Linealidad e Invariabilidad

Víctor Manuel Sánchez Esquivel

Índice general

1.1. Objetivo de aprendizaje

El estudiante robustecerá y consolidará su conocimiento de las propiedades fundamentales de los sistemas y las señales, que a su vez le permitan desarrollar la habilidad de conocer, utilizar y aplicar las técnicas de estudio de los sistemas lineales e invariantes en el tiempo.

1.2. Introducción Teórica

En la práctica se estudian tanto sistemas algebraicos como sistemas dinámicos, sus modelos reflejan las características estáticas y dinámicas de su desempeño. Los sistemas dinámicos están constituidos al menos por un elemento que disipa energía y un elemento que almacena energía.

Un *sistema* se describe como una colección de elementos o dispositivos interconectados para actuar como una sola entidad. Un sistema tiene al menos una *señal de salida* que se genera cuando es estimulado al menos por otra señal, denominada *señal de entrada*. Desde este punto de vista, un sistema puede ser considerado como un transductor que transforma la señal de entrada en la señal de salida.

Si la entrada se representa por la función $x(t)$ y la salida por la función $y(t)$, la descripción anterior se puede representa por el *diagrama de bloques* que se muestra en la figura 1.1.

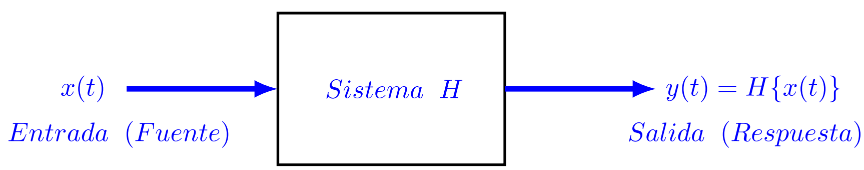

Figura 1.1. Sistema general con una sola entrada $x(t)$ y una sola salida $y(t)$.

1.2.1. Clasificación de sistemas

Todos los sistemas reales poseen incertidumbres, como puede ser los valores de sus parámetros, las mediciones que realizan, las entradas que se aplican y las perturbaciones o ruido inherentes en el medio ambiente. Sin embargo, en el estudio primordial de los sistemas todas estas incertidumbres se desestiman y se considera que todas estas cantidades son constantes y se conocen exactamente.

Bajo esta suposición, la correspondencia de la señal de entrada $x(t)$ a la señal de salida del sistema $y(t)$ está dada por

$$y(t) = H\{x(t)\} \tag{1.1}$$

donde $H\{\cdot\}$ constituye un operador o una función que especifica unívocamente la salida $y(t)$ en términos de la entrada $x(t)$ del sistema. Un sistema que satisface esta condición, se dice que es un *sistema determinístico* o dicho de otra manera: un sistema es determinístico si la respuesta a una entrada es predecible y repetible. Si un sistema no es determinístico, entonces es un *sistema estocástico*.

Un sistema es *amnésico*, *instantáneo* o *algebraico*, si la respuesta para cada valor de la variable independiente depende solo de la entrada en ese mismo valor de la variable independiente. Un modelo de este sistema consiste en una ecuación algebraica. Un sistema que no es amnésico es un sistema que tiene *memoria* y recibe el nombre de *sistema dinámico*. De aquí que, un sistema dinámico es aquel en el que la respuesta en un tiempo dado depende del valor presente de la entrada y de algunos valores anteriores de la entrada.

Un sistema en el cual el tiempo es la variable independiente se dice que es un *sistema causal*, *realizable* o *no-anticipatorio* si su respuesta depende sólo de los valores presente y anteriores de la entrada y no de los valores futuros de la entrada. Un sistema causal es un sistema que se puede construir o realizar, al menos en principio.

Un elemento de dos terminales es de parámetros concentrados si su variable asociada a través de él presenta el mismo valor en ambas terminales, esta condición se satisface si la dimensión física del elemento es despreciable en comparación con la longitud de onda de la más alta frecuencia de interés. Un *sistema de parámetros concentrados* está compuesto por elementos de parámetros concentrados y se puede modelizar por medio de una ecuación diferencial ordinaria. Un sistema que no es de parámetros concentrados es un *sistema de parámetros distribuidos*.

Un sistema está *relajado* o en *reposo* en el tiempo t_0, si ninguna energía está presente en el sistema en ese instante.

La característica primaria de un sistema lineal es que, *estando en reposo*, la naturaleza de la respuesta no se ve afectada al cambiar el nivel de la intensidad de la entrada. De manera explicita: Un sistema es lineal si realiza o efectúa las propiedades de *homogeneidad* y *aditividad*.

Un sistema satisface el principio de homogeneidad o se dice que es un sistema *homogéneo*, si la respuesta del sistema debida a la entrada $\alpha x(t)$ es igual a α veces la respuesta debida a la entrada $x(t)$. Esto es

$$H\{\alpha x(t)\} = \alpha H\{x(t)\} \tag{1.2}$$

donde α es una constante distinta de cero.

Un sistema satisface el principio de aditividad o se dice que es *aditivo* si la respuesta del sistema debida a la entrada $x_a(t) + x_b(t)$ es igual a la suma de las respuestas del sistema debidas a $x_a(t)$ y $x_b(t)$ actuando por separado. Esto es

$$H\{x_a(t) + x_b(t)\} = H\{x_a(t)\} + H\{x_b(t)\} \tag{1.3}$$

Cuando se consideran ambas propiedades a la vez

$$H\{\alpha x_a(t) + \beta x_b(t)\} = \alpha H\{x_a(t)\} + \beta H\{x_b(t)\} \tag{1.4}$$

donde α y β son dos constantes diferentes de cero. La ecuación (1.4), frecuentemente, recibe el nombre de *principio de superposición*. Cuando un sistema infringe el principio de homogeneidad o el principio de aditividad, se dice que es un *sistema no lineal*.

Un sistema es *invariante en el tiempo*, *fijo* o *estacionario* si, *estando en reposo*, un desplazamiento en el tiempo de la señal de entrada sólo causa un desplazamiento en el tiempo de la señal de salida correspondiente. Lo anterior implica que la forma de onda de la respuesta depende *solo* de la forma de onda de la entrada y no del instante en que se aplica la entrada. Esto es, si la relación *entrada-salida* del sistema está dada por

$$y(t) = H\{x(t)\}$$

entonces, para un *sistema invariante en el tiempo*

$$H\{x(t \pm \tau)\} = y(t \pm \tau) \qquad \forall \tau \tag{1.5}$$

El sistema *inverso* de un sistema es otro sistema que cuando se conecta en cascada con el sistema original, produce una salida igual a la entrada del sistema original dado. En la figura 1.2 se aprecia la conexión en cascada de un sistema y su sistema inverso.

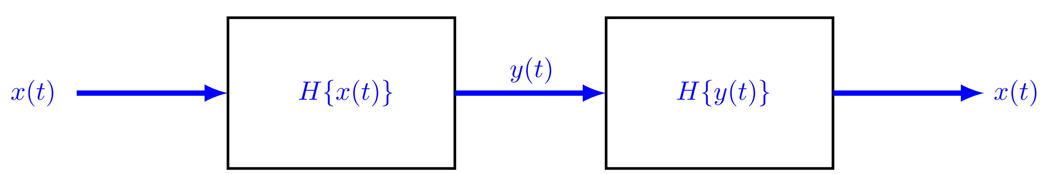

Figura 1.2. Sistema general conectado en casacada con su sistema inverso.

Un sistema es *estable* si permanece en reposo a menos que sea estimulado por una señal de entrada y que regresa al estado de reposo cuando la entrada se elimina.

1.2.2. Funciones singulares

Una *señal* es una entidad física que transporta información, ésta puede ser cuantitativa o cualitativa. Las señales tienen diversos orígenes, v.g. mecánico, eléctrico, acústico o biológico entre otros. Se utilizan para la comunicación entre seres humanos y entre seres humanos y máquinas. Permiten escudriñar el medio ambiente, descubrir detalles de estructuras y expresar lo que no es fácilmente observable; se emplean para controlar y utilizar la energía y la información. Aunque las señales se representar de varias maneras, en todos los casos la información está contenida en algún patrón de variación. Las señales se representan matemáticamente como funciones de una o más variables independientes.

Señales de tiempo continuo: se definen a lo largo del tiempo continuo y se representan por medio de una variable independiente continua. Su valor está especificado para todos los instantes. Frecuentemente se denominan señales *analógicas*.

Señales de tiempo discreto: se definen en tiempos discretos por lo que su variable independiente tiene solo valores discretos. Su valor está especificado sólo en ciertos instantes.

Señales digitales: son aquellas en las que su valor especificado en tiempos discretos es también discreto.

A continuación se lleva a cabo una introducción de la descripción, caracterización y manipulación de señales con características particulares.

Como se mencionó, con una ecuación diferencial ordinaria se puede caracterizar o modelizar un sistema determinístico, dinámico, lineal, causal y de parámetros concentrados. Por lo que, cuando una señal continua presenta discontinuidades, su derivada no se puede manipular matemáticamente y por consiguiente el estudio de las *señales* y los *sistemas* se restringe. Para eliminar esta limitante, se han definido *"funciones"* con ciertas características especiales denominadas *funciones singulares*. A saber:

La función *escalón unitario*, cuyo símbolo es $u_{-1}(t)$ se define como

$$u_{-1}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \tag{1.6}$$

o en forma general

$$u_{-1}\big[f(t)\big] = \begin{cases} 0 & f(t) < 0 \\ 1 & f(t) > 0 \end{cases} \tag{1.7}$$

la gráfica del escalón unitario se observa en la figura 1.3(a).

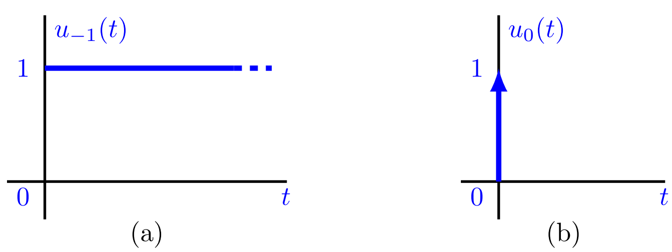

Figura 1.3. (a) Escalón unitario. (b) Impulso unitario.

La derivada del escalón unitario se define como la función *impulso unitario* o función delta de Dirac. Se representa, generalmente, por el símbolo de $\delta(t)$, aunque también se acepta el de $u_0(t)$. Su amplitud recibe el nombre de *momento* o *peso*. En la figura 1.3(b) se observa su representación.

La integral del escalón unitario es la *rampa unitaria*, que se define como

$$u_{-2}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \geq 0 \end{cases} \tag{1.8}$$

Asimismo, la integral de la rampa unitaria es la *parábola unitaria*. Integrando la ecuación (1.8), resulta

$$u_{-3}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \dfrac{t^2}{2} & t \geq 0 \end{cases} \tag{1.9}$$

En general, para toda k positiva

$$u_{-k}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \dfrac{1}{(k-1)!}t^{k-1} & t \geq 0 \end{cases} \tag{1.10}$$

Por otro lado, la derivada de $u_0(t)$ es el *doblete unitario*, se representa por medio de $u_1(t)$. Y la derivada del doblete unitario, denotada por $u_2(t)$, es el *triplete unitario*. En la figura 1.4, se representan el doblete y el triplete unitarios.

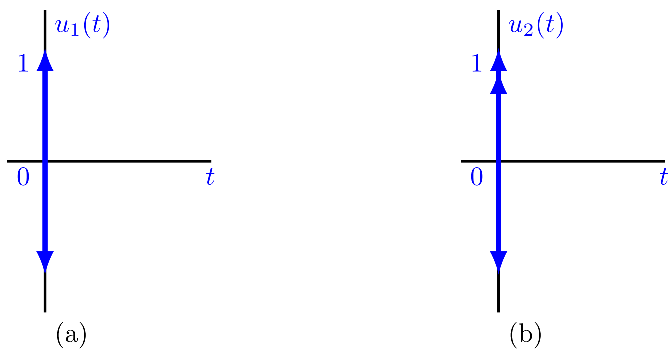

Figura 1.4. (a) Doblete unitario. (b) Triplete unitario.

Las relaciones exhibidas entre las funciones singulares que se han presentado, se sintetizan en las ecuaciones (1.11) y (1.12)

$$\frac{du_k(t)}{dt} = u_{k+1}(t) \qquad \forall k \tag{1.11}$$

$$\int_{-\infty}^{t} u_k(\tau)\,\mathrm{d}\tau = u_{k-1}(t) \qquad \forall k \tag{1.12}$$

Debido al papel trascendental que tiene la función impulso en el estudio de los sistemas y las señales, es conveniente enumerar algunas de sus propiedades o atributos.

En primer lugar, se debe enfatizar que la función impulso es una *"idealización"* matemática. Se introduce por conveniencia matemática y se puede considerar el límite de ciertas funciones que satisfagan las tres siguientes condiciones

$$\begin{aligned} \text{Incremento de altura}: &\quad f(t)\Big|_{t=0} \to \infty \\ \text{Decremento de extención}: &\quad f(t)\Big|_{t\neq 0} = 0 \\ \text{Área unitaria}: &\quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1 \end{aligned} \tag{1.13}$$

i) Es una función par, esto es

$$\delta(t) = \delta(-t) \tag{1.14}$$

ii) Si $f(t)$ es continua en $t = \tau$

$$f(t)\delta(t-\tau) = f(\tau)\delta(t-\tau) \tag{1.15}$$

esto es, la multiplicación de una función por un impulso unitario es igual a un impulso cuyo momento o peso es el valor de la función donde ocurre el impulso.

iii) La propiedad de ***muestreo*** de la función impulso

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t+\tau)\delta(t)\,\mathrm{d}t = f(\tau) \tag{1.16}$$

si $f(t)$ es continua en $t = \tau$.

iv)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t+\tau)u_1(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{d}{dt}f(t)\Big|_{t=\tau} \tag{1.17}$$

si $\frac{df(t)}{dt}$ es continua en $t = \tau$.

1.2.3. Respuesta al impulso

Cuando se aplica la entrada $x(t)$ al sistema H que se muestra en la figura 1.1, *estando el sistema en reposo*, es decir *con condiciones iniciales nulas*, se obtiene *la respuesta de estado cero*, $y_{zs}(t)$. De la ecuación (1.1) y teniendo en cuenta la ecuación (1.16), resulta

$$y_{zs}(t) = H\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\} \tag{1.18}$$

como el operador H opera sobre t y no sobre la variable de integración τ, se tiene

$$y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)H\left\{\delta(t-\tau)\right\}\,\mathrm{d}\tau \tag{1.19}$$

donde $H\{\delta(t-\tau)\}$, es la respuesta de estado cero del sistema H cuando se aplica un impiso en $t = \tau$. Esto es

$$h(t,\tau) = H\left\{\delta(t-\tau)\right\} \tag{1.20}$$

En la figura 1.5, se observa el concepto de la respuesta al impuso.

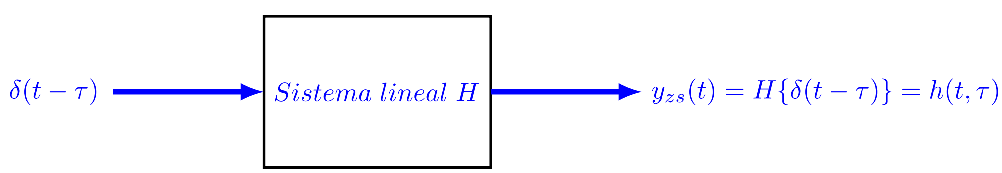

Figura 1.5. Respuesta al impulso.

Sustituyendo la ecuación (1.20) en la ecuación (1.19)

$$y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t,\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{1.21}$$

Cuando el sistema H además de ser lineal es invariante en el tiempo,

$$h(t,\tau) = h(t-\tau) \tag{1.22}$$

por lo que

$$y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{1.23}$$

La ecuación (1.23) es la *Integral de convolución*, ***transcendental***, en el estudio de los sistemas lineales e invariantes en el tiempo. La integral de convolución se representa como

$$y_{zs}(t) = x(t) * h(t) \tag{1.24}$$

1.2.4. Propiedades de la integral de convolución

La integral de convolución, de un sistema causal que inicia en $t = 0$ tiene las siguientes propiedades.

i) Conmutatividad

$$x(t) * h(t) = \int_0^t x(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t x(t-\tau)h(\tau)\,\mathrm{d}\tau = h(t) * x(t) \tag{1.25}$$

ii) Derivada de la integral de convolución

$$\frac{d}{dt}\Big[x(t) * h(t)\Big] = x(t)h(0) + x(t) * \frac{d}{dt}h(t)$$

como

$$h(t) = 0 \qquad \text{para} \qquad t \leq 0$$

entonces

$$\frac{d}{dt}\Big[x(t) * h(t)\Big] = x(t) * \frac{d}{dt}h(t) = \frac{d}{dt}x(t) * h(t) \tag{1.26}$$

Al aplicar el resultado anterior varias veces

$$\frac{d^n}{dt^n}\Big[x(t) * h(t)\Big] = \frac{d^k}{dt^k}x(t) * \frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}}h(t) \tag{1.27}$$

iii) Integral de la integral de convolución

$$\int_0^t h(\tau) * x(\tau)\,\mathrm{d}\tau = h(t) * \left[\int_0^t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] = \left[\int_0^t h(\tau)\,\mathrm{d}\tau)\right] * x(t) \tag{1.28}$$

1.3. Actividad de investigación previa

1. Proporcione tres ejemplos de sistemas determinísticos y tres ejemplos de sistemas estocásticos, especifique la entrada y la salida.
2. Proporcione tres ejemplos de sistemas algebraicos y tres ejemplos de sistemas dinámicos, especifique la entrada y la salida.
3. Proporcione tres ejemplos de sistemas causales y tres ejemplos de sistemas no causales, especifique la entrada y la salida.
4. Proporcione tres ejemplos de sistemas lineales y tres ejemplos de sistemas no-lineales, especifique la entrada y la salida.
5. Proporcione tres ejemplos de sistemas invariantes en el tiempo y tres ejemplos de sistemas variantes en el tiempo, especifique la entrada y la salida.
6. Encuentre un función que satisfaga las propiedades de la ecuación (1.13) y aproxime a la función impulso, $\delta(t)$.
7. Demuestre la propiedad de muestreo de la función impulso, ecuación (1.16).
8. Demuestre, integrando por partes, la ecuación (1.17).

9. Bosqueje y acote la convolución de las funciones $h(t) = 3\big[u_{-1}(t) - u_{-1}(t-5)\big]$ y $x(t) = 2\big[u_{-1}(t) - u_{-1}(t-2)\big]$.

1.4. Material y equipo

- Una PC.
- Conexión a internet.
- Juego de Resistencias.
- Fuente de poder.
- Multímetro.

1.5. Desarrollo

1.5.1. Experimento 1

Con su equipo, lleve a cabo una exposición de cualquiera de los modelos seleccionados en la investigación previa y justifique su selección.

1.5.2. Experimento 2

Para la función que proporcionó en la actividad 6 de la investigación previa, elabore un programa en Matlab que valide la aproximación a la función impulso.

1.5.3. Experimento 3

De la ecuación (1.15)

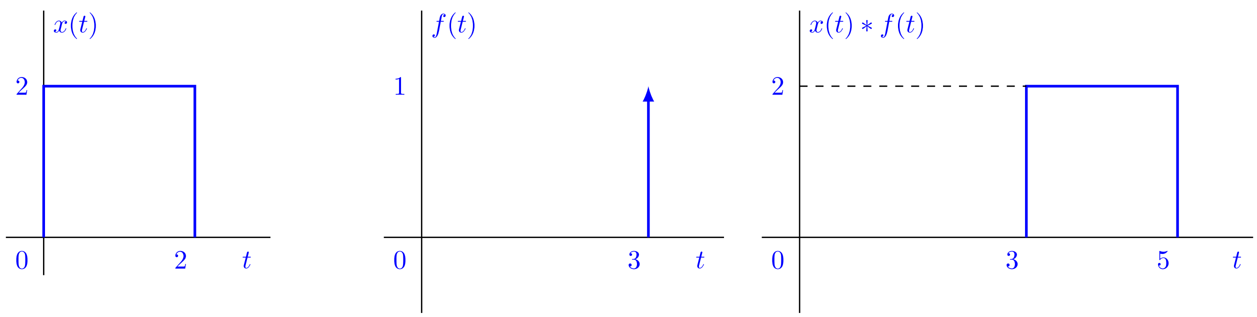

Figura 1.6. Convolución de $x(t)$ y $f(t)$.

Considerando la figura 1.6 y las ecuaciones (1.26) y (1.28), una forma de encontrar la convolución de las funciones propuestas en la actividad de investigación 9 se muestra en la figura 1.7.

Elabore el código de un programa de `MatLab` para llevar a cabo la convolución de las gráficas anteriores. Muestre sus resultados a su Profesor.

1.5.4. Experimento 4

Proponga otras funciones, realice las modificaciones necesarias, y efectúe la convolución de las mismas con el código de `MatLab` desarrollado por usted.

¿El resultado que se produce, corresponde al teórico? ¿Cuáles son sus conclusiones?

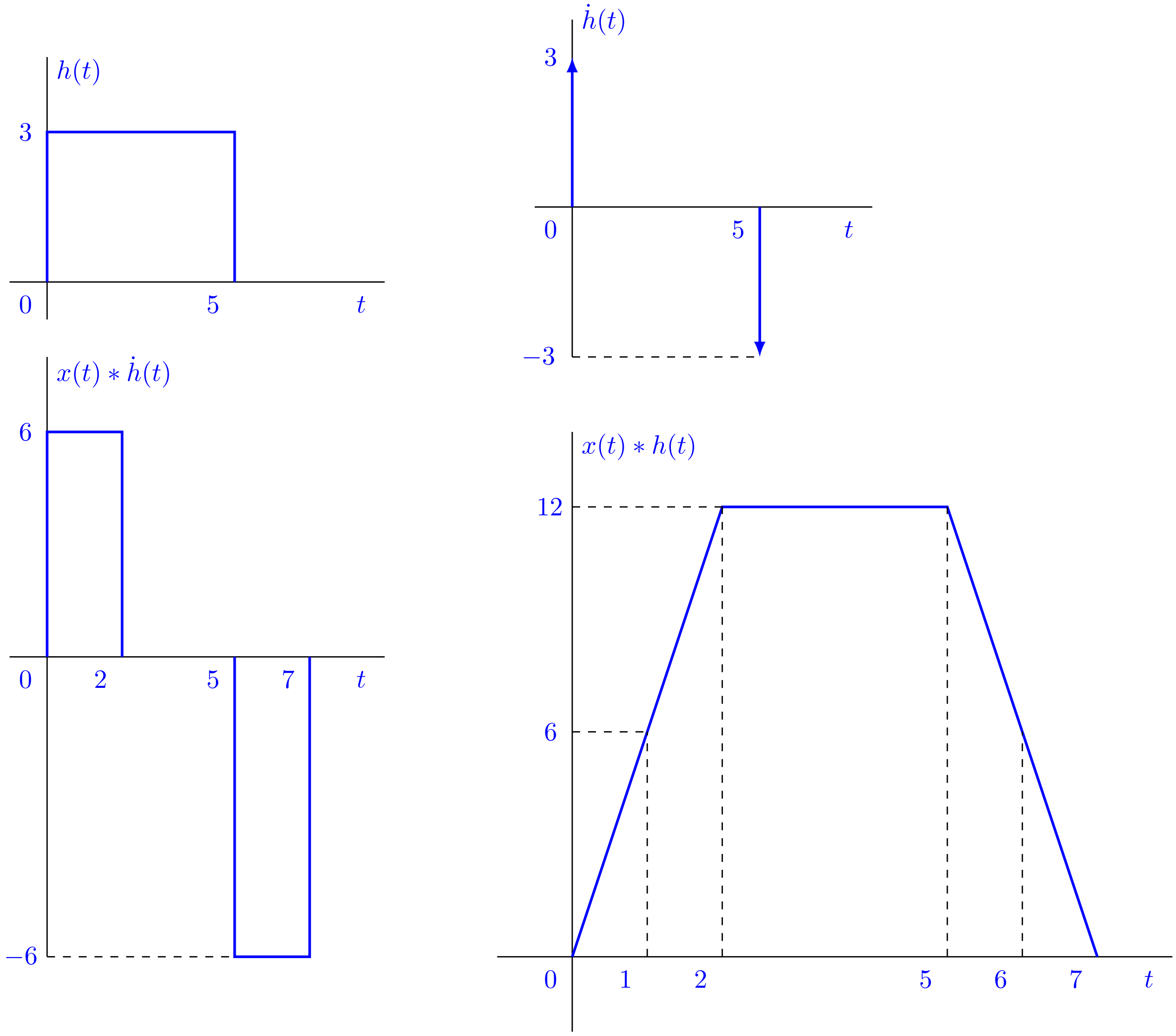

Figura 1.7. Convolución de $x(t)$ y $h(t)$.

1.5.5. Experimento 5

En la referencia [8], se propone el problema 16 del capítulo 2. Su enunciado es el siguiente.

La corriente $i(\cdot)$ especificada por la curva que se muestra en la figura 1.8 fluye a través de un capacitor *lineal e invariante en el tiempo* con capacitancia $C = 2\,\mu F$. Dado que $v_C(0) = 0$, calcule y bosqueje para $t \geq 0$ el voltaje $v_C(t)$, la potencia instantánea que entrega la fuente $p(t)$, y la energía que almacena el capacitor $W_E(t)$.

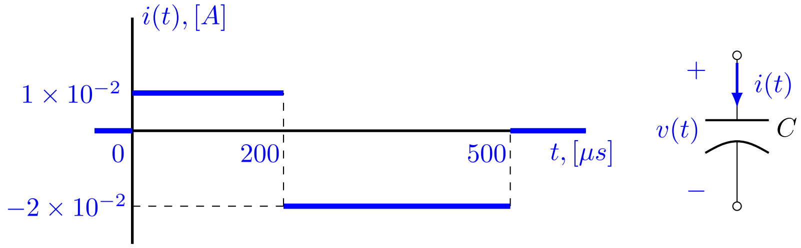

Figura 1.8. Corriente eléctrica en el capacitor lineal e invariante en el tiempo.

Solución:

Cálculo de $v(t)$:

$$\text{Si} \qquad i(t) = C\frac{d}{dt}v(t) \qquad \text{entonces} \qquad v(t) = v(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$\text{Para} \qquad 0 \le t < 200\mu s \qquad v(t) = 0 + \frac{1}{2\times10^{-6}}\int_0^t 1\times10^{-2}\,\mathrm{d}\tau = 5\times10^3 t$$
$$v(0) = 0[V] \qquad v(200\mu\, s) = 1[V]$$

$$\text{Para} \qquad 200\mu s \le t < 500\mu s \qquad v(t) = 1 + \frac{1}{2\times10^{-6}}\int_{200\times10^{-6}}^{t} -2\times10^{-2}\,\mathrm{d}\tau = 3 - 10\times10^3 t$$
$$v(200\mu\, s) = 1[V] \qquad v(500\mu\, s) = -2[V]$$

$$\text{Para} \qquad 500\mu s \le t \qquad v(t) = -2 + \frac{1}{2\times10^{-6}}\int_{500\times10^{-6}}^{t} 0\,\mathrm{d}\tau = -2[V]$$

El voltaje en el capacitor se puede observar en la figura 1.9.

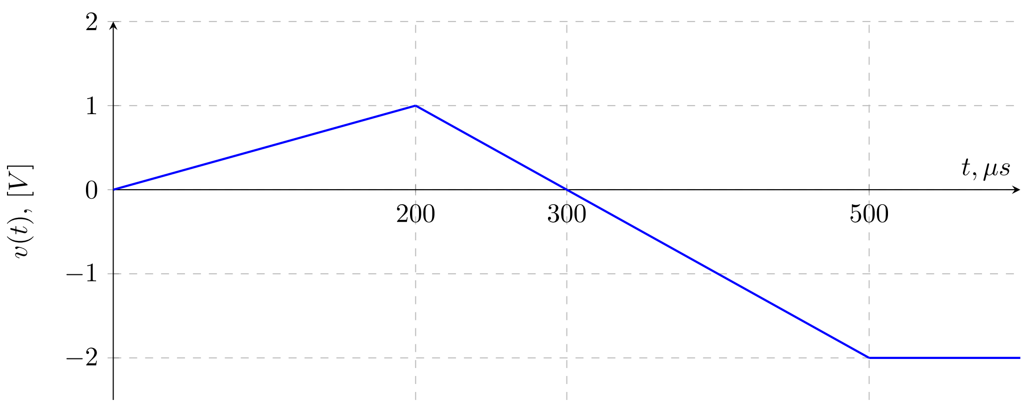

Figura 1.9. Voltaje en el capacitor.

Con este resultado, es posible determinar la potencia instantánea que se suministra, $p(t) = i(t)\,v(t)$. Su gráfica, se puede observar en la figura 1.10.

$$\text{Para} \qquad 0 \le t < 200\mu s \qquad p(t) = 50t$$
$$p(0) = 0[W] \qquad p(200\mu\, s) = 10[mW]$$

$$\text{Para} \qquad 200\mu s \le t < 500\mu s \qquad p(t) = 200t - 60\times10^{-3}$$
$$p(200\mu\, s) = -20[mW] \qquad p(500\mu\, s) = 40[mW]$$

$$\text{Para} \qquad 500\mu s \le t \qquad p(t) = 0[mW]$$

Finalmente, la consecución de la energía almacenada por el capacitor, se calcula con la siguiente expresión

$$W_E(t) = \int_{t_o}^{t} p(t')\,\mathrm{d}t' = \int_{t_o}^{t} i(t')v(t')\,\mathrm{d}t'$$

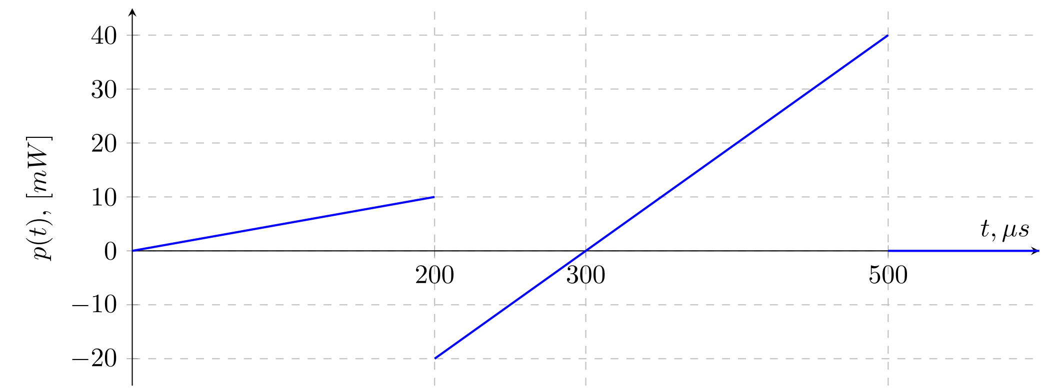

Figura 1.10. Potencia instantánea suministrada.

$$\text{Para} \qquad 0 \leq t < 200\mu s \qquad W_E(t) = \int_0^t 50t' \, \mathrm{d}t' = 25t^2$$
$$W_E(0) = 0[J] \qquad W_E(200\mu s) = 1 \times 10^{-6}[J]$$

$$\text{Para} \qquad 200\mu s \leq t < 500\mu s \qquad W_E(t) = 1 \times 10^{-6} + \int_{200\times 10^{-6}}^{t} -2 \times 10^{-2} \left(3 - 10 \times 10^3 t'\right) \mathrm{d}t' = 100t^2 - 60 \times 10^{-3} t + 9 \times 10^{-6}$$
$$W_E(200\mu s) = 1 \times 10^{-6}[J] \qquad W_E(500\mu s) = 4 \times 10^{-6}[J]$$

$$\text{Para} \qquad 500\mu s \leq t \qquad W_E(t) = 4 \times 10^{-6}[J]$$

La forma de la energía en el capacitor se presenta en la figura 1.11.

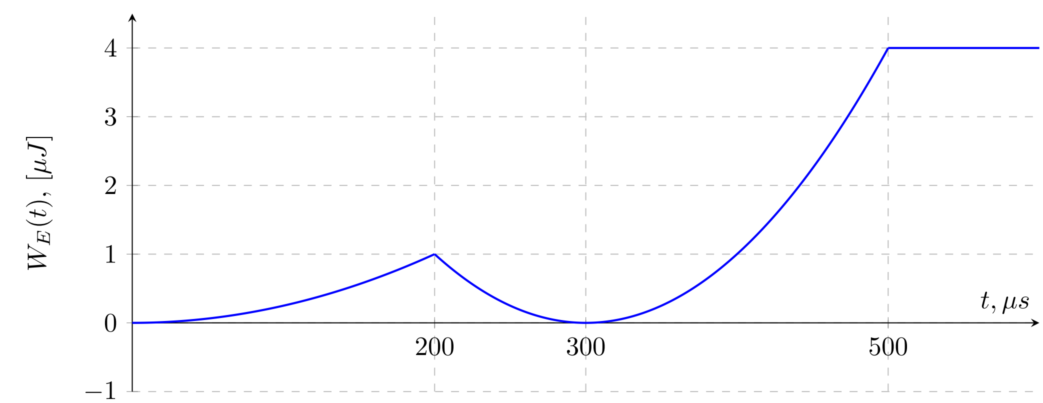

Figura 1.11. Energía almacenada en el capacitor.

¿Que puede usted comentar sobre la *linealidad* e *invariabilidad* del enunciado del problema?

Teniendo presente las propiedades de linealidad e invariabilidad del capacitor, elabore el código de un programa de `MatLab` para visualizar las gráficas de voltaje, potencia y energía mostradas.

Ejecútelo. ¿Coincide el resultado con la solución que se ha proporcionado? ¿Qué concluye? Muestre sus resultados a su Profesor.

1.5.6. Experimento 6

En la literatura relacionada con el tema, la propiedad de homogeneidad, también se conoce como *propiedad de proporcionalidad*. Esta propiedad permite proponer un valor de la salida, trabajar hacia atrás para obtener el valor de la entrada correspondiente, y ajustar la respuesta supuesta o asumida para que sea consistente con el *valor real* de la entrada. Para su comprensión, considere el siguiente ejercicio.

Sea el circuito eléctrico de la figura 1.12, en el cual se desea encontrar los valores de v e i.[1].

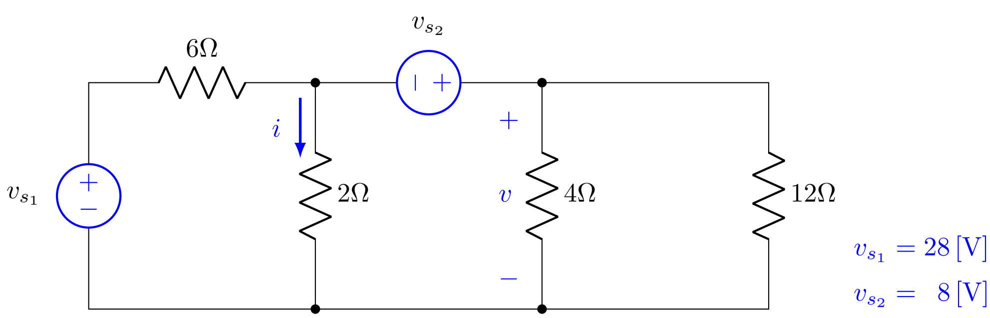

Figura 1.12. Circuito eléctrico *instantáneo* o de *memoria cero*.

Solución:

Si se *asume* que $v = 12$ V, un valor *cómodo*, a partir de la ley de Ohm, en la resistencia de $4\,\Omega$ circula una corriente eléctrica de 3 A y en la de $12\,\Omega$, una de 1 A. Así, en la fuente independiente de voltaje v_{s_2} circula una corriente eléctrica de 4 A de acuerdo a la ley de corrientes de Kirchhoff.

Considerando las leyes de Kirchhoff y la ley de Ohm. Para la primera malla, se tiene

$$v_{s_1} = 6(i+4) + 2i = 8i + 24$$

para la malla siguiente

$$2i + v_{s_2} = v = 12$$

De las ecuaciones anteriores

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{v_{s_1} - 24}{8}\right) + v_{s_2} &= 12 \\ v_{s_1} - 24 + 4v_{s_2} &= 4 \times 12 = 48 \\ v_{s_1} + 4v_{s_2} &= 48 + 24 = 72 \end{aligned}$$

al sustituir los valores de las fuentes independientes de voltaje, resulta

$$28 + 4 \times 8 = 60 = 72$$

Como se observa, el resultado no es consistente. Entonces es necesario, resolver la siguiente relación

$$28 + 4 \times 8 = 60 = K(72)$$

de donde se colige que el valor de K debe ser

$$K = \frac{60}{72} = \frac{6 \times 10}{6 \times 12} = \frac{5}{6}$$

como el valor de v que se supuso fue $v = 12$, entonces

$$v_{deseado} = K \times v = \frac{5}{6} \times 12 = 10\,[\mathrm{V}]$$

[1]Problema 4.5 de [4]

con este valor de v, es sencillo encontrar la intensidad de la corriente eléctrica de $i = 1[\mathrm{A}]$.

A continuación, *diseñe y construya* un circuito eléctrico arbitrario y determine, mediante la propiedad de proporcionalidad el *valor* de una variable eléctrica. Verifique y justifique los datos encontrados. Muestre sus resultados a su Profesor.

1.6. Bibliografía

Bibliografía

[1] Haykin, S. and Van Ve

en, B. *Signal and Systems*, 2nd ed. USA: John Wiley & Sons. Inc,., 2005.

[2] Mata, G., Sánchez, V. M. E. y Gómez, J. *Análisis de Sistema y Señales con computo avanzado*, México: Facultad de Ingeniería, UNAM, 2002.

[3] Carlson, G. E. *Signal and Linear System Analysis.* New York: John Wiley & Sons, Inc., 1998.

[4] Johnson, D. E., Hilburn, J. L., & Johnson, J. R. *Basic Electric Circuit Analysis*, Third edition, New Jersey: 1986.

[5] Neff, H. P., Jr. *Continuous and Discrete Linear Systems.* New York: Harper & Row, 1984.

[6] Canales, R. R. y Barrera, R. R. *Análisis de Sistemas Dinámicos y Control Automático.* México: Ed. Limusa, 1977.

[7] Liu, C. L., Liu,J. W. S. *Linear Systems Analysis.* Tokio: McGraw-Hill Kogakusha, 1975.

[8] Desoer, C. A. and Kuh, E. S. *Basic Circuit Theory.* New York: McGraw-Hill Book Company, 1969.

[9] `https://control.fi-b.unam.mx/aca_ace1.php`