{L}{K_f}$
3. $C_n = \dfrac{C}{K_f}$
4. $\omega_n = K_f\,\omega$

R_n, L_n y C_n son los nuevos valores de la impedancias después de efectuado el escalamiento.

Potencia en el capacitor

En un circuito puramente capacitivo, la corriente adelanta al voltaje en 90°, por lo que $\theta = \phi_v - \phi_i = -90°$. En potencia eléctrica, V e I representan magnitudes rms.



$v(t) = V_m \cos(\omega t - 90°)$

$i(t) = I_m \cos(\omega t)$

Figura 20: Potencia.

Potencia Reactiva

$$Q = V\,I \sin(\theta) \quad \text{[VAR]}$$

$$Q_C = V\,I$$

$$Q_C = I^2 X_C$$

$$Q_C = \frac{V^2}{X_C}$$

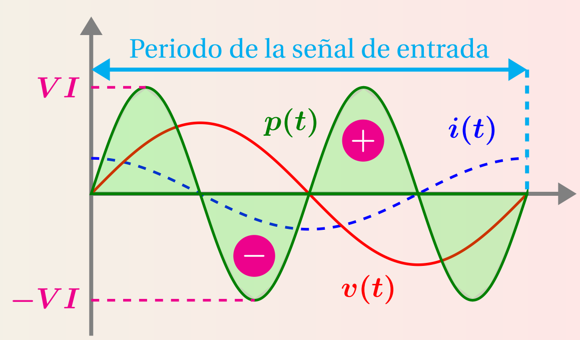


Figura 21: Potencia en un capacitor.